ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: BUDOWNICTWO z. 95 Nr kol.1559

Tomasz LISZKA*
Politechnika Śląska

ZASTOSOWANIE TWIERDZENIA GERSZGORINA DO OSZACOWANIA WARTOŚCI WŁASNYCH WIELOWYMIAROWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH O PARAMETRACH PRZEDZIAŁOWYCH

Streszczenie. Twierdzenie Gerszgorina pozwala nam na wyznaczenie zbioru na płaszczyźnie zespolonej, w którym zawarte są wszystkie wartości własne uogólnionego zagadnienia własnego $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{Bx}$. Uogólniając to twierdzenie na liczby przedziałowe, można wykorzystać je do oszacowania obszaru, w którym zawarte są wszystkie wartości własne przedziałowego zadania własnego $[\mathbf{A}]\mathbf{x}=\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}$. W teorii konstrukcji obszary te możemy wykorzystać do oszacowania częstości drgań własnych i analizy stabilności wielowymiarowych układów dynamicznych o parametrach niepewnych.

GERSHGORIN THEOREM APPLICATION TO EIGENVALUES ESTIMATION OF MULTIDIMENSIONAL DYNAMIC SYSTEMS WITH INTERVAL PARAMETERS

Summary. Gershgorin theorem makes it possible to determine a set of disks containing all eigenvalues of generalized eigenvalue problem $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{Bx}$. Extension of this theorem over interval numbers gives possibility to estimate the region containing all eigenvalues of interval generalized eigenvalue problem $[\mathbf{A}]\mathbf{x}=\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}$. In theory of structures the Gershgorin regions can be used for eigenfrequency estimation and stability analysis of multidimensional dynamic systems with interval parameters.

1. Twierdzenie Gerszgorina dla macierzy przedziałowych

W pracy rozpatrywane będzie twierdzenie Gerszgorina, które zostanie wykorzystane do oszacowania wartości własnych uogólnionego zagadnienia własnego o postaci $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{Bx}$ dla macierzy o niepewnych parametrach $\mathbf{A}\in[\mathbf{A}]$ i $\mathbf{B}\in[\mathbf{B}]$. Z potrzebą oszacowania tych wielkości spotykamy się często w zagadnieniach inżynierskich, w szczególności w analizie stabilności

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Jerzy Skrzypczyk, prof. Politechniki. Śląskiej

dynamicznej systemów technicznych, w których parametry są znane tylko z pewną tolerancją. Wiele kryteriów stabilności opiera się na analizie położenia wartości własnych na płaszczyźnie zespolonej, i na tej ocenie rozstrzygają, czy układ dynamiczny jest stabilny czy też niestabilny. Przedstawione w dalszej części pracy twierdzenia pozwalają na zlokalizowanie wartości własnych układów wielowymiarowych układów dynamicznych o parametrach przedziałowych na płaszczyźnie zespolonej, a w związku z tym na ocenę stabilności tych układów.

1.1. Twierdzenie Gerszgorina dla uogólnionego zagadnienia własnego Ax=λBx

W pracy zostaną podane nowe formy twierdzenia Gerszgorina, które pozwolą na lokalizację wartości własnych na płaszczyźnie zespolonej wielowymiarowych układów. W dalszej części pracy stosowana będzie notacja: R – zbiór liczb rzeczywistych, R^n – zbiór wektorów rzeczywistych, R^{nxn} – zbiór macierzy rzeczywistych o wymiarach nxn. Zbiór przedziałów rzeczywistych IR oraz IR^n – zbiór wektorów przedziałowych, IR^{nxn} – zbiór macierzy przedziałowych. W pracy będzie używana norma wektora przedziałowego $[\mathbf{x}_i] \in IR^n$ zdefiniowana następująco $\|[\mathbf{x}_i]\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |[\mathbf{x}_i]|$, gdzie $|[\mathbf{x}_i]| = \max\left(|\mathbf{x}_i^-|, |\mathbf{x}_i^+|\right)$.

Dla każdej pary przedziałowych macierzy $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ i $\mathbf{B} \in [\mathbf{B}]$, gdzie $[\mathbf{A}], [\mathbf{B}] \in IR^{nxn}$ wartości własne przedziałowego uogólnionego zadania własnego $[\mathbf{A}]\mathbf{x}=\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}$ zawierają się w obszarach Gerszgorina zdefiniowanych następująco:

$$\mathrm{IGG}([\mathbf{A}],[\mathbf{B}]) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{IGG}_i([\mathbf{A}],[\mathbf{B}]), \tag{1}$$

gdzie:

$$IGG_i([\mathbf{A}],[\mathbf{B}]) = \bigcup_{\substack{a_{ii}\in[a_{ii}] \\ b_{ii}\in[b_{ii}]}} \left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{a_{ii}}{b_{ii}} \right| \le \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left\| [a_{ii}][b_{ij}] - [b_{ii}][a_{ij}] \right\|_1}{b_i'} \right\}, \tag{2}$$

$$b_i' = \max\left(0, \langle [b_{ii}]^2 \rangle - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left\| [b_{ii}][b_{ij}] \right\|_1 \right), \quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Aby udowodnić to twierdzenie, równanie charakterystyczne $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{B}\mathbf{x}$ zapiszemy w postaci:

$$a_{ii}x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j = \lambda(b_{ii}x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}x_j), \tag{3}$$

a następnie przekształcając je możemy obliczyć wartości własne:

$$\lambda = \frac{(a_{ii}x_i + \sum_{j,j\neq i} a_{ij}x_j)}{(b_{ii}x_i + \sum_{j,j\neq i} b_{ij}x_j)}. \tag{4}$$

Jeżeli ponadto przyjmiemy, że i-ta współrzędna wektora **x** przyjmuje wartość maksymalną, tj. $|x_i| = \max_k |x_k| = 1$, możemy zapisać:

$$\left|\lambda - \frac{a_{ii}}{b_{ii}}\right| = \left|\frac{a_{ii}}{b_{ii}} - \frac{a_{ii} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j}{b_{ii} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}x_j}\right| = \left|\frac{a_{ii}(b_{ii} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}x_j) - b_{ii}(a_{ii} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j)}{b_{ii}(b_{ii} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}x_j)}\right| =$$

$$= \frac{\left|\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(a_{ii}b_{ij} - b_{ii}a_{ij})x_j\right|}{\left|b_{ii}^2 + b_{ii}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}x_j\right|} \leq \frac{\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ii}b_{ij} - b_{ii}a_{ij}||x_j|}{\left|b_{ii}^2 + b_{ii}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}x_j\right|} \leq \frac{\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ii}b_{ij} - b_{ii}a_{ij}|}{\left|b_{ii}^2 + b_{ii}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}x_j\right|}. \tag{5}$$

Mając na uwadze, że elementy macierzy są liczbami przedziałowymi $a_{ij} \in [a_{ij}]$, $b_{ij} \in [b_{ij}]$, działania na tych liczbach wykonamy zgodnie z arytmetyką przedziałową, uwzględniając, że infimum modułu liczby interwałowej definiujemy $\langle x \rangle = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } 0 \in [x^-, x^+] \\ \min\{|x^-|, |x^+|\} & \text{jeżeli } 0 \notin [x^-, x^+] \end{cases}$

ostatecznie wielkość $\left|\lambda - \frac{a_{ii}}{b_{ii}}\right|$ oszacujemy:

$$\left|\lambda - \frac{a_{ii}}{b_{ii}}\right| \leq \frac{\sup_{\substack{a_{ij}\in[a_{ij}] \\ b_{ij}\in[b_{ij}]}} \sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ii}b_{ij} - b_{ii}a_{ij}|}{\inf_{b_{ij}\in[b_{ij}]}\left|b_{ii}^2 + b_{ii}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}x_j\right|} \leq \frac{\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|[a_{ii}][b_{ij}] - [b_{ii}][a_{ij}]\|_1}{b_i'}, \tag{6}$$

gdzie:

$$b_i' = \max\left(0, \langle [b_{ii}]^2 \rangle - \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\|[b_{ii}][b_{ij}]\|_1\right).$$

W wyrażeniu (6) mianownik został oszacowany następująco:

$$\left|b_{ii}^2 + b_{ii}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}x_j\right| \geq \left|b_{ii}^2 - \left|b_{ii}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}x_j\right|\right| \geq \left|b_{ii}^2 - \left|\sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ii}b_{ij}x_j\right|\right|$$

$$\geq \left|b_{ii}^2 - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \left|b_{ii}b_{ij}\right|\left|x_j\right|\right| \geq \left|b_{ii}^2 - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \left|b_{ii}b_{ij}\right|\right| \tag{7}$$

$$\geq \max\left(0, b_{ii}^2 - \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left|b_{ii}b_{ij}\right|, \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left|b_{ii}b_{ij}\right| - b_{ii}^2\right) \geq$$

$$\geq \max\left(0, \langle[b_{ii}]^2\rangle - \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left\|[b_{ii}][b_{ij}]\right\|_1\right) \equiv b_i' \qquad \text{c.n.d.}$$

W ten sposób oszacowany został zbiór wartości własnych równania $[\mathbf{A}]\mathbf{x}=\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}$ o macierzach przedziałowych. Twierdzenie to można wykorzystać do analizy stabilności wielowymiarowych układów dynamicznych, których ruch opisuje równanie różniczkowe Lagrange'a II rodzaju $[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{y}} + [\mathbf{D}]\dot{\mathbf{y}} + [\mathbf{K}]\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Przekształcając je do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{Bmatrix} [\mathbf{K}] & 0 \\ 0 & [\mathbf{M}] \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & [\mathbf{K}] \\ -[\mathbf{K}] & [\mathbf{D}] \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix}, \tag{8}$$

które możemy zapisać $[\mathbf{B}]\dot{\mathbf{z}}=[\mathbf{A}]\mathbf{z}$, dla którego badanie stabilności i oszacowanie częstości drgań własnych sprowadza się do analizy uogólnionego zagadnienia własnego $([\mathbf{A}]-\lambda[\mathbf{B}])\mathbf{w}=0$.

1.2. Twierdzenie Gerszgorina dla przedziałowych macierzy symetrycznych (IGSG)

Macierze przedziałowe możemy zapisać w postaci:

$$[\mathbf{A}] = \mathrm{mid}([\mathbf{A}]) + [\Delta\mathbf{A}], \quad [\mathbf{B}] = \mathrm{mid}([\mathbf{B}]) + [\Delta\mathbf{B}], \tag{9}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} &mid([\mathbf{A}]) = 0.5(\mathbf{A}^- + \mathbf{A}^+), \quad [\Delta\mathbf{A}] = [\Delta\mathbf{A}^- = -0.5(\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-), \Delta\mathbf{A}^+ = 0.5(\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-)] \\ &mid([\mathbf{B}]) = 0.5(\mathbf{B}^- + \mathbf{B}^+), \quad [\Delta\mathbf{B}] = [\Delta\mathbf{B}^- = -0.5(\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-), \Delta\mathbf{B}^+ = 0.5(\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Jeżeli ponadto macierze mid([**A**]) i mid([**B**]) są symetryczne, możemy dokonać równoczesnej diagonalizacji tych macierzy mnożąc obustronnie macierze [**A**], [**B**] przez macierze diagonalizujące $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}$, gdzie $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}=1$. Po wykonaniu tych działań otrzymujemy.

$$[\mathbf{E}] = \hat{\mathbf{E}} + [\Delta\mathbf{E}], \quad [\mathbf{F}] = \hat{\mathbf{F}} + [\Delta\mathbf{F}], \tag{11}$$

gdzie:

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{V}^{-1} mid([\mathbf{A}])\mathbf{V}, \quad \{\Delta\mathbf{E} = \mathbf{V}^{-1}\Delta\mathbf{A}\mathbf{V} : \Delta\mathbf{A} \in [\Delta\mathbf{A}]\} = [\Delta\mathbf{E}] = \mathbf{V}^{-1}[\Delta\mathbf{A}]\mathbf{V}$$
$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{V}^{-1} mid([\mathbf{B}])\mathbf{V}, \quad \{\Delta\mathbf{F} = \mathbf{V}^{-1}\Delta\mathbf{B}\mathbf{V} : \Delta\mathbf{B} \in [\Delta\mathbf{B}]\} = [\Delta\mathbf{F}] = \mathbf{V}^{-1}[\Delta\mathbf{B}]\mathbf{V} \tag{12}$$

Możemy teraz powiedzieć, że dla każdej pary przedziałowych macierzy $\mathbf{E}\in[\mathbf{E}]$ i $\mathbf{F}\in[\mathbf{F}]$, gdzie $[\mathbf{E}]$, $[\mathbf{F}]\in \mathrm{IR}^{n\times n}$ wartości własne przedziałowego uogólnionego zadania własnego zapisanego teraz w postaci $[\mathbf{E}]\mathbf{x}=\lambda[\mathbf{F}]\mathbf{x}$ zawierają się w obszarach Gerszgorina, zdefiniowanych następująco:

$$\mathrm{IGSG}([\mathbf{E}],[\mathbf{F}]) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{IGSG}_i([\mathbf{E}],[\mathbf{F}]), \tag{13}$$

gdzie:

$$\mathrm{IGSG}_i([\mathbf{E}],[\mathbf{F}]) = \left\{ \lambda : \left| \lambda - \frac{\hat{e}_{ii}}{\hat{f}_{ii}} \right| \le \frac{\sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{e}_{ii}[\Delta f_{ij}] - \hat{f}_{ii}[\Delta e_{ij}] \right\|_1}{\Delta f_i'} \right\} \tag{14}$$

$$\Delta f_i' = \left(\max 0, \hat{f}_{ii}^{\,2} - \sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{f}_{ii}[\Delta f_{ij}] \right\|_1 \right), \; i,j=1,2,\ldots,n.$$

Równanie charakterystyczne $\mathbf{E}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{F}\mathbf{x}$ możemy zapisać:

$$\hat{e}_{ii}x_i + \sum_{j=1}^{n} \Delta e_{ij}x_j = \lambda(\hat{f}_{ii}x_i + \sum_{j=1}^{n} \Delta f_{ij}x_j). \tag{15}$$

Przekształcając to równanie, obliczymy wartości własne:

$$\lambda = \frac{(\hat{e}_{ii}x_i + \sum_j \Delta e_{ij}x_j)}{(\hat{f}_{ii}x_i + \sum_j \Delta f_{ij}x_j)}. \tag{16}$$

Jeżeli podobnie przyjmiemy, że i-ta współrzędna wektora przyjmuje wartość maksymalną, tj. $|x_i| = \max_k |x_k| = 1$, możemy zapisać:

$$\left|\lambda-\frac{\hat{e}_{ii}}{\hat{f}_{ii}}\right|=\left|\frac{\hat{e}_{ii}}{\hat{f}_{ii}}-\frac{\hat{e}_{ii}+\sum_{j=1}^{n}\Delta e_{ij}x_j}{\hat{f}_{ii}+\sum_{j=1}^{n}\Delta f_{ij}x_j}\right|=\left|\frac{\hat{e}_{ii}(\hat{f}_{ii}+\sum_{j=1}^{n}\Delta f_{ij}x_j)-\hat{f}_{ii}(\hat{e}_{ii}+\sum_{j=1}^{n}\Delta e_{ij}x_j)}{\hat{f}_{ii}(\hat{f}_{ii}+\sum_{j=1}^{n}\Delta f_{ij}x_j)}\right|=$$

$$=\frac{\left|\sum_{j=1}^{n}(\hat{e}_{ii}\Delta f_{ij}-\hat{f}_{ii}\Delta e_{ij})x_j\right|}{\left|\hat{f}_{ii}(\hat{f}_{ii}-\sum_{j=1}^{n}\Delta f_{ij}x_j)\right|}\le\frac{\sum_{j=1}^{n}\left|(\hat{e}_{ii}\Delta f_{ij}-\hat{f}_{ii}\Delta e_{ij})\right|\left|x_j\right|}{\left|\hat{f}_{ii}^2+\hat{f}_{ii}\sum_{j=1}^{n}\Delta f_{ij}x_j\right|}\le\frac{\sum_{j=1}^{n}\left|(\hat{e}_{ii}\Delta f_{ij}-\hat{f}_{ii}\Delta e_{ij})\right|}{\left|\hat{f}_{ii}^2+\hat{f}_{ii}\sum_{j=1}^{n}\Delta f_{ij}x_j\right|}. \tag{17}$$

Jeżeli w dalszych przekształceniach uwzględnimy niepewności parametrów, to elementy macierzy $\Delta e_{ij}\in[\Delta e_{ij}]$, $\Delta f_{ij}\in[\Delta f_{ij}]$ są liczbami przedziałowymi i ostatecznie wartość $\left|\lambda-\frac{\hat{e}_{ii}}{\hat{f}_{ii}}\right|$ możemy oszacować:

$$\left|\lambda-\frac{\hat{e}_{ii}}{\hat{f}_{ii}}\right|\le\frac{\sup\limits_{\substack{\Delta e_{ij}\in[\Delta e_{ij}]\\ \Delta f_{ij}\in[\Delta f_{ij}]}}\sum_{j=1}^{n}\left|(\hat{e}_{ii}\Delta f_{ij}-\hat{f}_{ii}\Delta e_{ij})\right|}{\inf\limits_{\Delta f_{ij}\in[\Delta f_{ij}]}\left|\hat{f}_{ii}^2+\hat{f}_{ii}\sum_{j=1}^{n}\Delta f_{ij}x_j\right|}\le\frac{\sum_{j=1}^{n}\left\|(\hat{e}_{ii}[\Delta f_{ij}]-\hat{f}_{ii}[\Delta e_{ij}])\right\|_I}{\Delta f_i'}, \tag{18}$$

gdzie:

$$\Delta f_i'=\left(\max 0,\hat{f}_{ii}^{\,2}-\sum_{j=1}^{n}\left\|\hat{f}_{ii}[\Delta f_{ij}]\right\|_I\right).$$

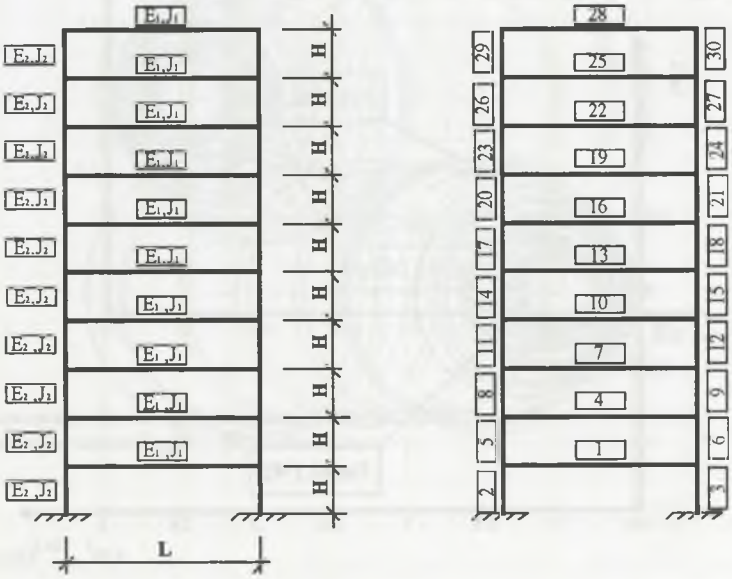
Tę postać twierdzenia Gerszgorina możemy wykorzystać do wyznaczenia spektrum częstości drgań własnych wielowymiarowych układów dynamicznych opisanych równaniem różniczkowym drugiego rzędu $[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{y}}+[\mathbf{K}]\mathbf{y}=\mathbf{0}$. Równoczesna diagonalizacja tych macierzy umożliwia sprowadzenie tego problemu do analizy zdania własnego o postaci $(\mathbf{E}+[\Delta\mathbf{E}])\mathbf{x}=\lambda(\mathbf{F}+[\Delta\mathbf{F}])\mathbf{x}$.

2. Przykłady zastosowania twierdzenia Gerszgorina do oszacowania wartości własnych

Rozważamy układ prętowy przedstawiony na rysunku 1. Dla tej konstrukcji o parametrach niepewnych, wykorzystując twierdzenie Gerszgorina oszacujemy zbiór wartości własnych uogólnionego przedziałowego zagadnienia własnego $[\mathbf{K}]\mathbf{x}=\lambda[\mathbf{M}]\mathbf{x}$.

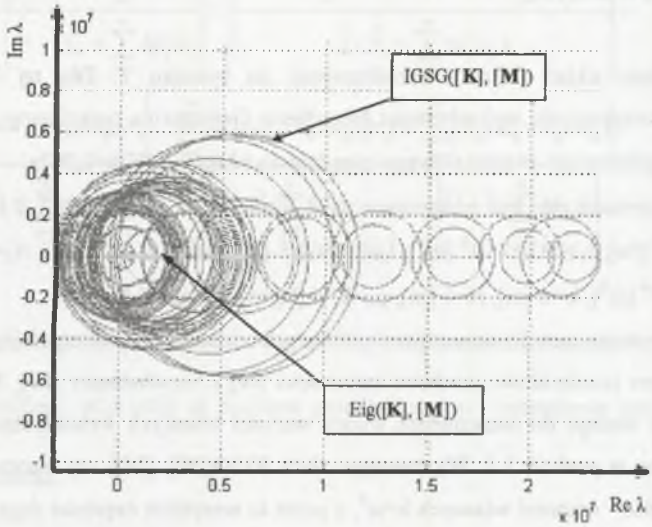
W obliczeniach przyjęto następujące dane liczbowe: $E_1=[1.948\cdot10^{11}, 2.152\cdot10^{11}]$ [Pa], $E_2=2.05\cdot10^{11}$ [Pa], $J_1=28300\cdot10^{-8}$ [m^4], $J_2=[36469.5\cdot10^{-8}, 40308.5\cdot10^{-8}]$ [m^4], $A_1=109\cdot10^{-4}$ [m^2] $A_2=244.5\cdot10^{-4}$ [m^2], L=6 [m], H=3 [m], $\rho_1=85.6$ [kg/m], $\rho_2=191.9$ [kg/m].

Wykorzystując metodę elementów skończonych i dokonując dyskretyzacji jak na rysunku 1., zbudowano przedziałowe macierze sztywności [**K**] i bezwładności [**M**]. Macierze te są symetryczne, dlatego do oszacowania zbioru wartości własnych wykorzystano twierdzenie przedstawione w punkcie 1.2. Wyznaczając zbiór IGSG([**K**], [**M**]) wg wzoru (13) możemy oszacować zbiór wartości własnych $\lambda=\omega^2$, a przez to wszystkie częstości drgań własnych tej konstrukcji o parametrach niepewnych.

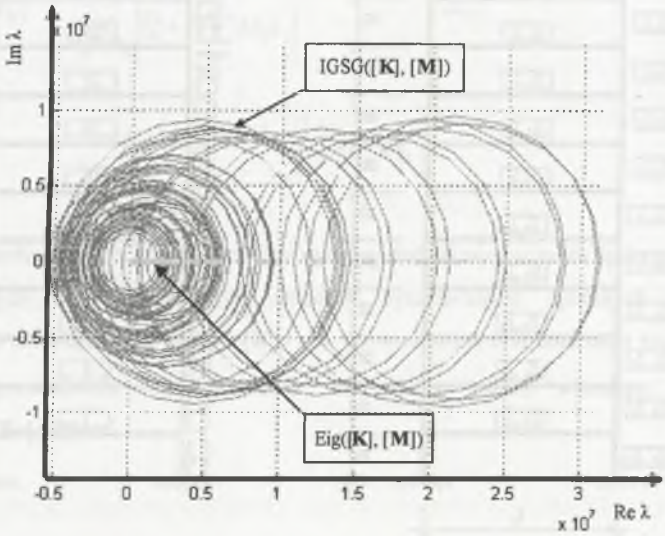


Rys.1. Schemat statyczny konstrukcji
Fig.1. Static structure

Oszacowany zbiór wartości własnych przedstawia rysunek 2.



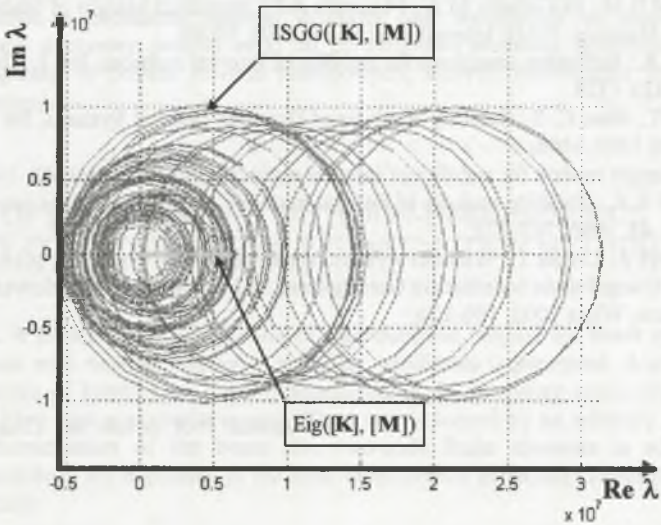
Rys.2. Oszacowanie zbioru wartości własnych Eig([K], [M])
Fig.2. Set of eigenvalues Eig([K], [M]) estimation



Rys.3. Oszacowanie zbioru wartości własnych Eig([K], [M])
Fig.3. Set of eigenvalues Eig([K], [M]) estimation

Te same obliczenia wykonano dla innych niepewności parametrów konstrukcji. Dla danych liczbowych $E_1=[2.09\cdot10^{11}, 2.09\cdot10^{11}]$ [Pa], $E_2=[2.09\cdot10^{11}, 2.09\cdot10^{11}]$ [Pa], $J_1=28300\cdot10^{-8}$ [m^4], $J_2=[36469.5\cdot10^{-8}, 40308.5\cdot10^{-8}]$ [m^4], $A_1=109\cdot10^{-4}$ [m^2] $A_2=244.5\cdot10^{-4}$ [m^2], L=6 [m], H=3 [m], $\rho_1=85.6$ [kg/m], $\rho_2=191.9$ [kg/m], oszacowanie zbioru wartości własnych przedstawia rysunek 3.

Rysunek 4 przedstawia oszacowania zbioru wartości własnych konstrukcji o czterech niepewnych parametrach. Przyjęte do obliczeń wartości parametrów: $E_1=[2.09\cdot10^{11}, 2.09\cdot10^{11}]$ [Pa], $E_2=[2.09\cdot10^{11}, 2.09\cdot10^{11}]$ [Pa], $J_1=[26885\cdot10^{-8}, 29715\cdot10^{-8}]$ [m^4], $J_2=[36469.5\cdot10^{-8}, 40308.5\cdot10^{-8}]$ [m^4], $A_1=109\cdot10^{-4}$ [m^2], $A_2=244.5\cdot10^{-4}$ [m^2], L=6 [m], H=3 [m], $\rho_1=85.6$ [kg/m], $\rho_2=191.9$ [kg/m].



Rys.4. Oszacowanie zbioru wartości własnych Eig([K], [M])
Fig.4. Set of eigenvalues Eig([K], [M]) estimation

3. Wnioski

Bezpośrednie zastosowanie liczb przedziałowych do modelowania niepewności prowadzi czasem do zgrubnego oszacowania rozwiązania, ponieważ metoda ta nie uwzględnia zależności parametrów układu mechanicznego.

Porównując poszczególne oszacowania wartości własnych, nasuwa się wniosek, że zastosowanie twierdzenia Gerszgorina do oszacowania zbioru wartości własnych jest słuszne i daje dobre wyniki dla małych niepewności parametrów opisujących konstrukcje. Niewątpliwą zaletą tej metody (w porównaniu np. do metod krawędziowych) poszukiwania wartości własnych macierzy przedziałowych jest mała złożoność obliczeniowa.

LITERATURA

1. Argoun M.: On sufficient conditions for the stability of interval matrices, Int. J. Control, **44**, 1986, 1245-1250.
2. Chen J.: Sufficient Conditions on Stability of Interval Matrices: Connections and New Results, IEEE Trans. on Aut. Control, **37**, 1992, 541-544.
3. Elgindi M.B.M., Ei-Gebeily M.A., Moustafa A.F.: Improved Margin of Stability of Interval Matrices, JSME International J., **41**, 1998, 90-93.
4. Heinen J.A.: Sufficient conditions for stability of interval matrices, Int. J. Control, **39**, 1984, 1323-1328.
5. Juang Y-T., Shao C. S.: Stability Analysis of Dynamic Interval Systems, Int. J. Control, **49**, 1989, 1401-1408.
6. Xu D.: Simple criteria for stability of interval matrices, Int. J. Control, **41**, 1985, 289-295
7. Yedavalli R.K.: Stability analysis of interval matrices: another sufficient condition, Int. J. Control, **43**, 1986, 767-772.
8. Skrzypczyk J., Liszka T.: Warunki wystarczające stabilności systemów przedziałowych w oparciu o uogólnione twierdzenie Gerszgorina, XLI Sympozjon Modelowanie w mechanice, Wisła 2002, 169-170.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Czesław Szymczak

Abstract

In this paper Gershgorin theorem extension over interval numbers is presented. New results give a possibility to estimate regions containing all eigenvalues of interval generalized eigenvalues problem $[\mathbf{A}]\mathbf{x}=\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}$. Technical applications are illustrated by an example from the frame structure and lead to estimations of eigenfrequencies of multidimensional dynamic systems with interval parameters. Presented results give the best approximations for systems with parameters of not large tolerances. The great advantage of that method is its low complexity of computer calculations.