

Rafał KRZYWON\*  
Politechnika Śląska

## SZTYWNOŚĆ MIMOŚRODOWO OBCIĄŻONYCH PRĘTÓW ŻELBETOWYCH SYMETRYCZNIE ZBROJONYCH

**Streszczenie.** Sztywność prętów żelbetowych zmienia się w procesie obciążenia. Zmiany są spowodowane m.in. rysowaniem się przekroju, nieliniowym przebiegiem zależności  $\sigma$ - $\epsilon$ . W pracy podjęto próbę analizy zmian sztywności symetrycznie zbrojonego elementu przekroju. Analizy wykonano wykorzystując program MAFEM bazujący na sprężysto-plastycznym modelu materiałowym betonu ze stowarzyszonym prawem izotropowego wzmocnienia/osłabienia.

## STIFFNESS OF ECCENTRICALLY LOADED RC BARS SYMMETRICALLY REINFORCED

**Summary.** Stiffness of RC bars varies with the loading process. Changes are caused by concrete cracking and nonlinear strain-stress relationship. The analysis of stiffness changes for symmetrical RC bar are presented in the paper. Results given in form of a stiffness map put on typical interaction diagram. Analysis were performed using program MAFEM based on elasto-plastic material model with associated, isotropic hardening/softening rule.

### 1. Wstęp

Sztywność prętów żelbetowych zmienia się wraz z wyężeniem przekroju. Matematyczne oszacowanie tych zmian nie jest łatwe. W złożonym materiale, jakim jest żelbet, komplikuje je w głównej mierze charakterystyka materiałów składowych, oraz proces zarysowania betonu w strefie rozciąganej.

---

\*Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Stanisław Majewski, prof. Politechniki Śląskiej

Pomimo ogromnego rozwoju komputerowych technik obliczeniowych na przestrzeni lat 90 XX wieku, żelbetowe konstrukcje prętowe powszechnie projektuje się na podstawie sił wewnętrznych wyznaczonych przy założeniu liniowej sprężystości materiału.

Coraz częściej przepisy normowe różnych krajów, jak również przepisy międzynarodowe zalecają stosowanie w praktyce nieliniowych metod analizy konstrukcji żelbetowych. Dla potrzeb inżynierskich umożliwiają one przede wszystkim dokładne szacowanie deformacji.

Czynniki wpływające na sztywność przekroju możemy podzielić na trzy zasadnicze grupy:

- parametry geometryczne, takie jak wymiary przekroju, powierzchnia i usytuowanie zbrojenia,
- parametry materiałowe, określające odkształcalność i kryteria zniszczenia betonu oraz stali, a w przypadku uwzględniania wpływów długotrwałych także właściwości reologiczne tych materiałów,
- obciążenie, a raczej wyężenie przekroju dla pewnej kombinacji sił osiowych, tnących i momentu zginającego.

Na temat zjawiska zmian sztywności przekroju zginanego powstało dotychczas bardzo wiele teorii opracowanych zarówno przez badaczy polskich i zagranicznych [1], [2]. Słabiej pod tym względem rozpoznane, szczególnie na drodze doświadczalnej, wydają się przekroje obciążone z udziałem siły osiowej [3]. Przyczyn tego należy dopatrywać się w dużej liczbie możliwych kombinacji obciążenia, których uwzględnienie, przynajmniej dla kilku typów przekroju wymagałoby niezwykle szerokich i przy okazji drogich badań laboratoryjnych.

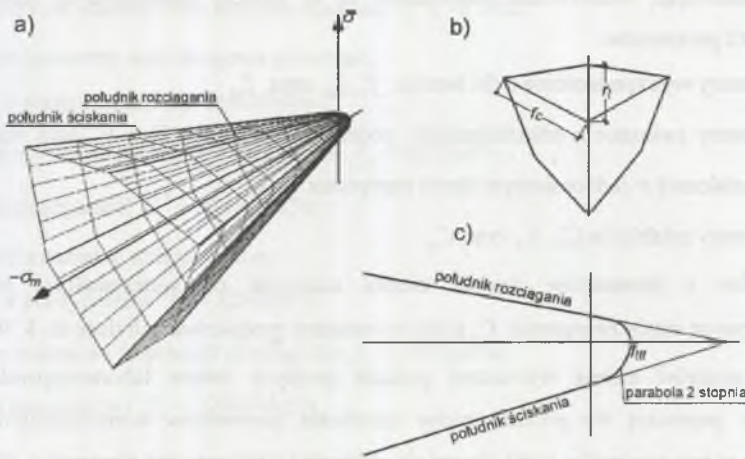
Rozwój opartych na MES narzędzi do nieliniowej analizy konstrukcji żelbetowych umożliwia częściową rezygnację z drogich doświadczeń na rzecz znacznie szybszych i przy okazji tańszych analiz numerycznych. Jeden z takich modeli został opracowany w Katedrze Inżynierii Budowlanej Politechniki Śląskiej i wykorzystany do wykonania obliczeń prezentowanych w dalszej części referatu.

## 2. Zastosowane oprogramowanie

W obliczeniach wykorzystano pakiet programów MAFEM. Główny program liczący jest oparty na iteracyjno-przyrostowej procedurze z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych. Program umożliwia modelowanie konstrukcji w postaci ortogonalnej siatki

betonowych elementów prostopadłościennych z 24 stopniami swobody oraz stalowych elementów liniowych rozciągniętych pomiędzy węzłami tej siatki.

Beton opisano sprężysto-plastycznym modelem materiałowym ze stowarzyszonym izotropowym prawem wzmocnienia/osłabienia. Powierzchnia zniszczenia w przestrzeni naprężeń zdefiniowana poprzez naprężenie główne  $\sigma_m = \frac{J_1}{3}$ , intensywność naprężenia  $\bar{\sigma} = \sqrt{J_2^D}$  i kąt Lodego  $\Theta$  została schematycznie zaprezentowana na rysunku 1.



Rys. 1. Powierzchnia zniszczenia: a) widok w przestrzeni, b) przekrój dewiatorowy, c) przekrój południkowy

Fig. 1. Failure surface: a) 3D view b) deviatoric section, c) meridian section

Krzywa jej południka składa się z trzech części: linii prostej w części środkowej ( $d_c \leq \sigma_m \leq d_t$ ), kołowej nasadki w części rozciąganej ( $\sigma_m > d_t$ ), kołowej nasadki w części ściskanej ( $\sigma_m < d_c$ ). Przekrój dewiatorowy stanowi sześciokąt (kryterium Coulomba-Mohra).

Główna część tej powierzchni (prosty południk) jest dana wzorem:

$$F_1 = \bar{\sigma} - (\beta - 3\alpha\sigma_m)\gamma\rho_\Theta = 0,$$

$$\rho_\Theta = \frac{\rho_i\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\Theta + (2\rho_i - 1,0)\sin\Theta}, \quad (1)$$

$$\rho_i = \frac{r_t}{r_c},$$

gdzie:  $\alpha$  i  $\beta$  – parametry zależne od charakterystyki wytrzymałościowej,  $Y$  – funkcja odkształcenia,  $\vartheta$  – kąt Lodego.

Dwuparametrowe prawo osłabienia powoduje kurczenie się powierzchni granicznej poprzez zmniejszanie wartości  $f_{tu}$  zależnie od plastycznej części odkształcenia objętościowego i postaciowego, oraz poprzez zmniejszanie kąta pomiędzy kierunkiem naprężeń głównych a południkiem powierzchni zniszczenia zależnie od nieodwracalnej części odkształceń postaciowych.

Podsumowując, właściwości materiałowe są w modelu materiałowym zdefiniowane poprzez 10 parametrów:

- parametry wytrzymałościowe dla betonu:  $f_c$ ,  $f_{cc}$  oraz  $f_t$ ,
- parametry związane z odkształceniem: początkowe wartości  $E_i$  i  $\nu_i$  oraz maksymalne odkształcenie w jednoosiowym stanie naprężenia  $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_t$ ,
- parametry osłabienia:  $C_2$ ,  $C_3$  oraz  $C_4$ .

Niektóre z parametrów modelu można uzależnić od wytrzymałości betonu w jednoosiowym stanie naprężenia  $f_c$ , przez co możemy zredukować ich ilość do 8. Większość tych parametrów można wyznaczyć podczas prostych testów laboratoryjnych. Pewne problemy pojawiają się podczas próby określenia parametrów wzmocnienia/osłabienia. Pomocne w tym przypadku mogą okazać się obliczenia porównawcze elementów, dla których znane są dokładne wyniki testów laboratoryjnych.

Dla zbrojenia zastosowano idealnie sprężysto-plastyczny model materiałowy.

### 3. Analizowany model

Wszystkie analizy wykonano dla elementu prętowego, którego schemat wraz z podziałem na elementy skończone zaprezentowano na rysunku 2. Zastosowany schemat statyczny oraz sposób obciążenia umożliwiają uzyskanie odcinka o stałej wartości siły osiowej i momentu zginającego. W celu zmniejszenia liczby elementów analizie poddano 1/4 całego pręta, jednocześnie w osiach symetrii zastosowano podparcie każdego węzła siatki w kierunku prostopadłym do tych osi.



Belka została podzielona na 608 sześciennych elementów. Aby uniknąć lokalnych zniszczeń w części bezpośrednio obciążonej, elementy na końcu belki zastąpiono elementami o identycznej odkształcalności, ale zwiększonej wytrzymałości.

Poniżej przedstawiono przyjęte charakterystyki betonu:

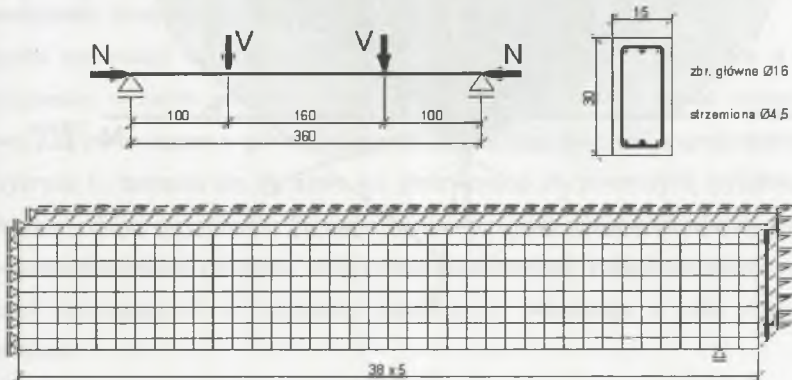
- jednoosiowa wytrzymałość na ściskanie:  $f_c = -29.2MPa$ ,
- wytrzymałość na rozciąganie:  $f_t = 2.3MPa$ ,
- początkowy moduł sprężystości i moduł Poissona  $E_i = 30762MPa$ ,  $\nu = 0.166$ ,
- maksymalne odkształcenie podczas ściskania  $\varepsilon_c = -0.0022$ .

Przyjęte parametry stali zbrojenia głównego:

- granica plastyczności  $f_y = \pm 400MPa$ ,
- wytrzymałość na ściskanie / rozciąganie  $f_y = \pm 633MPa$ ,
- moduł sprężystości  $E_s = 205000MPa$ .

Przyjęte parametry stali strzemion:

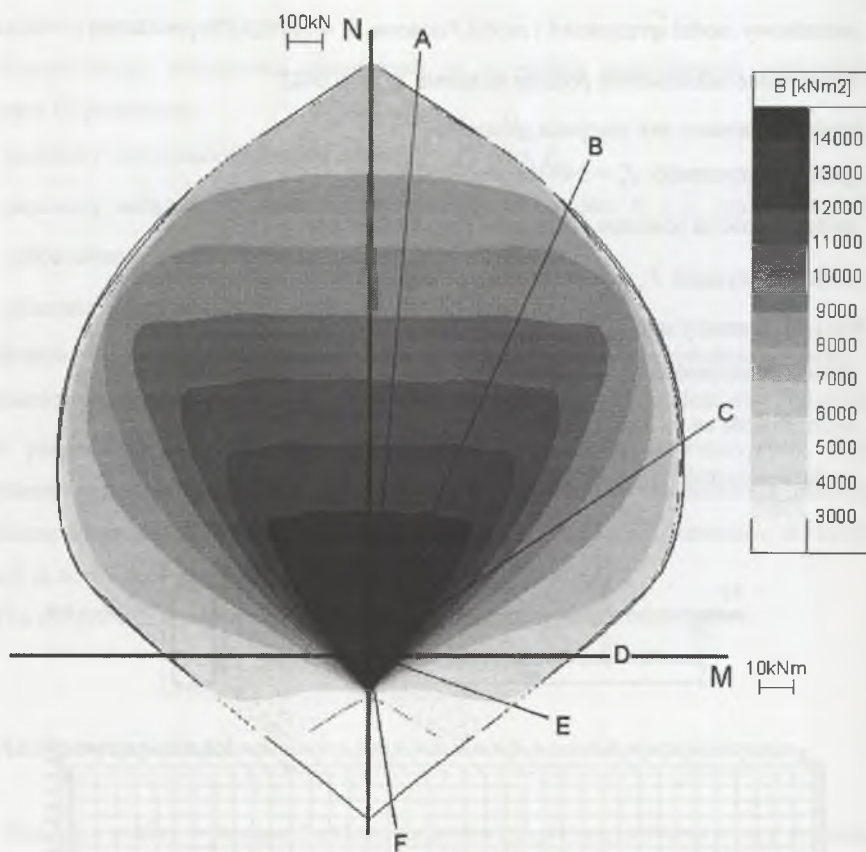
- granica plastyczności  $f_y = \pm 240MPa$ ,
- wytrzymałość na ściskanie / rozciąganie  $f_y = \pm 363MPa$ ,
- moduł sprężystości  $E_s = 190000MPa$ ,



Rys.2. Siatka podziału na elementy skończone oraz schematy obciążenia  
Fig.2. Finite element's mesh and local schemes

#### 4. Rezultaty analizy

Element obciążano siłami  $N$  i  $V$ . Założono takie przyrosty obciążenia, aby zniszczenie następowało w 40-45 kroku. Dla różnych kombinacji obciążenia wykonano wykres interakcji prezentowany na rysunku 3.



Rys.3. Wykres interakcji dla analizowanego elementu  
Fig.3. Interaction diagram for analysed element

Krzywiznę wyznaczono w funkcji obrotu przekroju z założeniem jego płaskości. Oś obrotu w przypadku przekrojów obciążonych z udziałem siły osiowej sprowadzono do środka ich symetrii.

W każdym kroku obciążenia wyznaczono sztywność w przekroju środkowym, korzystając z zależności:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{B}, \quad (2)$$

gdzie:  $\rho$  - promień krzywizny,  $B$  - sztywność giętna,  $\frac{1}{\rho}$  - krzywizna.

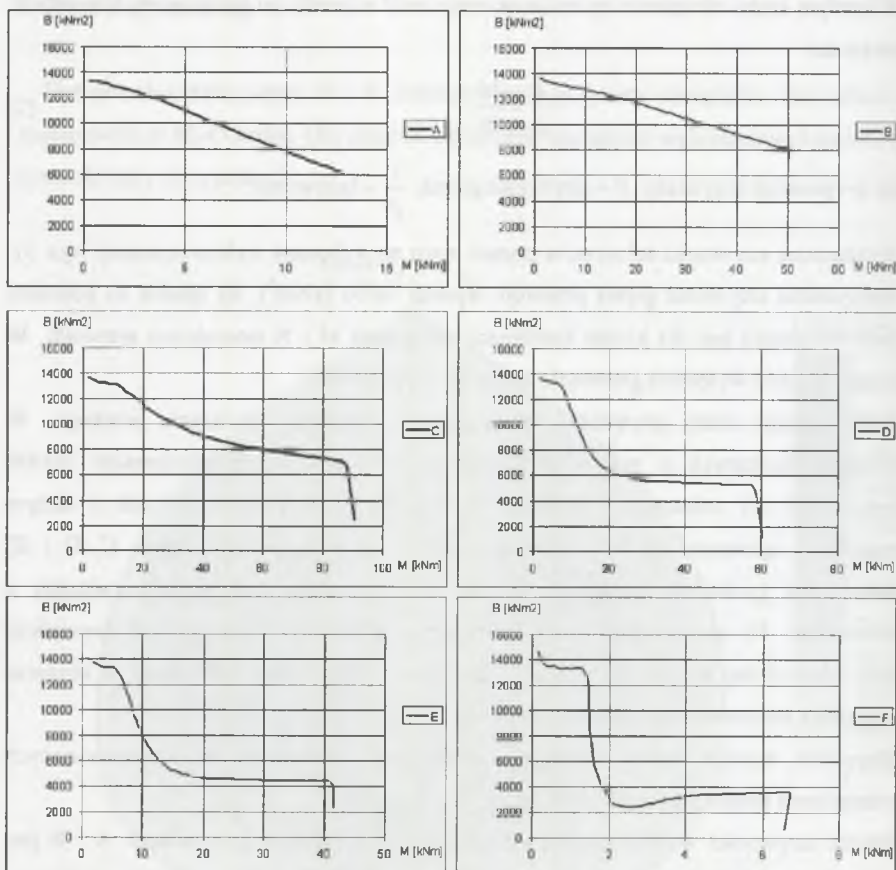
Wyznaczone sztywności nałożono w postaci mapy na wykonany wykres interakcji (rys. 3).

Maksymalna sztywność giętna przekroju wynosi 14000 [kNm<sup>2</sup>]. Jej spadek na początku procesu obciążania jest dla każdej kombinacji obciążenia M i N stosunkowo niewielki. W granicach 15-20% wyężenia sztywność spada do 13000 [kNm<sup>2</sup>].

Dalszy proces utraty sztywności zależy już od charakteru obciążenia przekroju. W przekrojach ściskanych z małym mimośrodem utrzymuje się proporcjonalny spadek sztywności aż do zniszczenia (przekrój A, B). W przekrojach ściskanych z dużym mimośrodem, zginanych lub rozciąganych z dużym mimośrodem (przekroje C, D i E) widoczny jest gwałtowny spadek sztywności (duże zagęszczenie izolinii) związany z zarysowaniem. Po zarysowaniu aż do zniszczenia sztywność maleje już w niewielkim stopniu. Największy spadek sztywności związany z zarysowaniem występuje w obszarze rozciągania z małym mimośrodem (przekrój F).

Wszystkie opisane wyżej sytuacje zobrazowano dodatkowo na odpowiadających poszczególnym przekrojom wykresach (rys.4).

Spadek sztywności w odpowiadających dużemu mimośrodkowi przypadkach A i B jest proporcjonalny w całym zakresie obciążenia. Obserwowane zmiany opisać można funkcją liniową, a są one związane w głównej mierze ze zmianą wartości modułu sprężystości betonu. Na wykresie C zaznacza się wyraźnie już obserwowana na pozostałych wykresach utrata sztywności podczas zarysowania. Po zarysowaniu sztywność osiąga poziom utrzymywany ze stosunkowo niewielkimi zmianami aż do momentu zniszczenia. Poziom ten zależy od udziału naprężeń rozciągających w wyężeniu przekroju, i związanego z nimi obszaru jego zarysowania.



Rys.4. Wykresy przekrojowe zmian sztywności  
 Fig.4. Section diagrams of stiffness changes

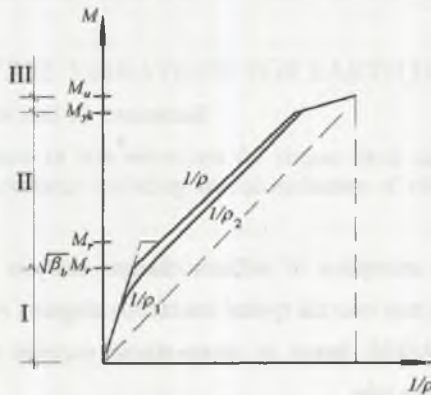
Zniszczenie jest najbardziej gwałtowne w przypadkach A i B. W sytuacjach, w których o zniszczeniu decyduje uplastycznienie stali (szczególnie D), można wyodrębnić jeszcze trzecią gałąź wykresu, związaną z powstawaniem przegubu plastycznego, dla której niewielkiemu przyrostowi sił wewnętrznych towarzyszy bardzo gwałtowna utrata sztywności.



## 5. Podsumowanie

Ze względu na sztywność można wyróżnić trzy podstawowe fazy pracy przekroju mimośrodowo obciążonego: faza I - przekrój niezarysowany, faza II – przekrój zarysowany, faza III – uplastycznienie przekroju. Zmiany sztywności w obrębie każdej z faz są niewielkie. Przejście do następnej fazy jest wyraźnie sygnalizowane dużym spadkiem sztywności. Wynik ten jest zgodny z przyjętą przez CEB-FIP [5] metodą aproksymacji pracy przekroju mimośrodowo obciążonego w postaci trójczłonowego wykresu zależności  $M - \frac{1}{\rho}$  (rys. 5).

W przypadku przebrojenia strefy rozciąganej przekroju lub obciążeń z niewielkim mimośrodem, czyli sytuacji w których o nośności przekroju decyduje nośność betonu na ściskanie, nie występują fazy II i III. Zniszczenie w tych przypadkach jest gwałtowne.



Rys.5. Propozycja CEB-FIP dla zależności moment – krzywizna (elementy mimośrodowo ściskane)  
Fig.5. CEB-FIP MC Moment – curvature relationship (eccentrically loaded elements)

Najgwałtowniejszy spadek sztywności towarzyszy zarysowaniu. Jego wielkość zależy od rozmiaru strefy zarysowanej przekroju.

Trójczłonowy model pracy przekroju wymaga uwzględnienia, oprócz wartości momentu rysującego, także modelu zniszczenia, od którego zależy proces utraty sztywności. Długość oraz nachylenie gałęzi wykresu odpowiadających pracy w poszczególnych fazach zależą od kombinacji obciążeń M i N.

## LITERATURA

1. Kuczyński W.: Konstrukcje betonowe. Kontynuacja teorii zginania żelbetu, PWN, Warszawa 1971.
2. Janowski Z.: Sztywność zginanych elementów żelbetowych, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, nr 5/1974.
3. Bąk G., Szcześniak Z.: Uogólnione związki fizyczne dla przekrojów żelbetowych mimośrodowo ściskanych, Arch. Inż. Łąd., XXXVII, 3-4, 1991, s.317-343.
4. Majewski S., Wandzik G., Krzywoń R.: Numeryczna i doświadczalna weryfikacja pakietu programów MAFEM do obliczania metodą MES konstrukcji żelbetowych i rozwiązywania problemów współpracy budowli z podłożem, XLV Konferencja naukowa Krynica 1999, tom 2 Konstrukcje Betonowe, s. 167-174.
5. CEB-FIP model code 1990, First Draft, Bulletin D'Information 195, March 1990.

Recenzent: Dr hab. inż. Zbigniew Szcześniak

**Abstract**

Paper presents an attempt of stiffness changes analysis for symmetrical RC bar. Results are presented as a map over the typical interaction diagram. Analysis were performed using FEM program MAFEM, based on elasto-plastic material model with associated, isotropic hardening/softening rule.

Stiffness of RC bars varies with the load intensity. Changes are caused by cracing of the section, nonlinear strain-stress relationship. We can distinguish three main phases for behaviour of eccentrically loaded bar: phase I – noncracked section, phase II – cracked section, phase III – critical state. In case of size of eccentricity and reinforcing ratio length of every phase during the loading process differs. In some cases phases II and III may not occur. For compression with small eccentricity only phase I appears and is finished by the concrete crushing. Clasical three-phase relationship is typical for process dominated by bending.