

Krzysztof GRYGIEREK\*  
Politechnika Śląska

## ANALIZA SKRĘCANIA KOMPOZYTOWYCH PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O PROFILU ZAMKNIĘTYM

**Streszczenie.** W pracy tej rozpatrzono skręcanie swobodne (Saint Venanta) i skrępowane (występuje deplanacja) kompozytowych prętów cienkościennych o profilu zamkniętym. Określono pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń zmienne na obwodzie i grubości pręta. Wyniki porównano z programem ANSYS.

## ANALYSIS OF TORSION OF THIN-WALLED COMPOSITE BEAMS WITH CLOSED CROSS SECTION

**Summary.** In this paper uniform (Saint Venant) and nonuniform (with warping) theory of torsion of thin walled composite beams with closed cross-section is developed. Introduced here displacement, strain and stress field is changed on the contour and on the thickness of the cross-section. Results are compared with ANSYS program.

### 1. Wprowadzenie

Skręcanie prętów cienkościennych należy do bardzo ciekawych zagadnień mechaniki ciała stałego. Zagadnienie skręcania swobodnego dla prętów jednorodnych, izotropowych zostało rozwiązane przez Saint Venanta [6]. Badania związane ze skręcaniem skrępowanym zostały zapoczątkowane przez Timoshenkę [6], a dalej rozwijane przez Vlasova [8] i Umańskiego [7]. Ostatnio badania te są związane z nowymi materiałami, do których zaliczamy zbrojone włóknami kompozyty. Możemy tutaj wymienić prace: [2], [4].

W większości artykułów, mających na celu sprowadzenie problemu do zagadnienia jednowymiarowego, przyjęto założenie, że funkcja deplanacji jest stała na grubości pręta.

---

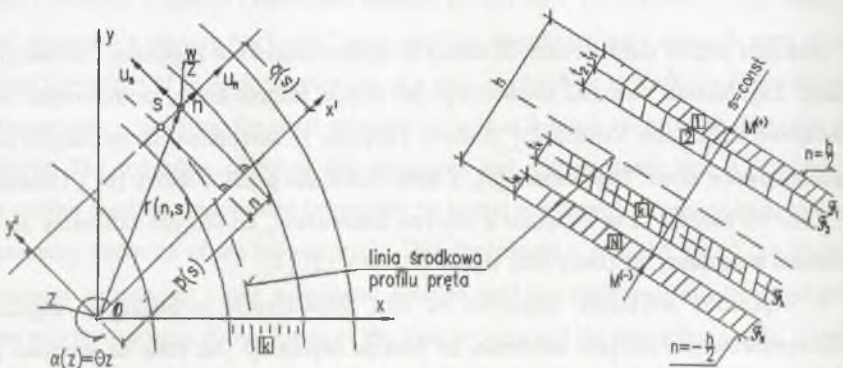
\* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Szczepan Borkowski

Tym samym pole przemieszczeń i odkształceń jest związane z powierzchnią środkową pręta. Odbiega od tego praca [2], w której odkształcenia zmieniają się na grubości pręta, ale sama funkcja deplanacji jest stała na grubości pręta. Kolejnym problemem jest wyznaczenie naprężeń. Równania je opisujące bazują najczęściej na teorii powłok cienkich, warstwowych, do której dodatkowo jest wprowadzona deplanacja. Niestety, nie spełniają one lokalnych równań równowagi Cauchy'ego. Problem ten jest rozważony w artykule [4]. Pominięto w nim jednak deplanację przekroju.

W pierwszej części pracy rozważono problem skręcania swobodnego kompozytowych prętów cienkościennych o profilu zamkniętym. Jest postawione zadanie brzegowe oraz równanie opisujące funkcję deplanacji. Jest ona zależna od współrzędnej obwodowej i normalnej profilu pręta. W drugiej części rozpatrzono problem skręcania skrępowanego (występuje deplanacja). Wyprowadzono lokalne warunki równowagi, warunki brzegowe oraz równania opisujące pole naprężeń. Na zakończenie teoria została zilustrowana przykładami.

## 2. Skręcanie swobodne

Pręt będziemy modelować powłoką walcową (niekoniecznie kołową), wielowarstwową, zamkniętą składającą się z  $N$  warstw; grubość każdej  $k$ -tej warstwy ( $k=1,2,\dots,N$ ) oznaczymy przez  $t_k$ , por. rys. 1. Grubość powłoki przyjmujemy za równą  $h$ , tak że  $h = \sum_{k=1}^N t_k$ . Przy opisie geometrii powłoki będziemy stosować krzywoliniowy, ortogonalny układ współrzędnych związany z powierzchnią środkową profilu pręta ( $Onsz$ ).



Rys. 1. Konfiguracja pręta  
Fig. 1. Beam configuration

Składowe wektora przemieszczenia (styczna  $u_s$  i radialna  $u_n$ ) w przypadku przyjęcia hipotezy sztywnych przekrojów, a także kiedy w przekroju  $z = const$  występuje kąt skręcania  $\alpha(z) = \theta z$ , por. rys. 1, określimy następująco:

$$u_n = -\alpha(z)\bar{q}(s), \quad u_s = \alpha(z)(\bar{p}(s) + n). \quad (1)$$

Z założenia o zerowaniu się odkształcenia w kierunku osi  $z$  ( $\varepsilon_z = 0$  – skręcanie swobodne) określimy składową osiową przemieszczenia:

$$w(n, s) = \alpha' \psi(n, s). \quad (2)$$

W równaniu tym wprowadzono funkcje deplacji:  $\psi$ .

Dla przypadku skręcania swobodnego mamy dwie niezerowe składowe stanu odkształcenia:

$$\begin{aligned} \gamma_{zs}^k &= \frac{\partial u_s}{\partial z} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial s} = \alpha' \left( \bar{p} + n + \frac{1}{A} \psi_s \right), \\ \gamma_{zn}^k &= \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial z} = \alpha' (\psi_n - \bar{q}), \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie, występująca w równaniu (3) stała Lamego jest określona wzorem:

$$A = 1 + kn, \quad k = \frac{1}{\rho}, \quad \rho - \text{promień krzywizny}.$$

Odształcenia (3), zgodnie z teorią de Saint Venanta, spełniają równanie ciągłości odkształceń w kolejnych warstwach:

$$\frac{\partial}{\partial n} (A \gamma_{zn}^k) - \frac{\partial}{\partial s} (\gamma_{zs}^k) = 2A\theta. \quad (4)$$

W rozpatrywanym tutaj problemie przyjmiemy, że liniowe równania konstytutywne w kolejnych warstwach opisane są równaniem macierzowym:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{zs}^k \\ \gamma_{zn}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{44}^k & \bar{a}_{45}^k \\ \bar{a}_{54}^k & \bar{a}_{55}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{zs}^k \\ \tau_{zn}^k \end{Bmatrix}, \quad \bar{a}_{45}^k = \bar{a}_{54}^k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

W związku z zerowaniem się pozostałych składowych stanu naprężenia otrzymamy następujące lokalne równania równowagi Cauchy'ego:

$$\frac{\partial}{\partial z} (A \tau_{zn}^k) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} (A \tau_{zs}^k) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} (\tau_{zs}^k) + \frac{\partial}{\partial n} (A \tau_{zn}^k) = 0. \quad (6)$$

Rozwiązania będziemy poszukiwali poprzez nową funkcję naprężeń  $U_k(n, s)$  klasy co najmniej  $C_2$ , którą wprowadzimy do równań (6) w każdym z obszarów  $F_k$ :

$$\left( -\frac{t_k}{2}, \frac{t_k}{2} \right) \times (0, l) \ni (n, s) \mapsto U_k(n, s), \quad \forall z \in (0, L). \quad (7)$$

Zależności pomiędzy naprężeniami stycznymi i funkcją naprężeń w poszczególnych warstwach są określone związkami:

$$A\tau_{zn}^k = \theta \frac{\partial U_k}{\partial s}, \quad \tau_{zn}^k = -\theta \frac{\partial U_k}{\partial n}. \quad (8)$$

Funkcja naprężeń dodatkowo winna spełniać następujące warunki:

- na brzegach profilu pręta:

$$U_1\left(\frac{t_1}{2}, s\right) = 0, \quad U_N\left(-\frac{t_N}{2}, s\right) = \text{const} \neq 0; \quad (9)$$

- na styku dwu warstw:

$$U_{k+1} = U_k, \quad \frac{\partial U_k}{\partial n} = \frac{\partial U_{k+1}}{\partial n}; \quad (10)$$

- Bredta na brzegu wewnętrznym profilu pręta  $L$  ( $n = -h/2$ ):

$$\oint_L \frac{\partial U_k}{\partial n} ds = -2F. \quad (11)$$

Zależności (9), (10), (11) kolejno otrzymujemy: z warunku zerowania się naprężeń  $\tau_{zn}^k$  na brzegu profilu pręta; z warunku równoważenia się naprężeń  $\tau_{zn}^k$  i  $\tau_{zn}^{k+1}$  oraz nierozdzielności przemieszczeń  $w$  na styku warstw, oraz obliczając cyrkulację pola kątów odkształcenia postaciowego. Przez  $F$  w równaniu Bredta określono powierzchnię obszaru ograniczonego brzegiem  $L$ . Pochodna w równaniu (10)<sub>2</sub> i (11) została zdefiniowana następująco:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial n} = \bar{a}_{44}^k A \frac{\partial(\cdot)}{\partial n} - \bar{a}_{45}^k \frac{\partial(\cdot)}{\partial s}. \quad (12)$$

Rozwiązanie zadania sprowadza się do scałkowania równania różniczkowego (przy uwzględnieniu warunków (9), (10), (11)), które uzyskujemy podstawiając do warunku nierozdzielności (4), równania konstytutywne (5):

$$\bar{a}_{44}^k \frac{\partial}{\partial n} \left[ A \frac{\partial U_k}{\partial n} \right] - 2\bar{a}_{45}^k \frac{\partial^2 U_k}{\partial s \partial n} + \bar{a}_{55}^k \frac{\partial}{\partial s} \left[ A \frac{\partial U_k}{\partial s} \right] = -2A. \quad (13)$$

Do zupełności postawienia problemu należy jeszcze przytoczyć warunek równowagi wewnętrznej naprężeń i momentu skręcającego (obciążenie zewnętrzne):

$$K = \sum_{k=1}^N \iint_{\bar{\Gamma}_k} [\tau_{zn}^k (\bar{p}(s) + n) - \tau_{zn}^k \bar{q}] df_k = \alpha' \sum_{k=1}^N \iint_{\bar{\Gamma}_k} \left[ \frac{\partial U_k}{\partial n} (\bar{p}(s) + n) + \frac{1}{A} \frac{\partial U_k}{\partial s} \bar{q} \right] df_k, \quad df_k = A dn ds. \quad (14)$$

Do rozwiązania równania (13) zastosowano metodę małego parametru, której podstawy możemy znaleźć w monografii [5]. Analizując tak otrzymane rozwiązanie, stwierdzono w



ustrojach cienkościennych znikomy wpływ naprężenia  $\tau_{m}^k$  na całkowite pole naprężeń. Stąd w rozważanym dalej skręcaniu skrępowanym wpływ tego pola zostanie pominięty.

Funkcję deplanacji  $\psi(n, s)$ , występującą w równaniu (2), określać będziemy poprzez funkcję naprężenia  $U_k(n, s)$ . Interesująca nas zależność obliczymy porównując równania (3), (5), (6). Stąd, wykorzystując twierdzenie o całce krzywoliniowej różniczki zupełnej, otrzymamy poszukiwaną funkcję deplanacji:

$$\psi(n, s) = \int_0^s \left( -\bar{a}_{44}^k \frac{\partial U_k}{\partial n} + \bar{a}_{45}^k \frac{1}{A} \frac{\partial U_k}{\partial s} - \bar{p} - n \right) d\bar{s} + \int_0^n \left( -\bar{a}_{45}^k \frac{\partial U_k}{\partial n} + \bar{a}_{45}^k \frac{1}{A} \frac{\partial U_k}{\partial s} + \bar{q} \right) d\bar{n}. \quad (15)$$

Funkcja ta jest zależna od współrzędnej obwodowej  $s$ , a także i współrzędnej normalnej  $n$ . W większości prac, mających na celu sprowadzenie rozpatrywanego tutaj problemu do zadania jednowymiarowego, pomijana jest druga część równania związana ze współrzędną normalną. Tutaj przyjmujemy jedynie uproszczenie związane z pominięciem naprężenia  $\tau_{m}^k$ . Ilustrujący teorię przykład pokazuje, że całkowite pominięcie drugiego członu funkcji deplanacji prowadzi do kilkunastoprocentowych błędów.

### 3. Skręcanie skrępowane

W przypadku skręcania skrępowanego w prętach cienkościennych pojawiają się dodatkowe naprężenia wycinkowe, będące wynikiem ograniczonej swobody deplanowania się przekroju poprzecznego. Jest to zasadnicza różnica odróżniająca przypadek skręcania swobodnego i skrępowanego w analizie prętów cienkościennych. Stąd (w stosunku do skręcania swobodnego) w dalszej części wprowadzimy założenia, słuszne w prętach cienkościennych skrępowanych:

- składowe stanu przemieszczenia określone są równaniami:

$$u_n = -\alpha(z)\bar{q}(s), \quad u_s = \alpha(z)(\bar{p}(s) + n), \quad w = W(z) + \lambda(z)\psi(n, s). \quad (16)$$

W odróżnieniu od skręcania swobodnego przemieszczenie związane z deplanacją przekroju zależy od funkcji deplanacji  $\psi$  i nowej funkcji  $\lambda(z)$ , którą jako „lepszą” dla opisu zagadnienia w prętach cienkościennych o profilu zamkniętym, jako pierwszy, wprowadził Bencotter [1]. W równaniu tym pojawiła się dodatkowo składowa przemieszczenia  $W(z)$ , a

konieczność jej wprowadzenia wynika z faktu występowania sprzężenia pomiędzy skręcaniem a rozciąganiem w prętach kompozytowych.

- niezerowymi składowymi stanu odkształcenia będą:

$$\varepsilon_z^k = \frac{\partial w}{\partial z} = W' + \lambda' \psi(n, s), \quad \gamma_{zs}^k = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = (\bar{p} + n)(\alpha' - \lambda) + \lambda \Delta, \quad (17)$$

gdzie uwzględniono:

$$\psi_s = -\bar{a}_{44}^k \frac{\partial U_k}{\partial n} + \bar{a}_{45}^k \frac{1}{A} \frac{\partial U_k}{\partial s} - \bar{p} - n = \Delta - \bar{p} - n, \quad (18)$$

oraz przyjęto, że ze względu na małą grubość ( $n/\rho \ll 1$ ) stała Lamégo  $A_k \equiv 1$ ,

- liniowe związki konstytutywne, za klasyczną teorią powłok cienkich, warstwowych, przy założeniu o zerowaniu się naprężenia  $\sigma_s$ , zapiszemy w postaci macierzowej:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zs} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{33} - \frac{\bar{Q}_{23}^2}{\bar{Q}_{22}} & \bar{Q}_{34} - \frac{\bar{Q}_{23}\bar{Q}_{24}}{\bar{Q}_{22}} \\ \bar{Q}_{34} - \frac{\bar{Q}_{23}\bar{Q}_{24}}{\bar{Q}_{22}} & \bar{Q}_{44} - \frac{\bar{Q}_{24}^2}{\bar{Q}_{22}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{zs} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{a}_{33} & \hat{a}_{34} \\ \hat{a}_{34} & \hat{a}_{44} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{zs} \end{Bmatrix}_k, \quad (19)$$

oraz w zależności odwrotnej (odkształcenie-naprężenie):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{zs} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{34} & \bar{a}_{44} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zs} \end{Bmatrix}_k; \quad (20)$$

- przyjmiemy, że naprężenia są stałe na grubości warstwy; stąd wprowadzimy strumienie naprężeń zdefiniowane jako:

$$\bar{\sigma}^k = \sigma_z^k t_k, \quad \bar{\tau}^k = \tau_{zs}^k t_k. \quad (21)$$

Przejdźmy dalej do wyznaczenia funkcji deplanacji w przypadku skręcania skrępowanego. Interesującą nas zależność wyznaczmy porównując ze sobą równania opisujące odkształcenia postaciowe (17)<sub>2</sub> i (20)<sub>2</sub>, oraz uwzględniając założenie o zerowaniu się odkształcenia postaciowego  $\gamma_{zn}$ . W ten sposób uzyskamy:

$$\psi = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} \left[ (\bar{a}_{34}^k \bar{\sigma}^k + \bar{a}_{44}^k \bar{\tau}^k) - \alpha' t_k (\bar{p} - n) \right] ds + \int_0^n \bar{q} d\bar{n}. \quad (22)$$

Należy podkreślić, iż w początkowym etapie obliczeń nie znane nam są wielkości strumieni naprężeń występujących w powyższym równaniu. Z tego też powodu przyjmiemy rozkład funkcji deplanacji tak jak w przypadku skręcania swobodnego (15).

Lokalne równania równowagi i warunki brzegowe otrzymamy na drodze minimalizacji funkcjonału Lagrange'a. Przyjmujemy, że pręt wspornikowy obciążony jest na swej długości

rozłożonym momentem skręcającym  $m(z)$ , a na końcu momentem skupionym  $K$ . Stąd wariancja funkcjonału całkowitej energii potencjalnej przyjmie postać:

$$\delta I_L = \int_0^L dz \sum_{k=1}^N \left\{ \oint (\bar{\sigma}^k \delta \varepsilon_s^k + \bar{\tau}^k \delta \gamma_{zs}^k) ds \right\} - \int_0^L m(z) \delta \alpha dz - K \delta \alpha \Big|_{\partial V_k} = 0 \tag{23}$$

Podstawiając zależności (21) do (23), a następnie stosując twierdzenie Greena otrzymamy:

- lokalne równanie równowagi, które zapiszemy w postaci trzech sprzężonych ze sobą równań:

$$\begin{aligned} S_s W'' + I_{\psi s} \lambda'' + I_s (\alpha' - \lambda') + I_d \lambda' &= -m, \\ S_\psi W'' - (S_d - S_s) W' + I_\psi \lambda'' + I_{\psi s} \alpha'' - (I_d - I_s) (\alpha' - \lambda) &= 0, \\ S_n W'' + S_\psi \lambda'' + S_s (\alpha' - \lambda') + S_d \lambda' &= 0; \end{aligned} \tag{24}$$

w równaniach tych wprowadzono charakterystyki geometryczno-wytrzymałościowe:

$$\begin{aligned} I_\psi &= \sum_{k=1}^N \hat{a}_{33}^k \oint (\psi^k)^2 t_k ds, & I_d &= \sum_{k=1}^N \hat{a}_{44}^k \oint \Delta^2 t_k ds, & I_s &= \sum_{k=1}^N \hat{a}_{44}^k \oint (\bar{p} + n)^2 t_k ds, \\ I_{\psi s} &= \sum_{k=1}^N \hat{a}_{34}^k \oint (\bar{p} + n) \psi^k t_k ds, & I_{\psi d} &= \sum_{k=1}^N \hat{a}_{34}^k \oint \Delta \psi^k t_k ds, & S_n &= \sum_{k=1}^N \hat{a}_{33}^k \oint t_k ds, \\ S_\psi &= \sum_{k=1}^N \hat{a}_{33}^k \oint \psi^k t_k ds, & S_d &= \sum_{k=1}^N \hat{a}_{34}^k \oint \Delta t_k ds, & S_s &= \sum_{k=1}^N \hat{a}_{34}^k \oint (\bar{p} + n) t_k ds, \end{aligned} \tag{25}$$

- warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} S_s W' + I_{\psi s} \lambda' + I_s (\alpha' - \lambda) + I_d \lambda &= K, & N &= 0, & B &= 0, & \text{na } \partial \bar{V}_k \\ W &= 0, & \alpha &= 0, & \lambda &= 0, & \text{na } \partial V_0^* \end{aligned} \tag{26}$$

gdzie wprowadzono siły wewnętrzne: osiową -  $N$  i bimoment -  $B$ , zdefiniowane jako:

$$\begin{aligned} N &= S_n W' + S_\psi \lambda' + S_s (\alpha' - \lambda) + S_d \lambda, \\ B &= S_\psi W' + I_\psi \lambda' + I_{\psi s} (\alpha' - \lambda) + I_{\psi d} \lambda. \end{aligned} \tag{27}$$

Zadanie brzegowe skręcania skrępowanego kompozytowych prętów cienkościennych o profilu zamkniętym sprowadza się do rozwiązania układu równań (24) przy warunkach brzegowych (26). Do rozwiązania problemu zastosowano MES. Bazując na funkcjonale Lagrange'a zbudowano prętowy element skończony o dwóch węzłach i siedmiu stopniach swobody w każdym z nich (3 translacje, 3 rotacje i deplanacja). Element ten zastosowano w autorskim programie napisanym w Matlab-ie. Więcej informacji z tego zakresu (rozwiązanie zagadnienia metodą elementów skończonych) możemy znaleźć w artykule [3].

Pozostał jednak do rozwiązania jeszcze jeden problem. Mianowicie, wprowadzone równaniami (18) naprężenia spełniają warunki równowagi dla całego profilu pręta, jednak nie spełniają lokalnych równań równowagi Cauchy'ego na jego obwodzie. Równania te dla

przypadku skręcania skrępowanego (po przyjęciu wprowadzonych powyżej założeń) określone są zależnościami:

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{\tau}^k = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} \bar{\tau}^k + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\sigma}^k = 0. \quad (28)$$

Przekształcając równanie (20), możemy zapisać:

$$\bar{\sigma}^k = \frac{t_k}{\bar{a}_{33}^k} \varepsilon_z^k - \frac{\bar{a}_{34}^k}{\bar{a}_{33}^k} \bar{\tau}^k. \quad (29)$$

Zaś  $\bar{\tau}^k$  wyznaczmy z drugiego warunku Cauchy'ego (28):

$$\bar{\tau}^k = \bar{\tau}_0^k - \frac{t_k}{\bar{a}_{33}^k} \int_0^{s^*} (\varepsilon_z^k) ds. \quad (30)$$

Stałą całkowania  $\bar{\tau}_0^k$  wyznaczmy z warunku nierozdzielności przemieszczeń  $\oint \psi ds = 0$ . Przyjmując, że  $W''$  jest pomijalnie małe, ostateczny wzór na strumień naprężeń stycznych określimy równaniem:

$$\bar{\tau}^k = \frac{t_k \oint (\bar{p} + n^k) ds}{\bar{a}_{44}^k \oint ds} \alpha' - \frac{\bar{a}_{34}^k t_k}{\bar{a}_{33}^k \bar{a}_{44}^k} W' - \frac{\bar{a}_{34}^k t_k \oint \psi ds}{\bar{a}_{33}^k \bar{a}_{44}^k \oint ds} \lambda' + \frac{t_k \oint ds \int \psi ds}{\bar{a}_{33}^k \oint ds} \lambda'' - \frac{t_k}{\bar{a}_{33}^k} \int_0^{s^*} \psi \lambda'' ds, \quad (31)$$

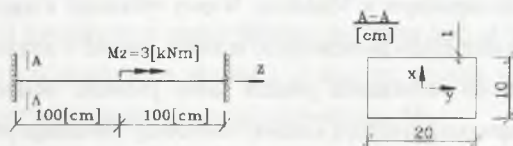
gdzie:

$$\bar{a}_{44}^k = \bar{a}_{44}^k - \frac{(\bar{a}_{34}^k)^2}{\bar{a}_{33}^k}. \quad (32)$$

W ten sposób zostało uzupełnione zadanie brzegowe skręcania skrępowanego warstwowych prętów cienkościennych.

#### 4. Analiza przykładu i wnioski

Powyższą teorię zilustrujemy przykładem. Prześledzimy, jak zmieniają się przemieszczenia i naprężenia w poszczególnych warstwach dla schematu zadania przedstawionego na rys. 2.

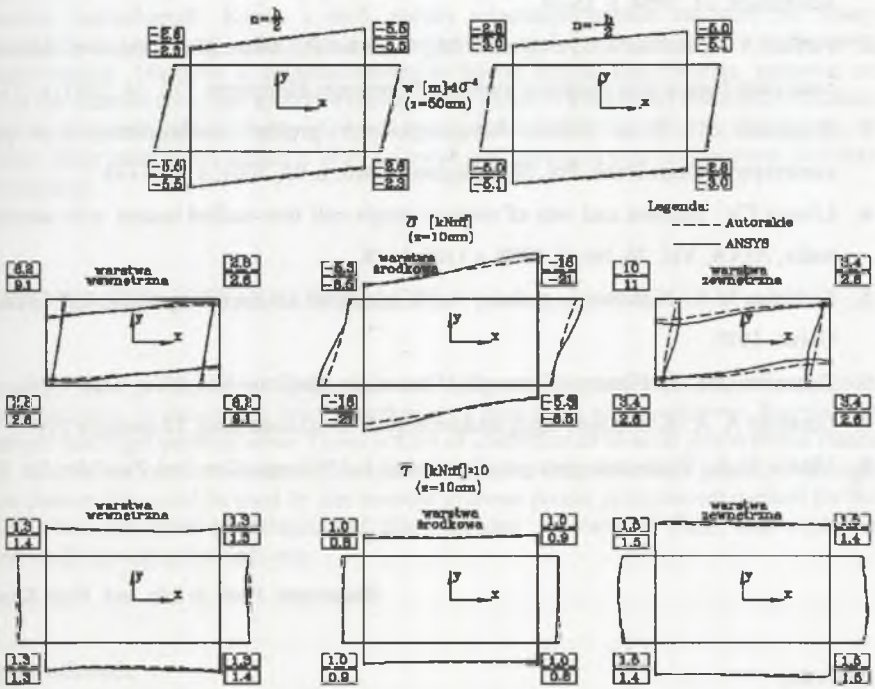


Rys. 2. Schemat zadania

Fig. 2. Scheme of the problem



Ścianki profilu zbudowane są z trzech warstw o grubości  $t_i = 0.33 \text{ cm}$  i kodzie [30,0,30]. Materiałem jest kompozyt szkło E / epoksyd o następujących charakterystykach materiałowych:  $E_1 = 45 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 12 \text{ GPa}$ ,  $G = 5.5 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.28$ . Wyniki otrzymane autorskim programem, napisanym w Matlab-ie, zostały porównane z rezultatami otrzymanymi pakietem ANSYS, w którym zastosowano do rozwiązania problemu warstwowy element powłokowy (SHELL99). Porównanie przemieszczeń i naprężeń, w odpowiednich przekrojach, w poszczególnych warstwach, otrzymanych dwoma metodami, znajduje się na rys. 3.



Rys. 3. Porównanie wyników  
Fig. 3. Comparison of results

Można stwierdzić, że wyniki otrzymane przy zastosowaniu przedstawionej teorii, są bardzo zbliżone do rezultatów otrzymanych programem ANSYS. Większe błędy w naprężeniach są konsekwencją umiejscowienia analizowanego przekroju (blisko podpory - więc w obszarze, gdzie nie obowiązuje zasada de Saint Venanta). Różnice w przemieszczeniach na grubości profilu oraz w naprężeniach (w warstwach wewnętrznej i zewnętrznej) sięgają 20%. Przy tradycyjnym podejściu (funkcja deplanacji stała na grubości

profilu) wyniki w obydwu warstwach byłyby takie same (co jest nieprawdą, por. rys. 3). Stąd można stwierdzić, że zaproponowana teoria jest dokładniejsza (umożliwia śledzenie przemieszczeń, odkształceń i naprężeń na całym przekroju poprzecznym, a nie tylko na powierzchni środkowej).

## LITERATURA

1. Bescoter S. U.: A theory of torsion bending for multicell beams, *Journal of Applied Mechanics*, 21, 1954, s. 25-34.
2. Ferrero J. F., Barrau J. J., Segura J. M., Castanie B., Sudre M.: Torsion of thin-walled composite beams with midplane symmetry, *Composite Structures*, Vol. 54, 2001, s. 111-120.
3. Grygierek K.: Dwa modele kompozytowych prętów cienkościennych o profilu zamkniętym, *Zesz. Nauk. Pol. Śl. s. Budownictwo*, z. 93, 2001, s. 135-144.
4. Libove Ch.: Stresses and rate of twist in single-cell thin-walled beams with anisotropic walls, *AIAA*, Vol. 26, No. 9, 1988, s. 1107-1118.
5. Sarkisjan W.S.: Niektóre zadaczy teorii uprugosti anizotropnego ciała, *Izd. Erewansk. Uniw.*, 1970.
6. Timoshenko S. P.: *History of strength of materials*, McGraw-Hill, New York 1953.
7. Umański A. A.: *Krucenije i izgib tonkostennykh aviakonstrukcij*, Oborongiz 1939.
8. Vlasov V. Z.: *Tonkostennyje uprugije stierzni*, *Izd. Vtoreje. Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit.* 1959.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Piotr Konderla

## Abstract

In this paper uniform and nonuniform theory of torsion of thin walled composite beams with closed cross-section is developed. More accurate method of calculation of warping function is proposed. Here introduced function is changed on the contour and on the thickness of the cross-section. The correctness of this way is checked on the example. The approach of the numerical results obtained by the used authors and ANSYS program is satisfactory.