

Michał GUMINIAK*
Politechnika Poznańska

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ANALIZIE STATYKI PŁYT CIENKICH

Streszczenie. W pracy rozwiązuje się zadanie zginania płyty cienkiej przy zastosowaniu metody elementów brzegowych. Na brzegu płyty występują trzy zmienne statyczne i trzy geometryczne. W podanym sformułowaniu nie wprowadza się zastępczej siły poprzecznej na brzegu płyty oraz sił skupionych w narożach. W węzle elementu brzegowego występują dwie niezależne niewiadome. Uwzględnia się również występowanie podpór słupowych w obrębie płyty. Do zapisu całkowych równań brzegowych zastosowano podejście kolokacyjne z punktami kolokacji umieszczonymi na zewnątrz płyty. Pozwoliło to wyeliminować obliczanie całek osobliwych.

APPLICATION OF BOUNDARY ELEMENT METHOD TO BENDING ANALYSIS OF THIN PLATES

Summary. The boundary element analysis of thin plates is presented in the paper. In this formulation there are considered three geometric and three static variables at the plate boundary. This approach avoids the development of Kirchhoff forces at plate corners and equivalent shear force at plate boundary. The present formulation is based upon two degrees-of-freedom per boundary node. The case of column supports is considered, too. The collocation version of boundary element method with constant element is adopted. To avoid the calculation of singular integrals, the source points are located slightly outside the plate boundary.

1. Wprowadzenie

Metoda elementów brzegowych ma częste zastosowanie w teorii płyt cienkich oraz płyt średniej grubości. Większość prac dotyczących jej zastosowania w tej dziedzinie opiera się na formułowaniu równań równowagi przy użyciu wielkości znanych z klasycznej teorii płyt, zastępczej siły poprzecznej na brzegu płyty i sił skupionych w narożach. Niniejsze

*Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Ryszard Sygulski

opracowanie prezentuje nieco inne podejście bez potrzeby posługiwania się wielkościami, które w klasycznej teorii służą do uzgodnienia liczby warunków brzegowych z rzędem równania różniczkowego płyty. Na brzegu płyty rozważa się trzy wielkości statyczne: siłę poprzeczną T_n , moment zginający M_n i moment skręcający M_{ns} oraz trzy wielkości geometryczne: ugięcie w , kąty obrotu φ_n i φ_s [3]. Spośród tych wielkości, zgodnie z warunkami brzegowymi analizowanymi w rozdziale 2, tylko dwie należy traktować jako wielkości niewiadome.

Brzegowe równania całkowe otrzymuje się wykorzystując twierdzenie o wzajemności prac Bettiego. Rozważa się dwie płyty: nieskończoną, obciążoną jednostkową siłą skupioną oraz rzeczywistą, pod obciążeniem $p(y)$ (rys. 1). W rezultacie otrzymuje się równanie całkowe w postaci:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} [T_n^*(y, \mathbf{x}) \cdot w(y) - M_n^*(y, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(y) - M_{ns}^*(y, \mathbf{x}) \cdot \varphi_s(y)] \cdot d\Gamma(y) = \\ = \int_{\Gamma} [T_n(y) \cdot w^*(y, \mathbf{x}) - M_n(y) \cdot \varphi_n^*(y, \mathbf{x}) - M_{ns}(y) \cdot \varphi_s^*(y, \mathbf{x})] \cdot d\Gamma(y) - \sum_i R_i \cdot w^*(i, \mathbf{x}) \\ + \int_{\Omega} p(y) \cdot w^*(y, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(y), \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie $w^*(y, \mathbf{x}) = \frac{1}{D} \frac{r^2}{8\pi} \ln(r)$ - rozwiązanie podstawowe (funkcja Greena) równania

biharmonicznego $\nabla^4 w^*(y, \mathbf{x}) = \frac{1}{D} \delta(y - \mathbf{x})$, $r = |y - \mathbf{x}|$ i δ jest deltą Diraca oraz

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}) = 1, & \quad \text{kiedy } \mathbf{x} \text{ jest położony wewnątrz obszaru płyty,} \\ c(\mathbf{x}) = 0.5, & \quad \text{kiedy } \mathbf{x} \text{ jest położony na brzegu gładkim płyty,} \\ c(\mathbf{x}) = 0, & \quad \text{kiedy } \mathbf{x} \text{ jest położony na zewnątrz obszaru płyty.} \end{aligned}$$

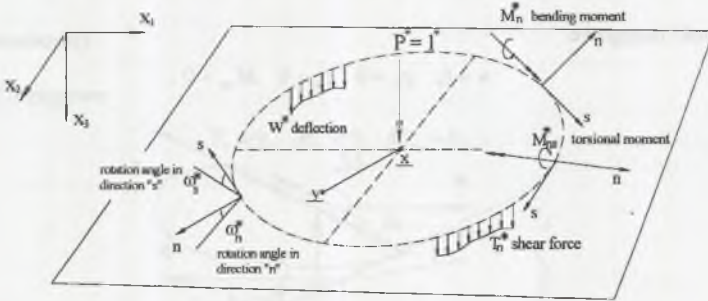
Drugie równanie można otrzymać zastępując jednostkową siłą skupioną $P^* = 1^*$ jednostkowym momentem skupionym $M_n^* = 1^*$. Jest to równoważne zróżniczkowaniu pierwszego równania całkowego (1) względem współrzędnej n w punkcie \mathbf{x} na brzegu płyty. Równanie to ma postać:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} [\bar{T}_n^*(y, \mathbf{x}) \cdot w(y) - \bar{M}_n^*(y, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(y) - \bar{M}_{ns}^*(y, \mathbf{x}) \cdot \varphi_s(y)] \cdot d\Gamma(y) = \\ = \int_{\Gamma} [T_n(y, \mathbf{x}) \cdot \bar{w}^*(y, \mathbf{x}) - M_n(y) \cdot \bar{\varphi}_n^*(y, \mathbf{x}) - M_{ns}(y) \cdot \bar{\varphi}_s^*(y, \mathbf{x})] \cdot d\Gamma(y) - \sum_i R_i \cdot \bar{w}^*(i, \mathbf{x}) + \\ + \int_{\Omega} p(y) \cdot \bar{w}^*(y, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(y), \end{aligned} \quad (2)$$

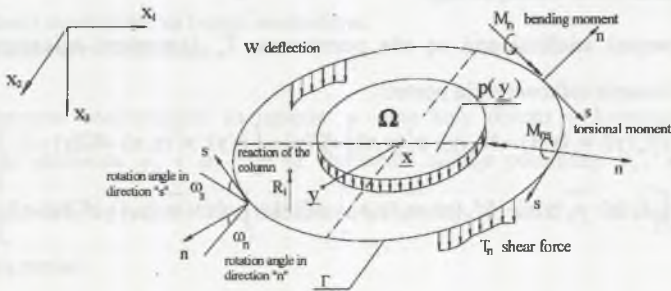
gdzie:

$$\begin{aligned} & \left\{ \bar{T}_n^*(y, \mathbf{x}), \bar{M}_n^*(y, \mathbf{x}), \bar{M}_{ns}^*(y, \mathbf{x}), \bar{w}^*(y, \mathbf{x}), \bar{\varphi}_n^*(y, \mathbf{x}), \bar{\varphi}_s^*(y, \mathbf{x}) \right\} = \\ & = \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})} \left\{ T_n^*(y, \mathbf{x}), M_n^*(y, \mathbf{x}), M_{ns}^*(y, \mathbf{x}), w(y, \mathbf{x}), \varphi_n^*(y, \mathbf{x}), \varphi_s^*(y, \mathbf{x}) \right\}. \end{aligned}$$

Pierwsza grupa sił (płyta nieograniczona)



Druga grupa sił (płyta rzeczywista)



$\mathbf{x} = \underline{x}(x_1, x_2)$ \mathbf{x} punkt źródłowy
 $\mathbf{y} = \underline{y}(x_1, x_2)$ \mathbf{y} punkt obserwacji

Rys. 1. Wielkości występujące w równaniach równowagi
 Fig. 1. Variables present in the equilibrium equations

Dyskretyzacji brzegu płyty dokonano przy użyciu elementów typu „constans”. W celu wyeliminowania całek osobliwych punkt źródłowy został nieznacznie odsunięty na zewnątrz obszaru płyty [2].

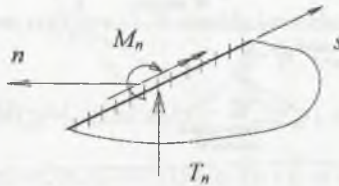
2. Warunki brzegowe

W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione brzegowe równania całkowe odpowiadające trzem rodzajom warunków brzegowych.

2.1. Brzeg utwierdzony

Warunki brzegowe:

$$w = 0, \quad \varphi_n = 0 \quad \varphi_s = 0 \quad M_{ns} = 0. \quad (3)$$



Rys. 2. Wielkości niewiadome na brzegu utwierdzonym

Fig. 2. The unknowns on a clamped edge

Niewiadomymi wielkościami są siła poprzeczna T_n i moment zginający M_n (rys.2).

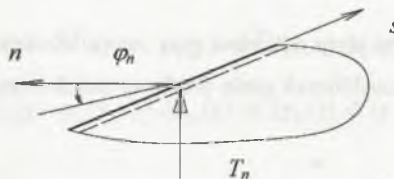
Brzegowe równania całkowe mają postać:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Gamma} [T_n(y) \cdot w^*(y, x) - M_n(y) \cdot \varphi_n^*(y, x)] \cdot d\Gamma(y) + \int_{\Omega} p(y) \cdot w^*(y, x) \cdot d\Omega(y) &= 0 \\ \int_{\Gamma} [T_n(y) \cdot \vec{w}(y, x) - M_n(y) \cdot \vec{\varphi}_n(y, x)] \cdot d\Gamma(y) + \int_{\Omega} p(y) \cdot \vec{w}(y, x) \cdot d\Omega(y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2.2. Brzeg podparty swobodnie

Warunki brzegowe:

$$w = 0, \quad M_n = 0 \quad \varphi_s = 0 \quad M_{ns} = 0. \quad (5)$$



Rys. 3. Wielkości niewiadome na brzegu podpartym swobodnie

Fig. 3. The unknowns on simply-supported edge

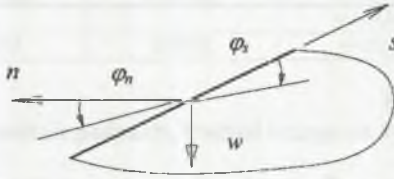
Niewiadomymi wielkościami są siła poprzeczna T_n i kąt obrotu w kierunku normalnym do elementu φ_n (rys.3). Brzegowe równania całkowe mają postać:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Gamma} [-M_n^*(y, x) \cdot \varphi_n(y)] \cdot d\Gamma(y) &= \int_{\Gamma} [T_n(y) \cdot w^*(y, x)] \cdot d\Gamma(y) + \int_{\Omega} p(y) \cdot w^*(y, x) \cdot d\Omega(y) \\ \int_{\Gamma} [-\bar{M}_n^*(y, x) \cdot \varphi_n(y)] \cdot d\Gamma(y) &= \int_{\Gamma} [T_n(y) \cdot \bar{w}^*(y, x)] \cdot d\Gamma(y) + \int_{\Omega} p(y) \cdot \bar{w}^*(y, x) \cdot d\Omega(y) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

2.3. Brzeg swobodny

Warunki brzegowe:

$$T_n = 0, \quad M_n = 0, \quad M_{ns} = 0. \quad (7)$$



Rys. 4. Wielkości niewiadome na brzegu swobodnym
Fig. 4. The unknowns on a free edge

Niewiadomymi wielkościami są ugięcie w oraz kąty obrotu w kierunku normalnym i stycznym do elementu φ_n i φ_s (rys.4). Ponieważ relacja pomiędzy φ_s i w jest znana, $\varphi_s = \frac{\partial w}{\partial s}$, rozważa się jedynie dwa niezależne parametry: w oraz φ_n . Brzegowe równania całkowe mają postać:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Gamma} [T_n^*(y, x) \cdot w(y) - M_n^*(y, x) \cdot \varphi_n(y) - M_{ns}^* \frac{\partial w}{\partial s}(y)] \cdot d\Gamma(y) &= \int_{\Omega} p(y) \cdot w^*(y, x) \cdot d\Omega(y) \\ \int_{\Gamma} [\bar{T}_n^*(y, x) \cdot w(y) - \bar{M}_n^*(y, x) \cdot \varphi_n(y) - \bar{M}_{ns}^* \frac{\partial w}{\partial s}(y)] \cdot d\Gamma(y) &= \int_{\Omega} p(y) \cdot \bar{w}^*(y, x) \cdot d\Omega(y) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

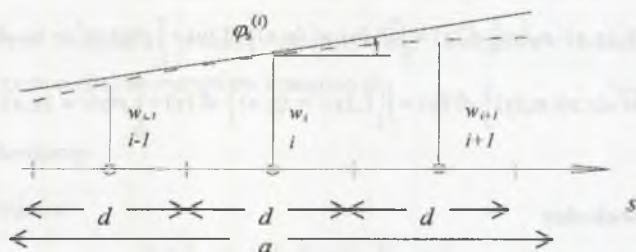
W obydwu równaniach $\frac{\partial w}{\partial s}$ można obliczyć budując iloraz różnicowy przy użyciu trzech sąsiednich węzłów (rys.5):

$$\varphi_s^{(i)} = \frac{1}{2d} (w_{i+1} - w_{i-1}), \quad (9)$$

$$\varphi_s^{(i-1)} = \frac{1}{d} \left(-\frac{3}{2} w_{i-1} + 2w_i - \frac{1}{2} w_{i+1} \right), \quad (10)$$

$$\varphi_s^{(i+1)} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{2} w_{i-1} - 2w_i + \frac{3}{2} w_{i+1} \right). \quad (11)$$

Wyrażenia (10) i (11) stosuje się dla węzłów położonych na początku i na końcu krawędzi swobodnej.

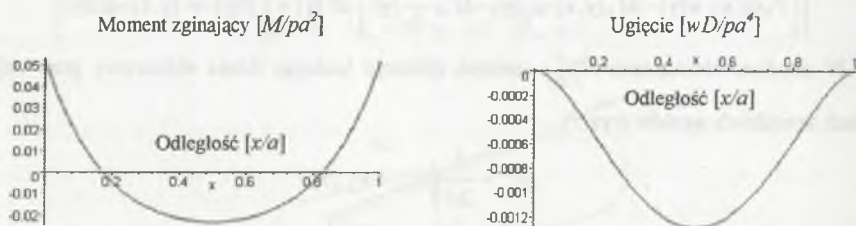


Rys. 5. Kąt obrotu stycznej do elementu na brzegu swobodnym
Fig. 5. The angle of rotation in tangent direction on a free boundary

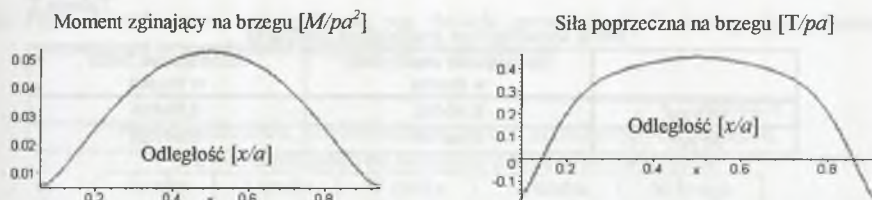
3. Przykłady obliczeń

Przeprowadzono obliczenia dla płyty kwadratowej i prostokątnej obciążonej równomiernie na powierzchni. Brzeg płyty podzielono na elementy o równej długości. Wyniki przedstawiono w wielkościach bezwymiarowych. Obliczenia przeprowadzono przyjmując współczynnik Poissona $\nu = 0.3$ oraz położenie punktu kolokacji $\varepsilon = \Delta/d = 0.001$, gdzie Δ - odległość punktu kolokacji od elementu, d - długość elementu. Całki quasi-diagonalne macierzy charakterystycznej obliczono analitycznie, a pozostałe numerycznie, wykorzystując dwunastopunktową kwadraturę Gaussa.

3.1. Płyta kwadratowa utwierdzona na obwodzie. Podział brzegu na 44 elementy



Rys. 6a. Płyta kwadratowa utwierdzona. Moment zginający i ugięcie wzdłuż osi symetrii płyty
Fig. 6a. Clamped square plate. Bending moment and deflection along the symmetry axis



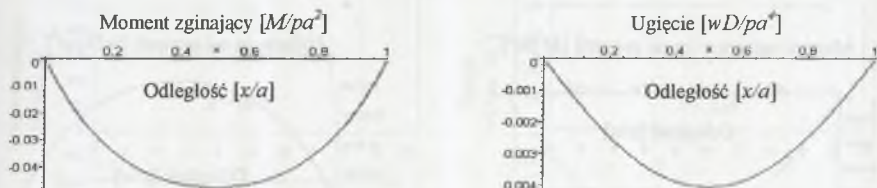
Rys. 6b. Płyta kwadratowa utwierdzona. Moment zginający i siła poprzeczna na brzegu
 Fig. 6b. Clamped square plate. Bending moment and shear force along the edge

Tabela 1

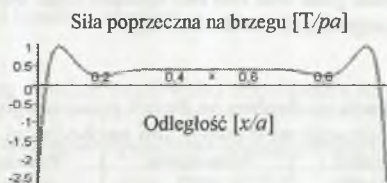
Płyta kwadratowa, utwierdzona

	Rozwiązanie analityczne na brzegu	Rozwiązanie MEB na brzegu	Rozwiązanie analityczne w środku	Rozwiązanie MEB w środku
$wD/\rho a^4$	-	-	0.00126	0.00128
$M/\rho a^2$	0.0513	0.0524	0.0231	0.0231

3.2. Płyta kwadratowa swobodnie podparta. Podział brzegu na 44 elementy



Rys. 7a. Płyta kwadratowa podparta swobodnie. Moment zginający i ugięcie wzdłuż osi symetrii płyty
 Fig. 7a. Simply-supported square plate. Bending moment and deflection along the symmetry axis

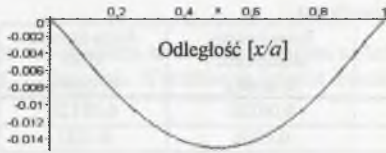
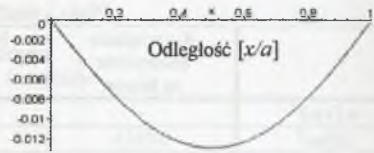


Rys. 7b. Płyta kwadratowa podparta swobodnie. Siła poprzeczna na brzegu
 Fig. 7b. Simply-supported square plate. Shear force on the edge

Tabela 2

Płyta kwadratowa swobodnie podparta		
	Rozwiązanie analityczne w środku	Rozwiązanie MEB w środku
wD/pa^4	0.00406	0.00406
M/pa^2	0.04790	0.04788

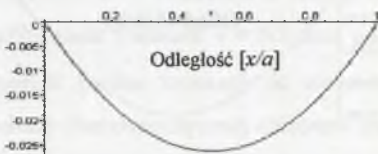
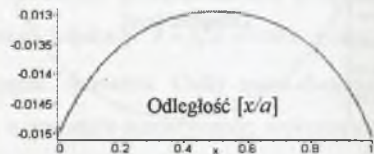
3.3. Płyta kwadratowa podparta swobodnie na dwóch przeciwległych brzegach, z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi. Podział brzegu na 44 elementy

Ugięcie na krawędzi swobodnej [wD/pa^4]Ugięcie na osi symetrii [wD/pa^4]

Rys. 8a. Płyta kwadratowa swobodnie podparta, z dwoma przeciwległymi krawędziami swobodnymi.

Ugięcie na osi symetrii równoległej do krawędzi swobodnej oraz wzdłuż krawędzi swobodnej

Fig. 8a. Simply-supported square plate with two free opposite edge. Deflection on the symmetry axis parallel to the free edge and along the free edge

Moment zginający na osi symetrii [M/pa^2]Ugięcie na osi symetrii [wD/pa^4]

Rys. 8b. Płyta kwadratowa swobodnie podparta, z dwoma przeciwległymi krawędziami swobodnymi.

Moment zginający i ugięcie na osi symetrii płyty prostopadłej do krawędzi swobodnej

Fig. 8b. Simply-supported square plate with two free opposite edge. Bending moment and deflection on the symmetry axis perpendicular to the free edge

Tabela 3

Płyta kwadratowa, podparta swobodnie na dwóch przeciwległych brzegach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi

	Rozwiązanie analityczne na brzegu	Rozwiązanie MEB na brzegu	Rozwiązanie analityczne w środku	Rozwiązanie MEB w środku
wD/pa^4	0.01509	0.01506	0.01309	0.01294
M_x/pa^2	0.1318	0.1324	0.1225	0.1211
M_y/pa^2	-	-	0.0271	0.0262

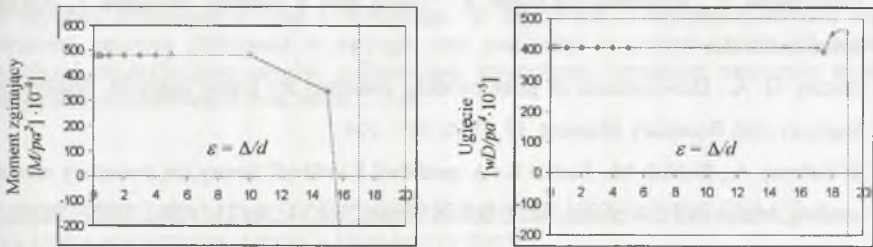
3.4. Płyta kwadratowa utwierdzona na dwóch przeciwległych brzegach, z dwoma pozostałymi krawędziami podpartymi swobodnymi

Tabela 4
Płyta kwadratowa, utwierdzona na dwóch przeciwległych brzegach,
z dwoma pozostałymi brzegami podpartymi swobodnie

Liczba elementów	W środku [wD/pa ⁴]	W środku [M _x /pa ²]	W środku [M _y /pa ²]	Na brzegu [M _y /pa ²]
MEB 28	0.00194	0.0335	0.0245	-0.0713
MEB 44	0.00194	0.0336	0.0245	-0.0711
MEB 60	0.00194	0.0336	0.0245	-0.0709
Rozw.anal.	0.00192	0.0332	0.0224	-0.0697

Analizowano również płyty prostokątne o różnych warunkach brzegowych i porównywano wyniki ze znanymi rozwiązaniami analitycznymi [1]. Podobnie jak dla płyt kwadratowych zbieżność wyników numerycznych i analitycznych jest dobra.

3.5. Analiza wrażliwości rozwiązania na parametr odsunięcia punktu kolokacji $\varepsilon = \Delta/d$. Płyta kwadratowa, podparta swobodnie. Podział brzegu na 44 elementy



Rys. 9. Płyta kwadratowa podparta swobodnie. Analiza wrażliwości momentu zginającego i ugięcia na parametr $\varepsilon = \Delta/d$. 44 elementy brzegowe

Fig. 9. Simply-supported square plate. Sensibility analysis of bending moment and deflection to the parameter $\varepsilon = \Delta/d$. 44 boundary elements

Tabela 5a
Płyta kwadratowa. Analiza wrażliwości rozwiązania na parametr $\varepsilon = \Delta/d$

$\varepsilon = \Delta/d$	0.001	0.01	0.05	0.1	0.5	1.0	2.0
$M/pa^2 \cdot 10^{-4}$	478.8325	478.7507	478.6974	478.4828	478.7765	478.7197	478.5331
$wD/pa^4 \cdot 10^{-5}$	406.3325	406.2733	406.0716	405.9365	406.1962	406.1235	405.9858

Tabela 5b
Płyta kwadratowa. Analiza wrażliwości rozwiązania na parametr $\varepsilon = \Delta/d$

$\varepsilon = \Delta/d$	3.0	4.0	5.0	10.0	15.0	17.5	20.0
$M/pa^2 \cdot 10^{-4}$	479.0094	478.8841	479.3124	478.8236	334.0903	21408.32	3241958.0
$wD/pa^4 \cdot 10^{-5}$	406.3040	406.2375	406.2345	406.2352	406.1295	391.1743	-12906.73

4. Wnioski

Proponowana metoda rozwiązywania zadania zginania płyty cechuje się szybką zbieżnością wyników już przy niewielkim stopniu dyskretyzacji. W prezentowanym sformułowaniu nie stosuje się na brzegu zastępczych sił poprzecznych i sił skupionych w narożach płyty. Przyjęcie punktów kolokacji na zewnątrz obszaru płyty eliminuje obliczanie całek osobliwych. Analiza wrażliwości rozwiązania ze względu na parametr $\varepsilon = \Delta/d$ pokazuje, że można zastosować całkowanie numeryczne dla wszystkich elementów macierzy charakterystycznej.

LITERATURA

1. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.: Teoria płyt i powłok, Wydanie 1, Arkady, Warszawa 1962.
2. Hartley G. A.: Development of plate bending elements for frame analysis, Engineering Analysis with Boundary Element, 17, 1996, 93 – 104 .
3. El-Zafrany A., Debbih M., Fadhil S.: A modified Kirchhoff theory for boundary element bending analysis of thin plates, Int. J. Solids Struct., vol.31, No.21, 1994, 2885 – 2889.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Tadeusz Burczyński

Abstract

The boundary element method (BEM) is often used in the theory of both thin and thick plates. It is particularly suitable to analyse the plates of arbitrary shapes and resting on column supports. The paper presents a modified approach in which three geometric and three static variables at the plate boundary are considered. The present formulation is a development of the model with two degrees-of-freedom per boundary node. The collocation version of the boundary element method with constant elements and non-singular calculations of integrals is adopted. The displayed boundary element results demonstrate the effectiveness and efficiency of the proposed method.