ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: ELEKTRYKA z. 136 Nr kol. 1252

Józef PARCHAŃSKI

POMIARY NAPRĘŻENIA METODĄ ANALIZY CZĘSTOTLIWOŚCI DRGAŃ SWOBODNYCH

Streszczenie. Przeprowadzone badania wykazały jednoznaczną zależność częstotliwości poprzecznych drgań swobodnych smukłych elementów sprężystych od naprężenia osiowego. Dobra powtarzalność wyników pomiarów i duża czułość badanego modelu rokują nadzieję na opracowanie nowego typu przetwornika do nieniszczących pomiarów naprężenia w obiektach smukłych (np. szynach kolejowych).

STRESS MEASUREMENTS BY MEANS OF FREE VIBRATION FREQUENCY ANALYSIS

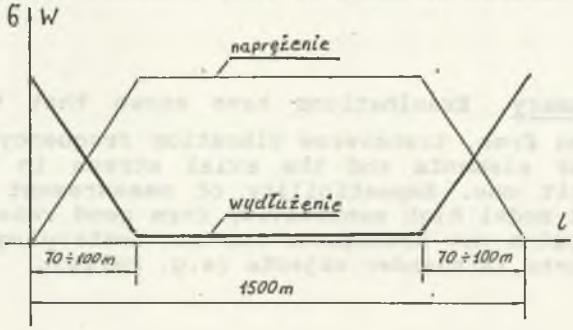
Summary. Examinations have shown that the relation between free, transverse vibration frequency of elastic, slender elements and the axial stress in them is an explicit one. Repeatibility of measurement results and tested model high sensitivity form good reasons for working out a new transducer for non-destroying stress measurements in slender objects (e.g. rails).

ИЗМЕРЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ МЕТОДОМ АНАЛИЗА ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Резюме. Проводимые исследования доказали однозначную зависимость поперечных свободных колебаний гибких упругих элементов от осевого напряжения. Хорошая повторяемость результатов измерений и большая чувствительность испытаемой модели подают надежды на разработку нового типа преобразователя для неразрушающих измерений напряжения в гибких объектах, например в железнодорожных рельсах.

1. WPROWADZENIE

Nieniszczące pomiary naprężenia osiowego (lub siły osiowej) mają istotne znaczenie np. dla bezpiecznej eksploatacji bezstykowego toru kolejowego [1]. W torze bezstykowym odcinki szyn o długości ok. 1500 m są przymocowane do podkładów. Odległość między osiami podkładów wynosi 0,66 m. Podkłady są ułożone na podsypce. Przemieszczać mogą się jedynie krańce odcinków szyn na odległości do ok. 100 m (rys.1). Zimą w niskiej temperaturze, w środkowej części odcinków szyn na długości ok. 1300 m, występują termiczne siły rozciągające o wartościach ponad 700 kN (naprężenia ponad 110 MPa). W niekorzystnych warunkach może wystąpić pęknięcie szyny. Latem podczas upałów występują duże termiczne siły ściskające, które w niekorzystnych warunkach mogą spowodować wyboczenie toru i wykolejenie pociągu.



Rys.1. Modelowe przemieszczenie W i naprężenia σ szyny toru bezstykowego

Fig.1. Model displacement W and stress σ of a contactless track rail

Naprężenie termiczne charakteryzuje sie tym, że niezależnie od jego wartości i znaku, w środkowej części odcinka szyny nie powoduje odkształcenia (wydłużenia ani skrócenia szyny).

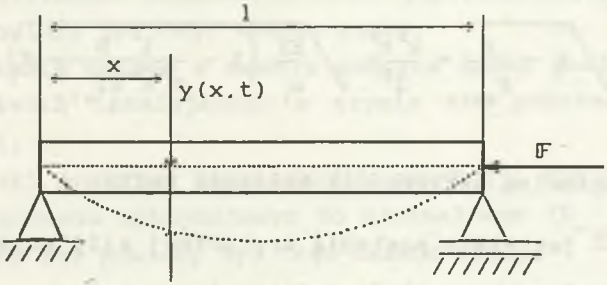
Do pomiarów siły osiowej (naprężenia osiowego) w szynach kolejowych stosowano wiele metod, np.: tensometryczną, magneto-

sprężystą, magnetyczną z wykorzystaniem zmiany szerokości pętli histerezy, ultradźwiękową [2]. Wszystkie te metody mają określone wady, jak np.: mierzą zmianę naprężenia, a nie naprężenie bezwzględne, mają małą dokładność pomiarów lub skomplikowany układ pomiarowy.

W artykule przedstawiono wyniki badań nowego typu przetwornika do pomiarów naprężenia osiowego, metodą analizy częstotliwości drgań własnych poprzecznych badanego obiektu.

2. MATEMATYCZNY MODEL DRGAŃ SWOBODNYCH ELEMENTU BADANEGO

Szyna kolejowa przymocowana do podkładów jest układem mechanicznym o nieskończenie wielu stopniach swobody. Matematyczny model drgań poprzecznych szyny, uwzględniający działanie siły osiowej, oddziaływanie podkładów i drugiej szyny, oddziaływanie sprężystości i tłumienia podtorza, jest tak bardzo złożony, że dotychczas nie został opracowany. Przeanalizowano jedynie model drgań poprzecznych dwuprzegubowej belki, ściskanej osiowo siłą F. Mając świadomość tego, że wyniki teoretycznej analizy częstotliwości drgań szyny zamocowanej do podkładów będą znacznie różnić się od częstotliwości drgań belki dwuprzegubowej, wykorzystano wzory wyprowadzone w pracy [3] do zaprojektowania fizycznego modelu odcinka szyny.



Rys.2. Belka dwuprzegubowa ściskana siłą osiową F
Fig.2. Beam with two joints compressed with axial force F

Poprzeczne drgania belki zamocowanej dwuprzegubowo (rys.2), której prawy ruchomy kraniec jest ściskany siłą osiową F, określa równanie różniczkowe [3]

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + m_1 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

gdzie EI jest sztywnością zginania belki, m_1 jest masą belki odniesioną do jednostki długości, y(x,t) jest poprzecznym przemieszczeniem belki w położeniu x, w czasie t.

Jeżeli nie działa siła osiowa (F = 0), to drgania swobodne belki opisuje równanie

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \tag{2}$$

Z równania (2) obliczono pulsację k-tej postaci poprzecznych drgań swobodnych belki nie naprężonej

$$\omega_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_1}}, \tag{3}$$

gdzie l jest długością belki o stałym poprzecznym przekroju S.

Pulsacja k-tej postaci poprzecznych drgań belki ściskowej siłą $F < F_{kr}$ określa wzór

$$\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{F}{F_{kr}}} = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_1} \left(1 - \frac{l^2 S}{\pi^2 k^2 EI_{min}} \sigma\right)}, \tag{4}$$

gdzie:

EI_{min} jest minimalną sztywnością zginania belki,

$F_{kr} = \frac{\pi^2 k^2 EI_{min}}{l^2}$ jest k-tą postacią krytycznej siły Eulera,

$\sigma = F/S$ jest osiowym naprężeniem ściskającym belkę.

Częstotliwość k-tej postaci poprzecznych drgań swobodnych belki w płaszczyźnie najmniejszej sztywności wynosi

$$f_k = \frac{\pi k^2}{2 l^2} \sqrt{\frac{EI_{min}}{m_1} - \frac{l^2 S}{\pi^2 k^2 m_1} \sigma} . \qquad (5)$$

Częstotliwość pierwszej postaci poprzecznych drgań swobodnych szyny kolejowej typu S49 o danych:

- masa jednostkowa $m_1 = 49,43$ kg/m,
- maksymalny moment bezwładności $I_{max} = 18,19 \cdot 10^{-6}$ m^4,
- minimalny moment bezwładności $I_{min} = 3,2 \cdot 10^{-6}$ m^4,
- moduł wydłużenia sprężystego ((Younga) $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa,
- odległość między osiami podkładów $l_s = 0,66$ m,
- pole poprzecznego przekroju $S = 6,3 \cdot 10^{-3}$ m^2,

dla zerowego naprężenia osiowego ($\sigma = 0$), obliczona ze wzoru (5) wynosi $f_s = 421,46$ Hz.

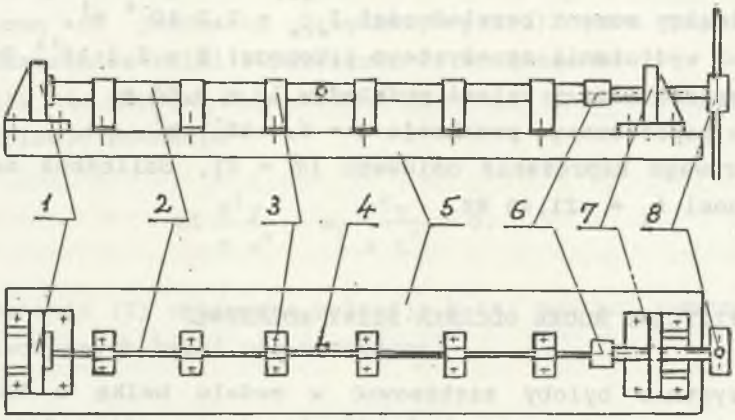
3. FIZYCZNY MODEL ODCINKA SZYNY KOLEJOWEJ

Korzystnie byłoby zastosować w modelu belkę o kształcie szyny, lecz pomniejszoną do takich rozmiarów, aby podczas badań laboratoryjnych można było wytworzyć naprężenie o wartości zbliżonej do ekstremalnego naprężenia występującego w torach bezstykowych. Ponieważ takie profile są niedostępne, to do badań zastosowano stalowy płaskownik, który powinien spełniać następujące warunki:

- częstotliwości swobodnych drgań poprzecznych modelu i szyny S49 powinny być tego samego rzędu,
- naprężenie osiowe w modelu podczas badań powinno być rzędu naprężenia istniejącego w szynie S49 podczas jej eksploatacji,
- stosunki momentów bezwładności przekroju względem obojętnej osi zginania maksymalnego do minimalnego (I_{max}/I_{min}) modelu i szyny S49 powinny być tego samego rzędu.

Na podstawie wzoru (5) i po uwzględnieniu wymienionych warunków zaprojektowano i wykonano model szyny (rys.3), w którym zastosowano stalowy płaskownik o danych:

- masa jednostkowa $m_{p1} = 0,31$ kg/m,
- maksymalny moment bezwładności $I_{pmax} = 333 \cdot 10^{-12}$ m^4,
- minimalny moment bezwładności $I_{pmin} = 53,3 \cdot 10^{-12}$ m^4,
- moduł Younga $E_p = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa,
- odległość między osiami podpór $l_p = 0,15$ m,
- pole poprzecznego przekroju $S = 4 \times 10 = 40$ mm^2.



Rys.3. Szkic fizycznego modelu odcinka szyny. 1 i 7 - wsporniki, 2 - płaskownik, 3 - stalowe uchwyty, 4 - akcelerometr, 5 - deska, 6 - sprzęgło umożliwiające zadawanie siły osiowej bez skręcania płaskownika, 8 - uchwyt śruby drobnozwojowej

Fig.3. Physical model sketch of track rail section. 1 and 7 - brackets, 2 - flat, 3 - steel holders, 4 - accelerometer, 5 - beam, 6 - clutch that enables applying axial force without twisting the flat, 8 - fine-coiled screw holder

Płaskownik przymocowano za pomocą 6 stalowych uchwytów do 6 drewnianych podpór (odtwarzających podkłady), rozstawionych wzdłuż płaskownika co 0,15 m. Naprężenie w płaskowniku wytwarzano za pomocą mechanizmu śrubowego. Częstotliwość pierwszej postaci poprzecznych drgań swobodnych modelu szyny (płaskownika o $l_p = 0,15$ m), dla $\sigma = 0$, zgodnie ze wzorem (5) wynosi $f_p = 420,28$ Hz.

Częstotliwość drgań płaskownika f_p = 420,28 Hz jest rzędu częstotliwości drgań szyny f_s = 421,46 Hz, a stosunek momentów bezwładności płaskownika $I_{pmax}/I_{pmin} = 333\cdot10^{-12}/53,3\cdot10^{-12}$ = = 6,25 jest tego samego rzędu co stosunek momentów bezwładności szyny $I_{pmax}/I_{pmin} = 1819\cdot10^{-8}/320\cdot10^{-8}$ = 5,68, więc model spełnia założone warunki.

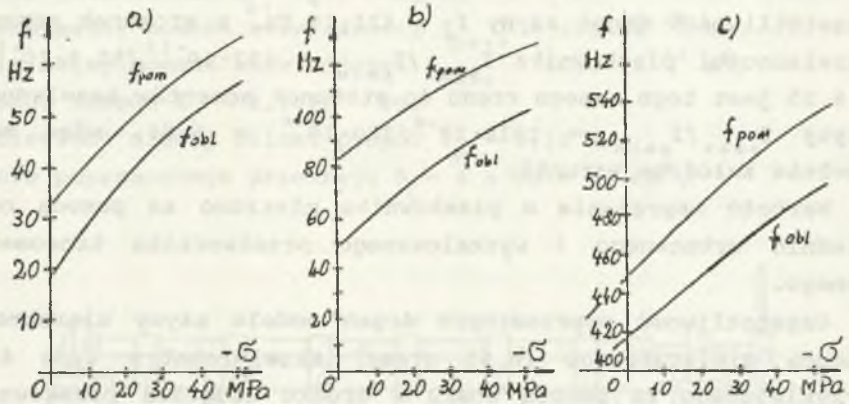
Wartość naprężenia w płaskowniku mierzono za pomocą odpowiednio wykonanego i wyskalowanego przetwornika tensometrycznego.

Częstotliwość poprzecznych drgań modelu szyny mierzono za pomocą miniaturowego (0,65 grama) akcelerometru typu 4374, przyklejonego za pomocą wosku w środku długości płaskownika. Akcelerometr podłączono do analizatora drgań typu 2515 (duńskiej firmy Brüel & Kjaer). Płaskownik pobudzano do drgań za pomocą młotka drewnianego. Analizator wraz z akcelerometrem umożliwia pomiary przyspieszenia, prędkości lub przemieszczenia badanego obiektu, w funkcji czasu lub w funkcji częstotliwości (widmo amplitudowe sygnału). Wyniki pomiarów można obserwować na 5-calowym ekranie o dużej rozdzielczości i rejestrować na taśmie papierowej. Przyrząd posiada kursor umożliwiający dokładny odczyt czasu, częstotliwości i maksymalnych wartości mierzonych wielkości.

Drgania o największej amplitudzie (ok. 30 μm) uzyskano podczas badań płaskownika o największej smukłości (najdłuższego - l_p = 0,75 m), zamocowanego tylko w dwóch skrajnych podporach (a usuniętych czterech środkowych). Smukłość takiego płaskownika wynosi

$$s_{0,75} = \frac{l_p}{\sqrt{I_{pmin}/S_p}} \approx 650 .$$

Dla zadanego naprężenia σ = const wykonywano po 5 pomiarów częstotliwości drgań własnych płaskownika. Powtarzalność wyników była dobra. Na wykresach podano wartości średnie. Wyniki pomiarów f_{pom} oraz wyniki obliczeń f_{obl} (na podstawie wzoru (5)) częstotliwości pierwszej postaci poprzecznych drgań swobodnych płaskownika, w funkcji naprężenia σ dla długości l_p = = 0,75 m, przedstawia rys.4a.



Rys.4. Wykresy $f = f_1(\sigma)$ dla: a) $l_p = 0{,}75$ m, b) $l_p = 0{,}45$ m, c) $l_p = 0{,}15$ m

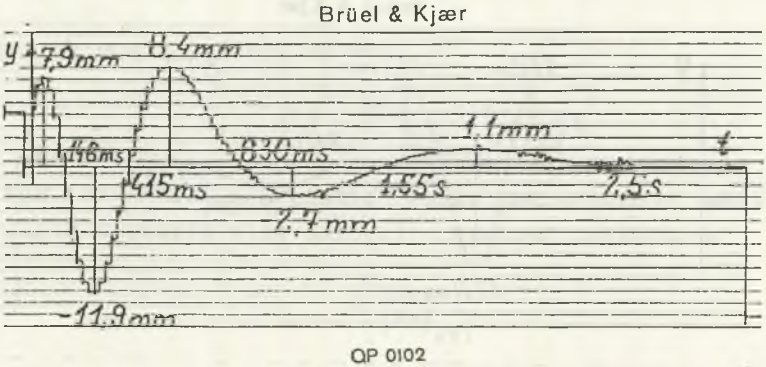
Fig.4. Charakteristic $f = f_1(\sigma)$ for: a) $l_p = 0{,}75$ m, b) $l_p = 0{,}45$ m, c) $l_p = 0{,}15$ m

Częstotliwość obliczona ma mniejszą wartość niż częstotliwość zmierzona. Różnica częstotliwości wynika z teoretycznych rozważań zbyt uproszczonego modelu szyny (belka dwuprzegubowa). Ten model nie uwzględnia sprężystego oddziaływania sąsiednich odcinków płaskownika, ani sprężystego oddziaływania podpór.

Przedstawiony na rys.5 czasowy przebieg drgań płaskownika obrazuje dwie częstotliwości:

- większą $f_p = 60{,}8$ Hz o małej amplitudzie $y_p \approx 30$ μm, wynikającą z poprzecznych drgań swobodnych płaskownika,
- mniejszą $f_m \approx 3$ Hz o dużej amplitudzie $y_n \approx 12$ mm, wynikającą z drgań płaskownika i całej konstrukcji modelu, spowodowanych uderzeniem młotka.

Drgania o amplitudzie rzędu kilku μm wystąpiły przy badaniu płaskownika o mniejszej smukłości, zamocowanego w 4 skrajnych podporach (a usuniętych 2 środkowych). Smukłość takiego modelu o długości $l_p = 0{,}45$ m wynosi $s_{0,45} \approx 390$. Wyniki pomiarów f_{pom} oraz wyniki obliczonej f_{obl} częstotliwości poprzecznych drgań swobodnych płaskownika przedstawia rys.4.b.

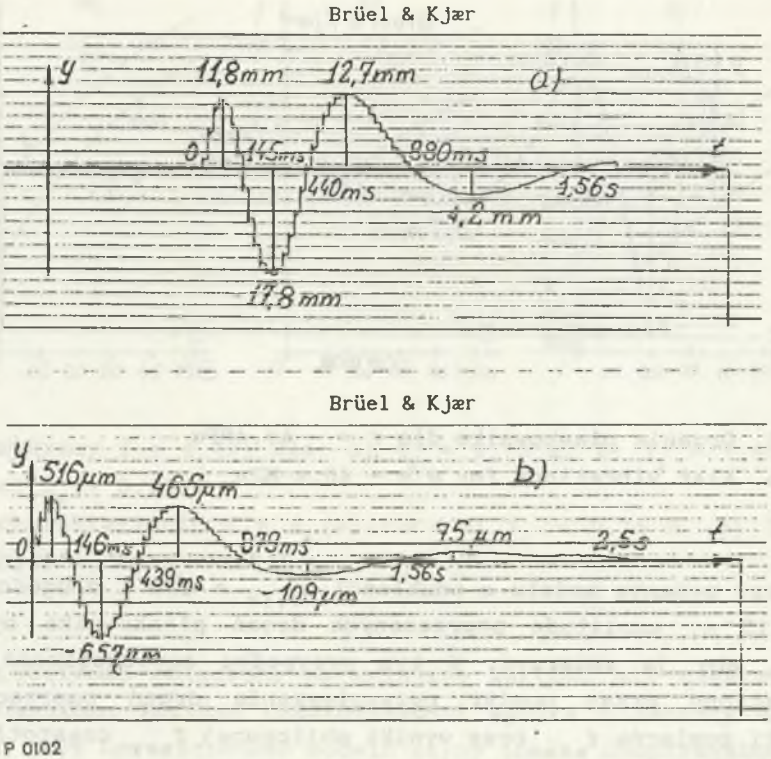


Rys.5. Drgania płaskownika dla σ = - 40,4MPa
Fig.5. Flat vibrations for σ = - 40,4 MPa

Przy badaniu modelu o smukłości $s_{0,15} \approx 130$ i długości $l_p \approx$ $\approx$ 0,15 m, amplituda poprzecznych drgań płaskownika była za mała, aby ją zmierzyć. W tym przypadku częstotliwość drgań wyznaczono przez pomiar przyspieszenia drgań poprzecznych. Wyniki pomiarów f_{pom} oraz wyniki obliczonej f_{obl} częstotliwości poprzecznych drgań swobodnych płaskownika przedstawia rys.4.c.

Przeprowadzono również badania wpływu energii impulsu siły pobudzającej model szyny do drgań na wyniki pomiarów częstotliwości poprzecznych drgań swobodnych. W tym doświadczeniu, przy stałej wartości naprężenia (np. σ = - 40,4 MPa), pobudzano dwukrotnie badany model: raz maksymalną możliwą do wytworzenia energią (rys.6a), a drugi raz minimalną energią - umożliwiającą rejestrację przebiegu drgań (rys.6b).

Wyniki pomiarów częstotliwości drgań były takie same, natomiast różna była amplituda drgań. Wyniki badań modelu były zgodne z teorią, że częstotliwość drgań swobodnych zależy od struktury (2,4 lub 6 podpór) i dynamicznych właściwości obiektu liniowego (I_{min}, l, m_1), a nie zależy od energii impulsu pobudzającego ten układ do drgań.



Rys.6. Drgania płaskownika dla σ = - 40,4 MPa, pobudzonego energią: a) maksymalną, b) minimalną

Fig.6. Flat vibrations for σ = - 40,4 MPa when: a) flat activation energy is maximal, b) flat activation energy is minimal

4. WNIOSKI

Przeprowadzone badania analityczne i eksperymentalne potwierdziły jednoznaczną zależność częstotliwości poprzecznych drgań swobodnych modelu szyny kolejowej od naprężenia osiowego. Na przykład dla 6 podpór (l_p = 0,15 m, s_p = 130) wzrost naprężenia rozciągającego płaskownik o wartości $\Delta\sigma$ = - 53,9 MPa, wg modelu matematycznego (wzór (5)), powoduje względny wzrost częstotliwości drgań o wartość

$$\Delta^{\circ} f = \frac{501,5 - 418,3}{418,3} \approx 20\%,$$

a wg danych pomiarowych o wartość

$$\Delta^{\circ} f = \frac{538 - 448}{448} \approx 20\%.$$

W tym zakresie naprężenia (były ograniczone możliwości wytworzenia większej siły osiowej), czułość obliczona

$$S_{obl} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{obl},$$

jest praktycznie równa czułości zmierzonej

$$S_{pom} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{pom},$$

i wynosi: bezwzględna

$$S \approx \frac{\Delta f}{\Delta \sigma} = \frac{538 - 448}{53,9} \approx 1,7 \text{ Hz/MPa},$$

względna

$$S^{\circ} \approx \frac{\Delta^{\circ} f}{\Delta \sigma} = \frac{20\ \%}{53,9} \approx 0,37\%/\text{MPa}.$$

Wyniki badań analitycznych i eksperymentalnych modelu szyny sugerują możliwość opracowania przetwornika do nieniszczących pomiarów naprężenia metodą analizy częstotliwości drgań swobodnych, o korzystnych właściwościach metrologicznych.

Ponieważ przy badaniu płaskownika o smukłości s_p = 130 (6 podpór, l_p = 0,15 m) wystąpiły trudności z pomiarami częstotliwości drgań, to mogą być jeszcze większe kłopoty z pomiarami częstotliwości drgań szyny kolejowej (np. S49 zamocowanej do podkładów co 0,66 m), której smukłość wynosi zaledwie s_s = = 29. Wydaje się celowe przeprowadzenie badań laboratoryjnych odcinka prawdziwego toru kolejowego.

LITERATURA

1. Albrecht W.G.: Tor bezstykowy. WKiŁ, Warszawa 1986.

2. Deputat J.: Własności i wykorzystanie zjawiska elastoakustycznego do pomiaru naprężeń własnych. Praca IPPT PAN 28/1987.

3. Wojnarowski J.: Metodyczne ćwiczenia laboratoryjne z mechanicznej teorii maszyn. Skrypt Pol. Śl., Gliwice 1984.

Recenzent: prof. dr hab. inż. Leszek Kiełtyka

Wpłynęło do Redakcji 15 marca 1994

Abstract

Equation (1) describes transverse vibrations of a beam fixed by means of two joints whose right movable end is compressed with the axial force F. If the force value is equal to 0, the angular frequency of k-form of free transverse vibrations can be calculated on the base of equation (3). Equation (5) determines the frequency of free vibrations k-from (in the lowest rigidity plane) of the beam compressed with the force $F < F_{crit.}$ A rail model (Fig.3) has been designed and executed according to equation (5). The frequency of free transverse vibrations first-form of the rail model (a flat of $l_p = 0,15$ m) for $\sigma = 0$ is equal to $f_p = 420,28$ Hz (see equation (5)) and it is of the order of free vibrations frequency of the rail type S49 - $f_s = 421,46$ Hz.

The rail model vibrations frequency has been measured by means of the miniature accelerometer type 4374 which has been stuck to the flat in the middle of its length. The accelerometer has been connected to the vibration analyser type 2515 (Brüel and Kjaer). Maximum amplitude of vibrations (about 30 μm) has been obtained when testing the flat of the highest slenderness ratio $s_{0,75} \approx 650$ ($l_p = 0,75$ m). The flat has been fixed then to two extreme supports only.

Measurement results f_{pom} and calculation values f_{obl} (see Eg. (5)) as a function of stress σ (the flat of l_p = 0,75 m) are shown in Fig.4a.

It has been proved (Fig.6) that energy of the impulse activating the beam influences only the vibration amplitude. It does not influence the frequency of the beam transverse vibrations.