

Zofia CICHOWSKA

ZASTOSOWANIE MODELI ZE ŹRÓDŁAMI STEROWANYMI CEWEK SPRZĘŻONYCH MAGNETYCZNIE W TOPOLOGICZNEJ ANALIZIE OBWODÓW SLS

Streszczenie. Analiza dotyczy obwodu stacjonarnego liniowego ze sprzężeniami magnetycznymi przy wymuszeniach sinusoidalnych, w stanie ustalonym. Wprowadzenie odpowiednich modeli czwórnikowych ze źródłami sterowanymi dla każdej pary cewek sprzężonych pozwala opisać obwód w oparciu o diagonalne macierze: impedancji w metodzie prądów strun i admitancji w metodzie napięć konarowych.

MODELS WITH CONTROL SOURCES FOR MAGNETICALLY COUPLED COILS APPLIED TO TOPOLOGICAL ANALYSIS OF LINEAR CIRCUITS

Summary. Linear time - invariant circuits with magnetical couplings are analyzed. Respective four terminal network models are introduced, containing control sources for each pair of coupled coils and enabling description of the circuit basing on diagonal matrices: impedance ones in the method of choral current and admittance ones in the method of branche voltage.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ МАГНИТНО СОПРЯЖЕННЫХ КАТУШЕК С УПРАВЛЯЕМЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ (СЛС) ЦЕПЕЙ

Резюме. В работе анализируется установленный режим стационарных линейных цепей с магнитными сопряжениями в случае синусоидального входного воздействия. Соответствующие четырехполюсные модели с управляемыми источниками для каждой пары сопряженных катушек позволяют описать цепь опираясь на диагональные матрицы: импеданса в методе струнных токов и адмитанса в методе ветвевых напряжений.

1. WPROWADZENIE

Przedmiotem rozważań jest stan ustalony w obwodzie SLS przy wymuszeniach sinusoidalnych o wspólnej częstotliwości źródeł zasilających. O obwodzie zakładamy ponadto:

- graf obwodu jest mocno spójny (planarny lub nieplanarny),
- każdy element (aktywny lub pasywny) stanowi odrębną gałąź obwodu (grafu), z czego wynika liczba węzłów w i gałęzi g ,
- orientację gałęzi w grafie wyznacza prąd tej gałęzi; napięcia wszystkich gałęzi są zastrzałkowane przeciwko prądom (rys. 1a),
- źródła sterowane są sterowane prądami i napięciami gałęzi pasywnych,
- obwód jest niesprzeczny, czyli istnieje drzewo grafu spełniające warunek konieczny rozwiązalności obwodu oraz jest spełniony warunek wystarczający zależny od wartości liczbowych współczynników sterowania źródeł sterowanych.

W klasycznym podejściu przy analizie topologicznej każda para cewek sprzężonych stanowi dwie gałęzie grafu (rys. 1b) i jest opisana równaniami o niediagonalnej macierzy impedancji lub admitancji. Znaki impedancji (admitancji) sprzężeń zależą od ostrzałkowania prądów w cewkach względem jednoimiennych zacisków. Rozpatrzmy więc osobno każdy z obydwu przypadków ostrzałkowania prądów.

a) prądy ostrzałkowane jednakowo względem jednoimiennych zacisków (rys. 1b). Równania impedancyjne mają postać:

$$\begin{bmatrix} U_k \\ U_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_k & Z_{kj} \\ Z_{kj} & Z_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k \\ I_j \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdzie:

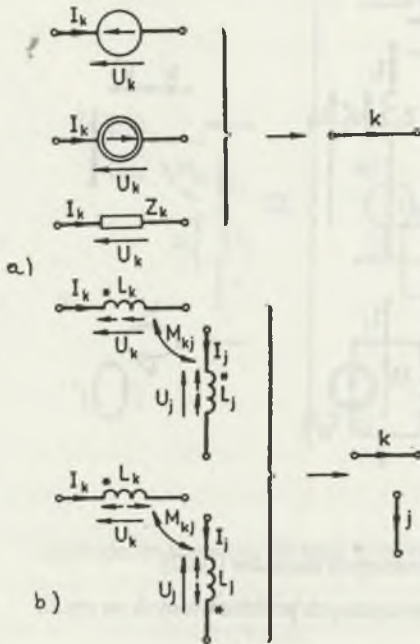
$$Z_k = j\omega L_k, \quad Z_j = j\omega L_j, \quad Z_{kj} = j\omega M_{kj} \quad (2)$$

Jeżeli jest spełniony warunek

$$L_k L_j > M_{kj}^2, \quad (3)$$

to równania (1) można przekształcić do postaci równań admitancyjnych:

$$\begin{bmatrix} I_k \\ I_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_k & -Y_{kj} \\ -Y_{kj} & Y_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k \\ U_j \end{bmatrix}, \quad (4)$$



Rys. 1

niediagonalne podmacierze do macierzy impedancji \mathbf{Z}_{33} czy macierzy admittancji \mathbf{Y}_{33} obwodu.

2. MODELE CZWÓRNIKOWE CEWEK SPRZEŻONYCH

Równaniom impedancyjnym i admittancyjnym opisującym parę cewek sprzężonych można przypisać schematy zastępcze ze źródłami sterowanymi*. Są to schematy bezpośrednie, w których każdemu składnikowi równania odpowiada jeden element schematu. Zwroty sił elektromotorycznych i wydajności prądowych w schematach zależą od ostrzałkowania prądów względem jednoimiennych zacisków.

gdzie:

$$Y_k = \frac{Z_j}{Z_k Z_j - Z_{kj}^2}, \quad Y_j = \frac{Z_k}{Z_k Z_j - Z_{kj}^2}, \quad (5)$$

$$Y_{kj} = \frac{Z_{kj}}{Z_k Z_j - Z_{kj}^2}.$$

b) prądy ostrzałkowane niejednakowo względem jednoimiennych zacisków (rys. 1c).

Odpowiednie równania mają postać:

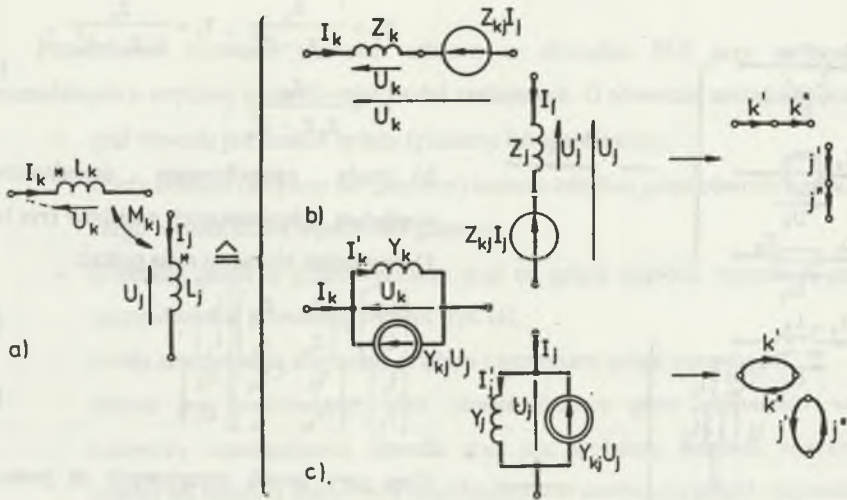
$$\begin{bmatrix} U_k \\ U_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_k & Z_{kj} \\ Z_{kj} & Z_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k \\ I_j \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} I_k \\ I_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_k & -Y_{kj} \\ -Y_{kj} & Y_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k \\ U_j \end{bmatrix} \quad (7)$$

Opis pary cewek sprzężonych za pomocą równań impedancyjnych (1) lub (6) występuje w metodzie oczkowej (metoda prądów strun), opis za pomocą równań admittancyjnych (4) lub (7) - w metodzie węzłowej (metoda napięć konarowych).

Cewki sprzężone wprowadzają więc

* Bezpośrednie schematy zastępcze istnieją również dla postaci H i G równań czwórnikowych układu cewek sprzężonych [2].



Rys.2

a) prądy ostrzałkowane jednakowo względem jednoimiennych zacisków (rys.2).

Rozpisane równania (1) opisujące parę cewek sprzężonych przedstawionych na rys.2a mają postać:

$$\begin{aligned} U_k &= Z_k I_k + Z_{kj} I_j \\ U_j &= Z_j I_j + Z_{kj} I_k \end{aligned} \quad (8)$$

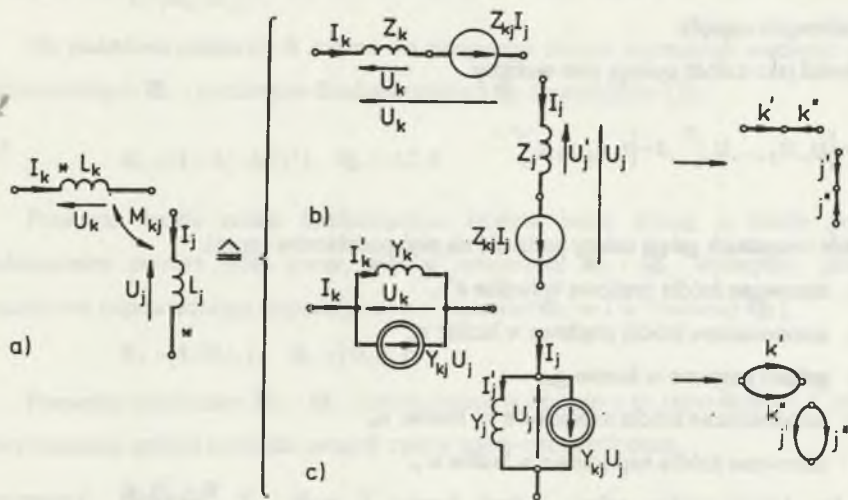
Równaniom (8) odpowiada schemat bezpośredni z napięciowymi źródłami sterowanymi pokazany na rys.2b, a w związku z tym w grafie występują cztery gałęzie (po dwie połączone szeregowo). Gałęzie $k'j'$ reprezentują impedancje Z_k, Z_j , natomiast gałęzie $k''j''$ - napięciowe źródła sterowane.

Rozpisane równania (4) opisujące tę samą parę cewek sprzężonych mają postać:

$$\begin{aligned} I_k &= Y_k U_k + Y_{kj} U_j \\ I_j &= Y_j U_j + Y_{kj} U_k \end{aligned} \quad (9)$$

Równaniom (9) odpowiada schemat bezpośredni z prądowymi źródłami sterowanymi pokazany na rys.2c, a w związku z tym w grafie występują cztery gałęzie (po dwie połączone równolegle). Gałęzie $k'j'$ reprezentują admitancje Y_k, Y_j , natomiast gałęzie $k''j''$ - prądowe źródła sterowane.

b) prądy ostrzałkowane niejednakowo względem jednoimiennych zacisków (rys.3).



Rys.3

Analizyczne równania dla tego przypadku mają postać:

$$U_k = Z_k I_k \mp Z_{kj} I_j, \quad (10)$$

$$U_j = Z_j I_j \mp Z_{jk} I_k, \quad (10)$$

$$I_k = Y_k U_k + Y_{kj} U_j, \quad (11)$$

$$I_j = Y_j U_j + Y_{jk} U_k, \quad (11)$$

a odpowiadające im schematy bezpośrednie i gałęzie grafu są przedstawione na rys.3b i c.

Wprowadzenie w miejsce sprzężeń źródeł sterowanych zwiększa liczbę gałęzi w grafie, ale macierze impedancji i admitancji obwodu stają się diagonalne. Każda para cewek sprzężonych wprowadza do analizy dwie dodatkowe gałęzie,* a przy schematach impedancyjnych również dwa dodatkowe węzły.

3. RÓWNANIA WYJŚCIOWE METODY OCZKOWEJ I WĘZŁOWEJ

Zakładamy, że obwód (i graf) zawiera w węzłów i g gałęzi łącznie z gałęziami i węzłami dodatkowymi, które pojawiły się w związku z wprowadzeniem źródeł sterowanych reprezentujących sprzężenia.

* Trzy cewki sprzężone między sobą tworzą trzy pary cewek sprzężonych i wprowadzają w sumie sześć dodatkowych gałęzi.

Analiza obwodu wymaga wyznaczenia $2g$ niewiadomych (g niewiadomych prądów i g niewiadomych napięć).

Obwód jako całość opisują dwa wektory:

$$\mathbf{U} = [U_1, U_2, \dots, U_g]^T, \mathbf{I} = [I_1, I_2, \dots, I_g]^T \quad (12)$$

Zbiór wszystkich gałęzi należy podzielić na pięć podzbiorów (grup):

- 1) sterowane źródła prądowe w liczbie n'_j ,*
- 2) autonomiczne źródła prądowe w liczbie n_j ,
- 3) gałęzie pasywne w liczbie g_p ,
- 4) autonomiczne źródła napięciowe w liczbie n_e ,
- 5) sterowane źródła napięciowe w liczbie n'_e .†

Do dalszej analizy należy wybrać drzewo T grafu. Z warunku koniecznego rozwiązalności obwodu wynika, że grupy czwarta i piąta w całości wchodzi w skład drzewa, stanowiąc konary aktywne, a grupy pierwsza i druga w całości wchodzi w skład dopełnienia stanowiąc struny aktywne. W obrębie grupy trzeciej przebiega podział na struny i konary. Część gałęzi grupy trzeciej stanowią struny pasywne, a część konary pasywne ($g_p = g_{sp} + g_{kp}$).

Liczba wszystkich konarów grafu wynosi $w-1$, a liczba strun $g-w+1$, więc

$$g_{kp} + n_e + n'_e = w - 1, \quad (13)$$

$$g_{sp} + n_j + n'_j = g - w + 1 \quad (14)$$

Wyboru drzewa można dokonać [1,6] badając wyznacznik kwadratowej podmacierzy \mathbf{A}' stopnia $w-1$ macierzy incydencji \mathbf{A} . Pierwsza kombinacja gałęzi pasywnych w liczbie $g_{kp} = w - 1 - n_e - n'_e$ i wszystkich gałęzi grup czwartej i piątej, spełniająca warunek $\det \mathbf{A}' = \pm 1$ spełnia równanie $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_T$, czyli tworzy drzewo. Wybór drzewa pozwala po wprowadzeniu numeracji gałęzi (najpierw struny- podmacierz \mathbf{A}_L , potem konary - podmacierz \mathbf{A}_T) przedstawić macierz incydencji w postaci:

* W celu łatwego porównania rezultatów prezentowanej analizy z podejściem klasycznym (przy niediagonalnych macierzach \mathbf{Z}_{33} , \mathbf{Y}_{33}) prądowym źródłem sterowanym pochodzącym ze sprzężeń nadaje się najniższe numery gałęzi, a dopiero następane numery przyporządkowuje się zwykłym prądowym źródłem sterowanym.

† z powodów podanych w przypisie * napięciowym źródłem sterowanym pochodzącym ze sprzężeń nadaje się najwyższe numery gałęzi po wcześniejszym ponumerowaniu zwykłych napięciowych źródeł sterowanych.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_L : \mathbf{A}_T] \quad (15)$$

Na podstawie macierzy \mathbf{A} można dla przyjętego drzewa wyznaczyć macierze: oczek fundamentalnych \mathbf{B}_f i przekrojów fundamentalnych \mathbf{Q}_f ze związków [3]:

$$\mathbf{B}_f = [\mathbf{1} : -\mathbf{A}_L^T (\mathbf{A}_T^{-1})^T], \quad \mathbf{Q}_f = \mathbf{A}_T^{-1} \mathbf{A} \quad (16)$$

Ponieważ każde oczko fundamentalne zawiera jedną strunę, a każdy przekrój fundamentalny zawiera jeden konar, więc w macierzach \mathbf{B}_f i \mathbf{Q}_f występują macierze jednostkowe odpowiedniego stopnia ($g-w+1$ w macierzy \mathbf{B}_f , $w-1$ w macierzy \mathbf{Q}_f),

$$\mathbf{B}_f = [\mathbf{1} : \mathbf{B}_{n2}], \quad \mathbf{Q}_f = [\mathbf{Q}_{n1} : \mathbf{1}] \quad (17)$$

Pomiędzy macierzami \mathbf{B}_f i \mathbf{Q}_f (utworzonymi w oparciu o to samo drzewo i przy tej samej numeracji gałęzi) zachodzi związek zwany quasi-ortogonalnością

$$\mathbf{Q}_f \mathbf{B}_f^T = \mathbf{0} \quad (18)$$

i wynikający z niego związek między podmacierzami \mathbf{Q}_{n1} i \mathbf{B}_{n2} odpowiadającymi strunom i konarom grafu

$$\mathbf{Q}_{n1} = -\mathbf{B}_{n2}^T \quad (19)$$

Oznaczając indeksami od 1 do 5 podmacierze napięć i prądów odpowiadające poszczególnym grupom gałęzi oraz indeksami s i k wielkości dotyczące strun i konarów można wektory napięć i prądów obwodu przedstawić w postaci:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \\ \mathbf{U}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \text{---} \\ \mathbf{U}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_{sp} \\ \mathbf{U}_k \\ \mathbf{U}_4 \\ \mathbf{U}_5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \text{---} \\ \mathbf{I}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_{sp} \\ \mathbf{I}_k \\ \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_5 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Przy użyciu macierzy \mathbf{B}_f i \mathbf{Q}_f można zapisać obydwa prawa Kirchhoffa od razu dla całego obwodu w postaci:

$$\mathbf{Q}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 1 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 1 \\ \hline & \text{struny} & & \text{konary} & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (21)$$

$$\mathbf{B}_f \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} \\ 0 & 1 & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} \\ 0 & 0 & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} \\ \hline & \text{struny} & & \text{konary} & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (22)$$

Wykorzystując podział (20) na struny i konary prawa Kirchhoffa można przekształcić do postaci:

$$\mathbf{I}_k = -\mathbf{Q}_{f1} \mathbf{I}_s, \quad \mathbf{U}_s = -\mathbf{B}_{f12} \mathbf{U}_k \quad (23)$$

lub do postaci transformacji oczkowej i przekrojowej

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_f^T \mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_{13}^T & \mathbf{B}_{23}^T & \mathbf{B}_{33}^T \\ \mathbf{B}_{14}^T & \mathbf{B}_{24}^T & \mathbf{B}_{34}^T \\ \mathbf{B}_{15}^T & \mathbf{B}_{25}^T & \mathbf{B}_{35}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_{kp} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_f^T \mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} Q_{11}^T & Q_{21}^T & Q_{31}^T \\ Q_{12}^T & Q_{22}^T & Q_{32}^T \\ Q_{13}^T & Q_{23}^T & Q_{33}^T \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{kp} \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Wzory (24) i (25) stanowią podstawę zmniejszenia liczby niewiadomych w metodach prądów strun i napięć konarowych. Równania opisujące prawa Kirchhoffa i transformacje wynikają z topologii obwodu. Do wyprowadzenia metod obliczeniowych potrzebne są jeszcze równania wyrażające prawo Ohma dla całego obwodu. Prawo to można rozpatrywać od razu w dwóch postaciach - A oraz B_p przydatnych w poszczególnych metodach. Dla metody prądów strun ma ono postać A:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \\ \mathbf{U}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_z \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{53} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_5 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

natomiast dla metody napięć konarowych postać B:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{U}_4 \\ \mathbf{U}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_z \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{53} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_5 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Przy prezentowanym podejściu macierze \mathbf{Z}_{33} i \mathbf{Y}_{33} są diagonalne, natomiast w macierzy \mathbf{K}_{53} występują również wyrażenia typu Z_{kj} reprezentujące napięciowe źródła sterowane pochodzące ze sprzężeń, a w macierzy \mathbf{H}_{13} również wyrażenia typu Y_{kj} reprezentujące prądowe źródła sterowane pochodzące ze sprzężeń.

4. METODA PRĄDÓW STRUN I METODA NAPIĘĆ KONAROWYCH

Wychodząc z II prawa Kirchhoffa (22), transformacji oczkowej (24) i postaci A prawa Ohma (26) otrzymuje się równania metody prądów strun o $n'_j + g_{ap}$ niewiadomych w postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{K}_{13} \mathbf{B}_{13}^T \\ \mathbf{B}_{33} \mathbf{Z}_{33} \mathbf{B}_{13}^T + \mathbf{B}_{33} \mathbf{K}_{53} \mathbf{B}_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{13} \mathbf{B}_{33}^T \\ \mathbf{B}_{33} \mathbf{Z}_{33} \mathbf{B}_{33}^T + \mathbf{B}_{35} \mathbf{K}_{53} \mathbf{B}_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_{4p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{13} \mathbf{B}_{23} \mathbf{I}_z \\ -\mathbf{B}_{34} \mathbf{E} - (\mathbf{B}_{33} \mathbf{Z}_{33} \mathbf{B}_{23}^T + \mathbf{K}_{53} \mathbf{B}_{23}^T) \mathbf{I}_z \end{bmatrix} \quad (28)$$

Wychodząc z I prawa Kirchhoffa (21), transformacji przekrojowej (25) i postaci B prawa Ohma (27) otrzymuje się równania metody napięć konarowych o $g_{kp} + n'_e$ niewiadomych w postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} \mathbf{H}_{13} \mathbf{Q}_{13}^T + \mathbf{Q}_{11} \mathbf{Y}_{33} \mathbf{Q}_{13}^T \\ -\mathbf{H}_{53} \mathbf{Q}_{13}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} \mathbf{H}_{13} \mathbf{Q}_{13}^T + \mathbf{Q}_{11} \mathbf{Y}_{33} \mathbf{Q}_{13}^T \\ \mathbf{I} - \mathbf{H}_{53} \mathbf{Q}_{23}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_{4p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{Q}_{11} \mathbf{H}_{13} \mathbf{Q}_{23}^T + \mathbf{Q}_{13} \mathbf{Y}_{33} \mathbf{Q}_{23}^T) \mathbf{E} - \mathbf{Q}_{12} \mathbf{I}_z \\ \mathbf{H}_{53} \mathbf{Q}_{23}^T \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (29)$$

5. PRZYKŁADY

Przykład 1

Należy przeprowadzić analizę obwodu pokazanego na rys.4a metodą prądów strun [3]. Na rys.4b przedstawiono obwód z wprowadzonymi napięciowymi źródłami sterowanymi U_1, U_2 , których zwrot wynika z jednakowego ostrzaikowania prądów I_1, I_2 względem jednoimiennych zacisków (rys.4a). Na rys.4c przedstawiono graf obwodu, na którym zaznaczono wybrane drzewo przez pogrubienie konarów i zaznaczono orientację oczek fundamentalnych.

Macierz oczek fundamentalnych ma postać :

$$\mathbf{B}_f = \begin{array}{cccccccccccc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} = \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{13} & \mathbf{B}_{14} & \mathbf{B}_{15} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{B}_{23} & \mathbf{B}_{24} & \mathbf{B}_{25} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{33} & \mathbf{B}_{34} & \mathbf{B}_{35} \end{array} \end{array}$$

1 2 3 4 5

struny konary

Wektory prądów i napięć poszczególnych grup gałęzi mają postać:

$$\mathbf{I}_1 = [I_1], \quad \mathbf{U}_1 = [U_1],$$

$$\mathbf{I}_2 = [I_2] = \mathbf{I}_2 = [I_{22}], \quad \mathbf{U}_2 = [U_2],$$

$$\mathbf{I}_3 = [I_3, I_4, I_5, I_6, I_7]^T, \quad \mathbf{U}_3 = [U_3, U_4, U_5, U_6, U_7]^T,$$

$$\mathbf{I}_4 = [I_8], \quad \mathbf{U}_4 = [U_8] = \mathbf{E} = [E_8],$$

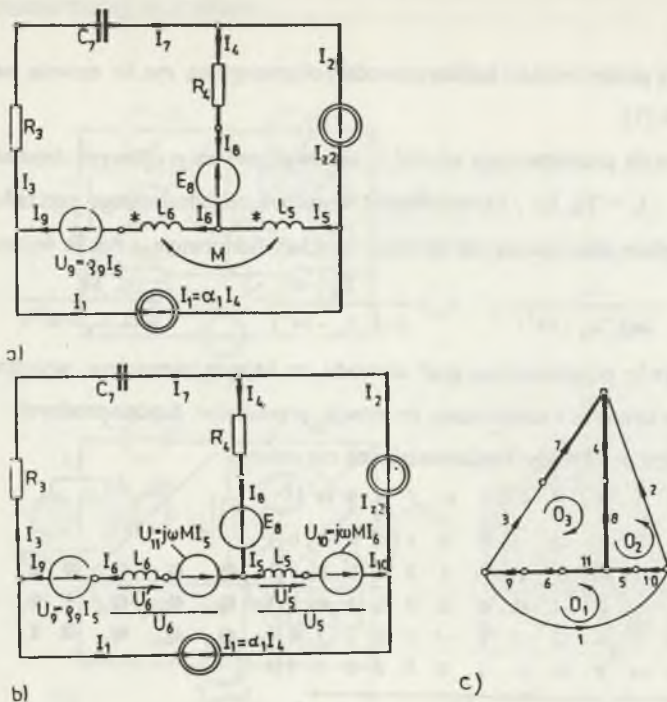
$$\mathbf{I}_5 = [I_9, I_{10}, I_{11}]^T, \quad \mathbf{U}_5 = [U_9, U_{10}, U_{11}]^T$$

Wektor niewiadomych:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

Macierz impedancji (diagonalna):

$$\mathbf{Z}_{33} = \begin{bmatrix} R_3 & & & & & & & 0 \\ & R_4 & & & & & & \\ & & j\omega L_5 & & & & & \\ & & & j\omega L_6 & & & & \\ 0 & & & & & & 1 & \\ & & & & & & j\omega C_7 & \end{bmatrix}$$



Rys.4

Macierze sterowania źródeł sterowanych:

$$\mathbf{K}_{13} = [0, \alpha_1, 0, 0, 0], \quad \mathbf{K}_{53} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega M & 0 \\ 0 & 0 & j\omega M & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Po wyznaczeniu wyrażen pomocniczych występujących we wzorze (28) równania obwodu ułożone metodą prądów strun przybierają postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ j(\omega L_6 + \omega M) + \rho_9 & R_3 + R_4 + j(\omega L_6 - \frac{1}{\omega C_7}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 I_{22} \\ E_8 - (R_4 - j\omega M - \rho_9) I_{22} \end{bmatrix}$$

W końcowym fragmencie rozwiązania po wyznaczeniu całego rozptylu prądów należy pominąć prądy I_{10}, I_{11} (równe prądom I_5, I_6) oraz pominąć napięcia U_{10}, U_{11} , wprowadzając właściwe napięcia na cewkach.

$$U_5 = U_3 + U_{10}, \quad U_6 = U_8 + U_{11}$$

Przykład 2

Należy przeprowadzić analizę obwodu pokazanego na rys.5a metodą napięć konarowych [3].

Na rys.5b przedstawiono obwód z wprowadzonymi prądowymi źródłami sterowanymi $I_b = Y_M U_5$, $I_a = Y_M U_7$, których zwrot wynika z niejednakowego ostrzałkowania prądów I_5 , I_7 względem jednoimiennych zaciśków (rys.5a). Admitancje z rys.5b wynoszą:

$$Y_8 = \frac{L_1}{j\omega(L_1 L_8 - M^2)} \quad , \quad Y_1 = \frac{L_9}{j\omega(L_1 L_8 - M^2)} \quad , \quad Y_M = \frac{M}{j\omega(L_1 L_8 - M^2)}$$

Na rys.5c przedstawiono graf obwodu, na którym zaznaczono wybrane drzewo przez pogrubienie konarów i zaznaczono orientację przekrojów fundamentalnych.

Macierz przekrojów fundamentalnych ma postać:

a	b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$\mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$													
$= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_{31} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{Q}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$													

Wektory prądów i napięć poszczególnych grup gałęzi mają postać:

$$\mathbf{I}_1 = [I_a, I_b, I_1]^T, \quad \mathbf{U}_1 = [U_a, U_b, U_1]^T,$$

$$\mathbf{I}_2 = [I_2, I_3]^T = \mathbf{I}_2 = [I_{24}, I_{25}]^T, \quad \mathbf{U}_2 = [U_2, U_3]^T,$$

$$\mathbf{I}_3 = [I_4, I_5, I_6, I_7, I_8]^T, \quad \mathbf{U}_3 = [U_4, U_5, U_6, U_7, U_8]^T,$$

$$\mathbf{I}_4 = [I_9, I_{10}]^T, \quad \mathbf{U}_4 = [U_9, U_{10}]^T = \mathbf{E} = [E_1, E_2]^T,$$

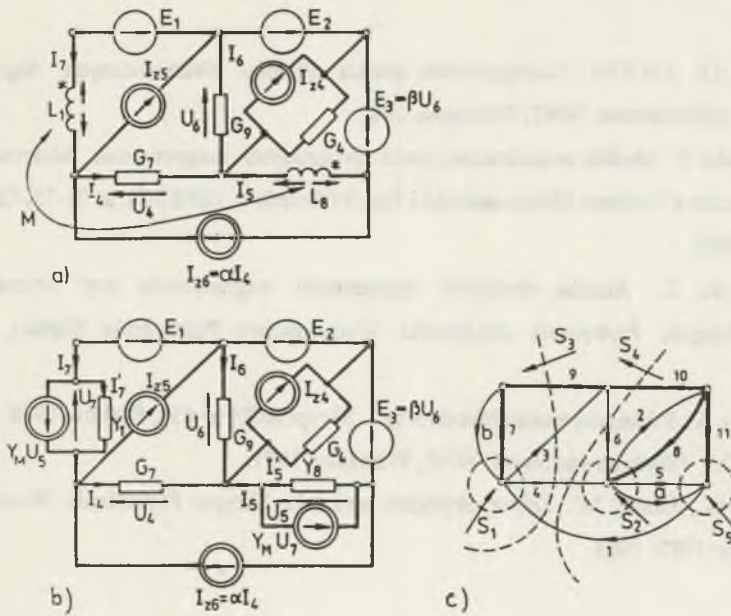
$$\mathbf{I}_5 = [I_{11}], \quad \mathbf{U}_5 = [U_{11}].$$

Wektor niewiadomych:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{kp} \\ \mathbf{U}_5 \end{bmatrix} = [U_7, U_8, U_{11}]^T$$

Macierz admittancej (diagonalna):u o

$$\mathbf{Y}_{33} = \begin{bmatrix} G_7 & & & & & & 0 \\ & Y_8 & & & & & \\ & & G_9 & & & & \\ & & & Y_1 & & & \\ & & & & G_4 & & \\ & 0 & & & & & \end{bmatrix}$$



Rys.5

Macierze sterowania źródeł sterowanych:

$$\mathbf{H}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & Y_M & 0 \\ 0 & Y_M & 0 & 0 & 0 \\ \alpha G_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Po wyznaczeniu wyrażeń pomocniczych występujących we wzorze (29) równania obwodu ułożone metodą napięć konarowych przybierają postać:

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha)G_7 + Y_1, & (\alpha-1)G_7 - Y_M, & Y_M \\ -G_7 - Y_M, & G_7 + Y_8 + G_9 + G_4, & -Y_8 \\ 0, & -\beta, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_7 \\ U_8 \\ U_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha-1)G_7(E_1 + E_2) + I_{25} \\ G_7 E_1 + (G_7 + G_9)E_2 + I_{24} \\ -\beta E_2 \end{bmatrix}$$

W końcowym fragmencie rozwiązania po wyznaczeniu całego rozkładu napięć należy pominąć napięcia U_a, U_b (rowne napięciom U_5, U_7) oraz pominąć prądy I_a, I_b wprowadzając właściwe prądy cewek

$$I_3 = I'_3 + I_a, \quad I_7 = I'_7 + I_b.$$

LITERATURA

- [1] Chua L.O., Lin.P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. Algorytmy i metody obliczeniowe. WNT, Warszawa 1981.
- [2] Cichowska Z.: Modele bezpośrednie cewek sprzężonych magnetycznie. Materiały XV Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów (SPETO), ss.71-75, Gliwice-Wisła 1992.
- [3] Cichowska Z.: Analiza obwodów sprzężonych magnetycznie przy wymuszeniach sinusoidalnych. Podręcznik akademicki. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1992.
- [4] Juszczak A.: Równania teorii obwodów cz.I. Skrypt AGH nr 656, Kraków 1978.
- [5] Rajski Cz.: Teoria obwodów t.I. WNT, Warszawa 1971.
- [6] Wolski W., Uruski M.: Teoria obwodów cz.I i II. Skrypty Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1982, 1983.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Jan Chojcan

Wpłynęło do Redakcji dnia 10.maja 1993r.

Abstract

Form terminal networks with control sources (fig.2, fig.3) of the coupled magnetical couplings result from equations (8), (9) while currents have been equidirectional arrowed with respect to unname clamps and from equations (10), (11) in the oposite case. These models enable to derive choral current method (formula 28) and branch voltage method (formula 29) using diagonal impedance or admittance matrices. Magnetics couplings of coils are taken in to account in the respective groups of control sources. Examples are given to illustrate the considerations. The lowest numbers have been given to the branches with current control sources resulting from the couplings while the highest ones are prescribed to the voltage control sources resulting from the couplings. It enables to compare the results with the analysis for nondiagonal matrices Z_{33} and Y_{33}