ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: ELEKTRYKA z. 134 Nr kol.1225

Janusz GUZIK
Brunon SZADKOWSKI

OCENA ODKSZTAŁCENIA PRĄDU PŁYNĄCEGO PRZEZ DIELEKTRYK ZASILANY NAPIĘCIEM O KSZTAŁCIE WYCINKA SINUSOIDY

Streszczenie. W pracy pracy przedstawiono metodę wyznaczania odpowiedzi prądowej dielelktryka zasilanego napięciem

$$u_x(t) = A_x \cdot \sin \Omega_x t \cdot [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T_o)]$$

w przedziale czasu $0 \leq T_o \leq T_x$. Przeanalizowano wpływ parametrów napięcia zasilającego na odkształcenie prądu płynącego przez dielektryk.

DEFORMATION EVALUATION OF CURRENT FLOWING THROUGH THE DIELECTRIC SUPPLIED BY VOLTAGE IN FORM OF SINE CURVE SECTOR

Summary. In the paper the method of current response calculation of a dielectric supplied by voltage

$$u_x(t) = A_x \cdot \sin \Omega_x t \cdot [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T_o)]$$

in time interval $0 \leq T_o \leq T_x$. is presented. The supply voltage parameters influence on deformation of current flowing through the dielectric is analysed.

ОЦЕНКА ДЕФОРМАЦИИ ТОКА ПРОТЕКАЮШЕГО ЧЕРЕЗ ДИЭЛЕКТРИК ПИТАЕМЫЙ НАПРЯЖЕНИЕМ В ФОРМЕ СЕКТОРА СИНУСОИДЫ

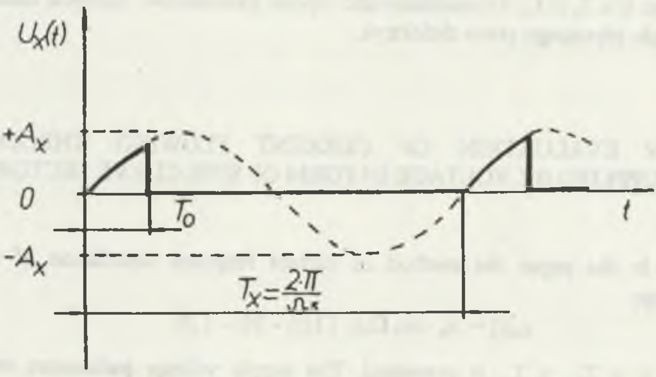
Рэзюме. В работе представлен метод вычисления токовой реакции диэлектрика питаемого напряжением

$$u_x(t) = A_x \cdot \sin \Omega_x t \cdot [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T_o)]$$

в диапаэоне времён $0 \leq T_o \leq T_x$. Проаналиризовано влияние параметров питаюшего напряжения на деформацию тока протекаюшего через диэлектрик.

1. WSTĘP

W badaniach izolacji elektrycznej, a zwłaszcza w diagnostyce stanu izolacji, bardzo interesujące są badania prowadzone przy infraniskich częstotliwościach (10^{-5} - 10 Hz) napięcia zasilającego układ pomiarowy [8, 10]. Podstawowym zagadnieniem przy budowie odpowiednich układów pomiarowych jest skrócenie czasu potrzebnego na uzyskanie wyniku pomiarowego. Na ogół czas ten jest pewną wielokrotnością okresu napięcia zasilania i np. przy częstotliwościach mniejszych niż 10^{-2}Hz osiąga już wartość od kilkudziesięciu minut do wielu godzin. Jedną z koncepcji skrócenia czasu pomiaru, przyjętą przez autorów, jest zasilanie układów pomiarowych napięciem o kształcie wycinka sinusoidy (por. rys.1), którego czas trwania T_o może być znacznie krótszy od okresu T_x.



Rys. 1. Przebieg napięcia zasilającego badany dielektryk

Fig. 1. Voltage running supplying investigated dielectric

Realizacja takiej koncepcji wymaga najpierw określenia odpowiedzi prądowej dielektryka na proponowane wymuszenie napięciowe. Istotne jest również dokonanie oceny stopnia odkształcenia otrzymanej odpowiedzi prądowej w stosunku do wartości prądu ustalonego, płynącego przez dielektryk przy zasilaniu napięciem sinusoidalnym.

2. WYZNACZANIE ODPOWIEDZI PRĄDOWEJ BADANEGO DIELEKTRYKA

Odpowiedź prądową i_x (t) dielektryka przy zerowych warunkach początkowych (tj. $u_x(0) = 0$) i dowolnym kształcie wymuszania napięciowego u_x (t) oraz schemacie zastępczym w postaci równoległego połączenia konduktancji G_x i pojemności C_x można obliczyć na podstawie zależności [5, 6]:

$$i_x(t) = G_x u_x(t) + C_x \frac{du_x(t)}{dt} + C_x \int_0^t \frac{du_x(t-\tau)}{d\tau} f(\tau) d\tau \qquad (1)$$

gdzie f(t) jest odpowiedzią dielektryka (związaną ze zjawiskami polaryzacji) na impuls napięcia typu Diraca [4]. Równanie (1) w postaci operatorowej przyjmuje następującą postać:

$$I_x(s) = U_x(s)\left\{G_x + sC_x[1 + \mathcal{L}(f(t))]\right\} \qquad (2)$$

gdzie przez α (·) oznaczono operację przekształcenia Laplace'a dokonaną na funkcji f(t), przy czym

$$U_x(s) = \mathcal{L}[U_x(t)] = \mathcal{L}\left\{A_x \sin\Omega_x t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T_o)]\right\} \qquad (3)$$

gdzie przez A_x, Ω_x i τ_o oznaczono odpowiednio amplitudę, pulsację i czas o trwania wymuszenia $u_x(t)$ (por. rys. 1). Realizację techniczną kształtu wymuszenia $u_x(t)$ wg wzoru (3) można uzyskać w układzie podanym na rys. 2. Zadaniem klucza K1 jest tutaj załączenie napięcia u_x i odłączenie go od dielektryka w chwili $t = T_o (0 \le T_o \le T_x)$, natomiast klucz K2 powinien zwierać elektrody wypełnione badanym dielektrykiem dla czasów $T_o < t << T_X$. Jeśli założy się, że funkcje f(t) opisują impulsową odpowiedź dielektryka (związaną ze zjawiskami polaryzacji) to można przedstawić je w postaci wynikającej bezpośrednio z prawa Curie-von Schweidlera [4]:

$$f(t) = a\,t^{-n} \qquad (4)$$

przy czym $a > 0$ i $0 < n < 1$. Wykonując odpowiednie działania (por. DODATEK), odpowiedź prądową $i_x(t)$ dielektryka możemy dla różnych przedziałów czasowych t przedstawić w postaci:

dla $0 < t < T_o$:

$$i_x(t)=\begin{cases} A_x[G_x+\alpha(n)]\sin\Omega_x t + A_x\Omega_x C_x\cos\Omega_x t, & \text{dla} \quad n\to 0 \\ A_x G_x\sin\Omega_x t + A_x[\Omega_x C_x+\beta(n)]\cos\Omega_x t, & \text{dla} \quad n\to 1 \end{cases} \tag{5}$$

oraz dla $T_o \le t \le T_x$

$$i_x(t)=\begin{cases} \dfrac{U_x(T_o)}{R_\Sigma}\left[e^{-\frac{t}{\tau_o}}+\gamma(n)\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_o}}\right)\right] & \text{dla } n\to 0 \\ \dfrac{U_x(T_o)}{R_\Sigma}\left[e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right] & \text{dla } n\to 1 \end{cases} \tag{6}$$

gdzie: $a(n) = a\, C_x\, \Gamma(1\text{-}n)$,

$b(n) = a\, W_x\, C_x\, \Gamma(1\text{-}n)$,

$g(n) = a\, \Gamma(1\text{-}n)$,

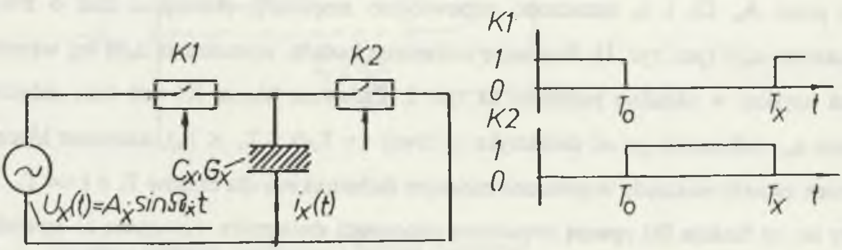
R_Σ - rezystancja zastępcza (por. rys. D1),

$t_o = t_o[\Gamma(1\text{-}n)]$,

$T_1 = t_1[\Gamma(1\text{-}n)]$,

przy czym $\Gamma(1-\nu)$ jest funkcją gamma [1] określoną równaniem:

$\Gamma(1-\nu) = \int^{+\infty} \varepsilon^{-\tau}\, \tau^{-\nu}\, \delta\tau.$



Rys. 2. Przykładowa realizacja techniczna przebiegu napięcia o kształcie podanym na rys. 1
Fig. 2. Examplary technical realization of voltage course after Fig. 1

Odpowiedź prądowa dielektryka dla stanu ustalonego przyjmuje postać:

$$I_x(t)=A_x G_x\sin\Omega_x t + A_x G_x \Omega_x\cos\Omega_x t \tag{7}$$

Równanie (5) w porównaniu z równaniem (7) uzupełnione jest składnikami będącymi funkcją przyjętego współczynnika n (por. (4)) dla badanego dielektryka, przy czym różnice te są tym większe im wartość współczynnika jest bliższa jedności ($n \rightarrow 1$), gdyż wówczas funkcja gamma $\Gamma(1\text{-}n) \rightarrow \infty$. Odpowiednio, dla czasów $T_o < t < T_x$ (równanie 6) odpowiedź prądowa $i_x(t)$ w niczym nie przypomina odpowiedzi ustalonej $I_x(t)$, natomiast wówczas szybkości zanikania prądu $i_x(t)$ dla $n \rightarrow 0$ i $n \rightarrow 1$ są w przybliżeniu tego samego rzędu (por. rys. 3). Dla porównania n zamieszczono w tablicy 1 [1].

Tablica 1

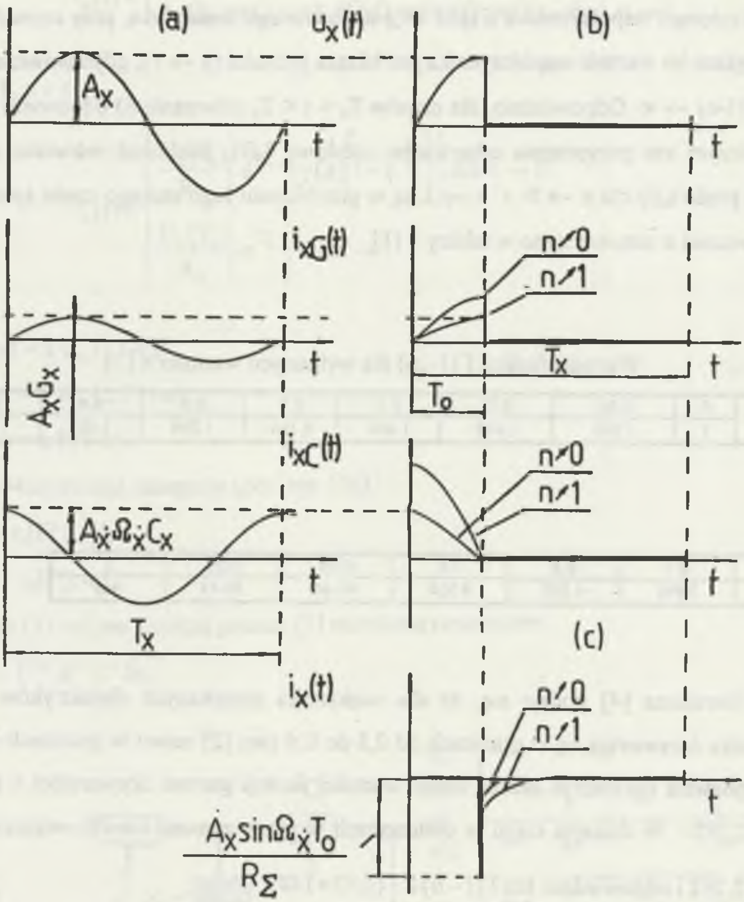
Wartości funkcji $\Gamma(1-n)$ dla wybranych wartości n [1]

n	0	0.01	0.02	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\Gamma(1-\nu)$	1	1.006	1.012	1.069	1.164	1.298	1.489	1.722

cd. tablicy 1

0.6	0.7	0.8	0.9	0.98	0.99	1
2.218	2.992	4.590	9.514	49.44	99.43	$+\infty$

W literaturze [4] podaje się, że dla większości spotykanych dielektryków wartości spółczynnika n zawierają się w granicach od 0,3 do 0,6 (wg [2] nawet w granicach od 0,7 do 0,9), co pozwala ograniczyć zakres zmian wartości funkcji gamma do wartości z przedziału <1,489; 2,292>. W dalszym ciągu w obliczeniach w pracy zamiast $\lim_{n \to 0} \Gamma(1-n)$ przyjmowano $\Gamma(0{,}7) = 2{,}292$ i odpowiednio $\lim_{n \to 1} \Gamma(1-n) \cong \Gamma(0{,}4) = 1489$.



Rys. 3. Odpowiedź prądowa $i_x(t)$ dielektryka z rozróżnieniem skłakdowej czynnej $i_{xG}(t)$ i biernej $i_{xC}(t)$ dla czasów $0 \leq t \leq T_o$; (a) - zasilanie pełnym przebiegiem, (b) - wycinkiem sinusoidy, (c) - odpowiedź prądowa dielektryka dla $T_o < t \leq T_x$

Fig. 3. Current dielectric response $i_x(t)$ with differentiating active $i_{xG}(t)$ and passive $i_{xC}(t)$ components for time interval $0 \leq t \leq T_o$; (a) - supplied voltage is full, (b) - sector of a sine curve, (c) - current dielectric response for time interval $T_o < t \leq T_x$

3. OCENA ODKSZTAŁCENIA PRĄDU PŁYNĄCEGO PRZEZ DIELEKTRYK

Jednym z praktycznych sposobów oceny odkształcenia prądu $i_x(t)$ jest podanie wartości współczynnika k_i określonego stosunkiem [7,9]:

$$\kappa_i(t) = \frac{i_X(t)}{|I_X(t)|}, \tag{8}$$

przy czym $|I_x(t)| = A_x\sqrt{G_x^2 + \Omega_x^2 C_x^2}$ jest amplitudą odpowiedzi prądowej dielektryka $I_x(t)$ dla stanu ustalonego (por. (7)) przy zasilaniu napięciem sinusoidalnym. Przyjęto założenie, że dielektryk reprezentowany jest modelem równolegle połączonych pojemności C_x i przewodności G_x. Znajomość współczynnika $k_i(t)$ pozwala również ocenić udział zjawiska polaryzacji w odpowiedzi prądowej $i_x(t)$ badanego dielektryka. Dlatego też znajomość k_i może służyć do oceny jakości badanego dielektryka, szczególnie w zakresie infraniskich częstotliwości [8]. W naszym przypadku, po uwzględnieniu równań (5), (6), (7) w równaniu (8) otrzymujemy:

dla $0 \le t \le T_o$:

$$\kappa_i(t) = \begin{cases} \sqrt{1 + \dfrac{2aG_xC_x\Gamma(1-n) + a^2\Gamma^2(1-n)}{G_x^2 + \Omega_x^2C_x^2}}\,\sin(\Omega_x t + \alpha), \text{ dla } n \to 0 \\ \sqrt{1 + \dfrac{4a^2\Omega_x^2C_x^2\Gamma^2(1-n)}{G_x^2 + \Omega_x^2C_x^2}}\,\sin(\Omega_x t + \beta), \text{ dla } n \to 1 \end{cases} \tag{9}$$

oraz dla $T_o < t \le T_x$:

$$\kappa_i(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\Omega_x T_o}{R_\Sigma\sqrt{G_x^2 + \Omega_x^2C_x^2}}\left\{ e^{-\frac{t}{\tau_o}} + a\,\Gamma(1-n)\tau_o(1 - e^{-\frac{t}{\tau_o}}) \right\}, \text{ dla } n \to 0 \\ \dfrac{\sin\Omega_x T_o}{R_\Sigma\sqrt{G_x^2 + \Omega_x^2C_x^2}}\; e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ dla } n \to 1 \end{cases} \tag{10}$$

przy czym

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\Omega_x C_x}{G_x + a\,C_x\,\Gamma(1-n)}\right], \text{ dla } \quad n \to 0$$

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\Omega_x C_x(1 + a\,\Gamma(1-n))}{G_x}\right], \text{ dla } \quad n \to 1$$

W dalszym ciągu rozważań wystarczy rozpatrzenie zmian modułów współczynnika k_i, które opisane są równaniami:

dla $0 < t < T_o$:

$$|\kappa_i(t)| = \begin{cases} \sqrt{1+\dfrac{2a\,G_x C_x\,\Gamma(1-n)+a^2\Gamma^2(1-n)}{G_x^2+\Omega_x^2\,C_x^2}}, & \text{dla } n\to 0 \\ \sqrt{1+\dfrac{4a^2\,\Omega_x^2 C_x^2\,\Gamma^2(1-n)}{G_x^2+\Omega_x^2\,C_x^2}}, & \text{dla } n\to 1 \end{cases} \tag{11}$$

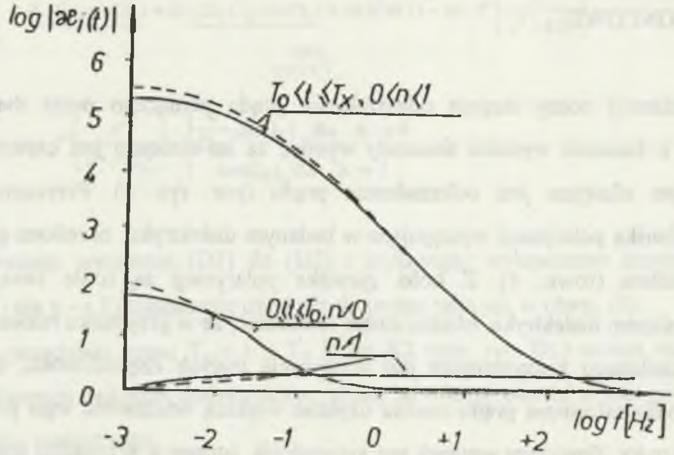
oraz dla $T_o < t \le T_x$:

$$|\kappa_i(t)| = \left\{ \frac{|\sin \Omega x T_o|}{R_\Sigma\sqrt{Gx^2+\Omega x^2 Cx^2}} \right., \quad 0<n<1 \tag{12}$$

Na podstawie zależności (11) i (12) obliczono przebiegi zmian modułu współczynnika $\kappa_i(t)$ w funkcji częstotliwości oraz w funkcji stosunku okresów T_O/T_X, a następnie odpowiednie wyniki przedstawiono wykreślnie na rys. 4 i 5.

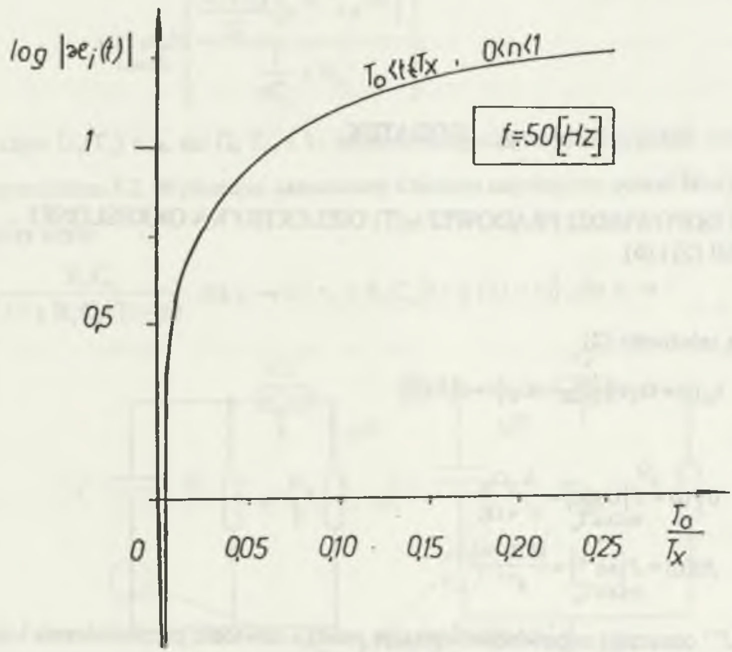
Obliczenia przeprowadzono dla danych: $C_X = 10$ nF, $G_X = 4 \cdot 10^{-10}$ S, a = 1 i $R_\Sigma = 10^4\ \Omega$, przy czym zgodnie z uwagami poczynionymi w p. 2 przyjmowano graniczne wartości współczynnika n równe 0,3 i 0,6. Jak widać z rys. 4, przedstawiającego w skali podwójnie logarytmicznej wykres zmian $|\kappa(\tau)|$ w funkcji częstotliwości f, - odkształcenie prądu i maleje monotonicznie w miarę wzrostu częstotliwości, co oznacza, że dla zakresu infraniskich częstotliwości następuje wzrost udziałów składowych polaryzacyjnych w badanym prądzie dielektryka.

Dlatego do oceny stanu dielektryka, ściśle związanego z występującymi w nim zjawiskami polaryzacji, korzystniejsze jest stosowanie infraniskich częstotliwości. Na rys. 4 linią przerywaną zaznaczono przypadek, gdy wartości parametrów G_x i C_x badanego dielekryka też są funkcjami częstotliwości (tzn. ulegają tzw. dyspersji [8, 10]). Z kolei z rys. 5 wynika, że dla przedziału czasu $T_O < t \le T_X$ wartość $|\kappa(\tau)|$ jest nieliniową unkcją stosunku $\frac{T_O}{T_X}$. Ma to jednak mniejsze znaczenie, gdyż z uwagi na możliwość znacznego skrócenia czasu pomiaru najbardziej interesującym nas przedziałem jest $0 \le t \le T_O$.



Rys. 4. Obliczone przebiegi zmian $|\kappa(\tau)|$ w funkcji częstotliwości f napięcia U_X (t) dla $\frac{T_O}{T_X} = \frac{1}{4}$

Fig. 4. Calculated change runnings $|\kappa(\tau)|$ versus frequency f of voltage U_X (t) dla $\frac{T_O}{T_X} = \frac{1}{4}$



Rys. 5. Obliczony przebieg zmian $|\kappa(\tau)|$ w funkcji czasu trwania T_O impulsu napięcia $U_X(t)$ dla f = 50 Hz i $T_O < t < T_X$

Fig. 5. Calculated change runnings $|\kappa(\tau)|$ versus pulse duration T_O of voltage $U_X(t)$ for f = 50 Hz and $T_O < t < T_X$

4. UWAGI KOŃCOWE

Z przeprowadzonej oceny stopnia odkształcenia prądu płynącego przez dielektryk zasilany napięciem o kształcie wycinka sinusoidy wynika, że im mniejsza jest częstotliwość zmian napięcia, tym silniejsze jest odkształcenie prądu (por. rys. 4). Przyczyną tego odkształcenia są zjawiska polaryzacji występujące w badanym dielektryku, określone prawem Curie von Schweidlera (równ. 4). Z kolei zjawiska polaryzacji są ściśle związane z fizykochemicznym stanem dielektryka. Można zatem stwierdzić, że w przypadku rozważanego kształtu napięcia zasilanego korzystniejsze jest stosowanie małych częstotliwości, bowiem dzięki silniejszym odkształceniom prądu można uzyskać większą wrażliwość tego prądu na zmiany stanu dielektryka. Powyższy wniosek jest szczególnie istotny w przypadku pomiarów przy infraniskich częstotliwościach, gdy zasadniczym celem stosowania napięcia zasilającego o kształcie wycinka sinusoidy jest skrócenie czasu pomiaru. Nie trzeba wtedy obawiać się zmniejszenia wrażliwości tak zasilanego układu pomiarowego na zmiany stanu badanego dielektryka.

DODATEK

OBLICZENIE ODPOWIEDZI PRĄDOWEJ $i_X(T)$ DIELEKTRYKA OKREŚLONEJ RÓWNANIAMI (5) i (6)

Wychodząc z zależności (2):

$$I_X(s) = U_X(s)\left\{G_X + sC_X\left[1 + \mathcal{L}(f(t))\right]\right\}, \tag{D1}$$

gdzie:

$$U_X(s) = \underset{0\le t\le T_0}{\mathcal{L}}\left[U_X(t)\right] = \frac{A_X\Omega_X}{s^2+\Omega_X^2}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \underset{0\le t\le T_0}{\mathcal{L}}\left[a\,t^{-n}\right] = \frac{a\Gamma(1-n)}{s^{1-n}}$$

natomiast $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}^{-1}$ oznaczają odpowiednio operację prostą i odwrotną przekształcenia Laplace'a i wykonując oznaczone działania uzyskuje się:

$$\underset{0\le t\le T_o}{i_X(t)} = \underbrace{A_X G_X \sin\Omega_X t + A_X \Omega_X C_X \cos\Omega_X t}_{\underset{0\le t\le T_o}{I_X(t)}} + A\Omega C a \Gamma(1-n)\cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^n}{s^2+\Omega_X^2}\right] \tag{D2}$$

$$\text{przy czym: } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^n}{s^2+\Omega_X^2}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega_X}\sin\Omega_X t, & \text{dla } n\to 0 \\ \cos\Omega_X t, & \text{dla } n\to 1 \end{cases} \tag{D3}$$

Podstawiając wyrażenie (D3) do (D2) i wykonując wyznaczone działania (oddzielnie dla $n \to 0$ i dla $n \to 1$) ostatecznie uzyskyje się postać taką jak w równ. (5).

Dla przedziału czasu $T_o \le t \le T_X$ klucz K2 (por. rys. D1) zwiera okładki kondensatora wypełnionego badanym dielektrykiem, przez co tworzy obwód o następujących parametrach schematu zastępczego:

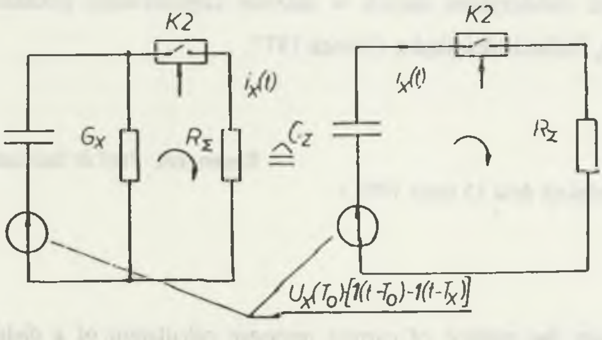
$$R_z = \frac{R_\Sigma}{1+R_\Sigma G_X}, \quad G_z = C_X\left[1+\mathcal{L}(f(t))\right],$$

a stąd: (D4)

$$\underset{T_o\le t\le T_x}{i(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\dfrac{U_x(T_o)}{S}\left(e^{-sT_o}-e^{-sT_x}\right)}{\dfrac{1}{sC_z}+R_z}\right]$$

przy czym $U_x(T_o) = A_x \sin \Omega_x T_o$, a R_Σ oznacza zastępczą rezystancję gałęzi obwodu przy zwartym kluczu K2. Wykonując zaznaczone działania uzyskujemy postać taką jak w równaniu (6), przy czym

$$\tau_o = \frac{R_z C_x}{1+a\,R_z C_x \Gamma(1-n)} \quad \text{dla } n\to 0 \text{ i } \tau_1 = R_z C_x\left[1+a\,\Gamma(1-n)\right], \text{ dla } n\to 1$$



Rys. D1. Schemat zastępczy obwodu z badanym dielektrykiem dla czasów $T_o \le t \le T_x$
Fig. D1. Equivalent scheme with investigated dielectric for time interval $T_o \le t \le T_x$

LITERATURA

[1] Bronsztejn I., Siemiendajev K.: Matematyka. Poradnik encyklopedyczny. PWN, Warszawa 1990.

[2] Das Gupta D.K., Joyner K.: Charge Storage and Depolarization currents in organic polymeric materials. IEE Conference on Dielectric Materials, Measurements and Applications. July, 1975. Cambridge, ss. 56-59.

[3] Ditkine V., Proudnikov A.: Transformations Integrales et Calcul Operationel, Editions Mir. Moscou 1982.

[4] Jonscher A.K.: The Universal Dielectric Response. Nature, 1977, vol. 267, ss. 673-679.

[5] Kojkov S.N., Miezienin O.L.: Analiz charakteristik kondiensatorow pri rozdiejstwi niesinusoidalnogo naprażenija. Elektriczestwo, 1981, Nr 2, ss. 32-38.

[6] Laverick E.: The Use of Special Waveforms in the Study of Linear Dielectric Phenomena. Journal of the British Institution of Radio Engineers, vol XI (New Series), No 3, 1951, ss. 81-92.

[7] Luciński L.: Układy z tyrystorami dwukierunkowymi. WNT, Warszawa 1986.

[8] Szadkowski B.: Metody badania izolacji elektrycznej napięciem o częstotliwości (10^{-5} - 10) Hz. Materiały Konferencji" Urządzenia elektromagnetyczne". Bielsko-Biała, wrzesień 1983.

[9] Tunia H. i in.: Układy energoelektroniczne - obliczanie, modelowanie, projektowanie. WNT, Warszawa 1982.

[10] Zieleźnik L.: Analiza metod pomiaru dyspersyjnych zmian współczynnika stratności i pojemności dielektryków stałych w zakresie częstotliwości podakustycznych. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1977.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Leszek Kiełtyka

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 maja 1993 r.

Abstract

In the paper the method of current response calculation of a dielectric supplied by voltage $u_x(t) = A_x \cdot \sin\Omega_x t \cdot [\,1(t) - 1(t - T_o)]$ in changes interval $0 \le T_o \le T_x$ o is presented. Using the operator method the dependencies of moment values of the current flowing through the

dielectric have been calculated assuming that the dielectric polarization response at the voltage pulse can be described by Cursie-von Schweidler's Law. The supply voltage parameter influence onthe deformation of current flowing through the dielectric is analysed. An evaluation of current's deformation is proposed by means of coefficient $\kappa_i(t)$ (see Eq. (16)), which is the ratio of deformed $I_x(t)$ to steady current I_{xo}, when the supply voltage is full sine curve.