

Izabela MAJOR*

Politechnika Częstochowska

PROPAGACJA FALI PRZYSPIESZENIA W PRĘCIE O ZMIENNYM PRZEKROJU

Streszczenie. W niniejszej pracy użyto analizy opartej na założeniu jednowymiarowego stanu natężenia do wyznaczenia równania transportu dla wektora amplitudy fali przyspieszenia. Przeprowadzono analizę numeryczną propagacji fali przyspieszenia w sprężystym pręcie o wolno zmieniającym się przekroju poprzecznym. Wyniki przedstawiono dla nieliniowo sprężystego materiału Murnaghana.

ACCELERATION WAVE PROPAGATION IN RODS OF VARIABLE CROSS-SECTION

Summary. This paper employs an approximate form of analysis based on the assumption of one-dimensional stress to find the transport equation for the amplitude of the vector of the acceleration wave. The numerical analysis of the propagation of acceleration wave in elastic rod of slowly varying area of cross-section was made. Results are illustrated in Murnaghana's nonlinear elastic materials.

1. Wprowadzenie

Propagacja fali przyspieszenia w kontinuum materialnym umożliwia przeprowadzenie badań, które stanowią podstawę do szerszego poznania nieliniowych materiałów. Fala przyspieszenia została dokładnie przebadana przez Bailey i Chena [1,2] oraz omówiona przez Chena [3].

Celem niniejszego opracowania jest analiza fali przyspieszenia propagującej się w prętach o zmiennym przekroju poprzecznym. Podstawowe równania propagacji dla omawianego przypadku pręta podał A. Jeffrey w pracy [4]. Autor wykazał, że równanie transportu dla natężenia fali w przypadku propagacji fali przyspieszenia w hipersprężystym pręcie o

*Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Sławomir Kosiński, prof. Politechniki Częstochowskiej

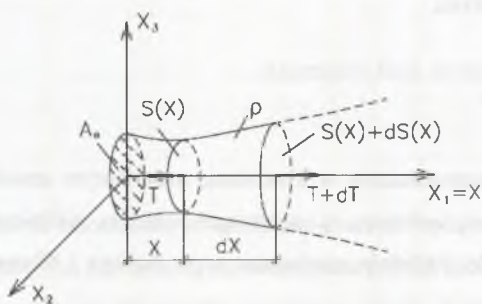
zmiennym przekroju poprzecznym jest uogólnionym równaniem Riccatiego. Pewne uzupełnienie pracy [4] stanowi opracowanie A. Jeffreya i R.P. Gilberta [5]. Autorzy udowodnili, że natężenie fali przyspieszenia dla ośrodka, w którym funkcja energii naprężenia (potencjał sprężysty) $\Sigma(p)$ spełnia warunek $\partial^3 \Sigma / \partial p^3 \neq 0$, opisuje równanie Bernoulliego, gdzie p jest gradientem przemieszczenia.

2. Podstawowe zależności

Rozważamy jednorodny ośrodek sprężysty o stałej gęstości ρ w kształcie półnieskończonego cienkiego pręta o wolno zmieniającym się przekroju poprzecznym i potencjale sprężystym Σ . Zakładamy, że przekrój jest osiowo symetryczny i zmienia się w funkcji odległości. Przyjmujemy kartezjański układ współrzędnych materialnych $\{X_\alpha\}$ oraz kartezjański układ współrzędnych przestrzennych $\{x_i\}$, ($i, \alpha = 1, 2, 3$), które parametryzują tę samą przestrzeń oraz wzajemnie się pokrywają. Deformację możemy zapisać w postaci zależności (por. [4]):

$$\begin{aligned} x_1 &= u(X, t) + X \text{ dla } x_1 = x \text{ i } X_1 = X \\ x_2 &= X_2; \quad x_3 = X_3 \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie $u(X, t)$ jest przemieszczeniem punktów kontinuum wzdłuż osi pręta.



Rys.1. Osiowo symetryczny pręt o wolno zmieniającym się przekroju poprzecznym
Fig. 1. Axis-symmetry rod of slowly varying area of cross-section

W przyjętym układzie współrzędnych gradient przemieszczenia i prędkość oznaczymy przez:

$$p = \frac{\partial u}{\partial X} = u_x, \quad v = \frac{\partial u}{\partial t} = u_t. \quad (2)$$

W zastosowanym przybliżeniu zakładamy, że naprężenie nominalne w przekroju poprzecznym jest wyłącznie osiowe i stałe wzdłuż przekroju.

$$T = T_{R11} = \frac{\partial \Sigma}{\partial p} \neq 0. \quad (3)$$

Naprężenia normalne $T_{R22} = T_{R33}$ towarzyszące ruchowi głównemu mogą być pominięte. Powyższe założenie dopuszcza jedynie propagację fal płaskich.

Przekrój poprzeczny oznaczmy przez $S(X)$ i przyjmujemy, że:

$$S(X) = A_0 \theta(X), \quad (4)$$

gdzie A_0 jest powierzchnią początkową pręta dla $X = 0$, natomiast $\theta(X)$ jest bezwymiarowym mnożnikiem ($\theta(0) = 1$). Zakładamy, że powierzchnia boczna pręta wolna jest od naprężeń. Tym samym warunki brzegowe definiujemy również w sposób przybliżony. Wszystkie powyższe założenia wykluczają dokładny opis propagacji fal w pręcie w kierunku podłużnym (dylatacyjnym). Ruchy w kierunku prostopadłym do X , które (przez sprzężenie reprezentowane w liniowej teorii przez współczynnik Poissona, a przez wiele innych stałych – w teorii nieliniowej) muszą wystąpić w tym samym czasie co ruch główny, nie mogą być włączone i uwzględnione.

Dla deformacji (1) równanie ruchu przybiera postać (por.[4]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c^2 \frac{\partial p}{\partial X} - \frac{T}{\rho} \frac{d}{dX} \ln S(X) = 0, \quad (5)$$

gdzie:

$$c = c(p) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Równanie (4) jest równaniem o dwu zmiennych funkcjach v i p . Dodatkowe równanie dla tych funkcji wynika z równości pochodnych mieszanych (por. [5]):

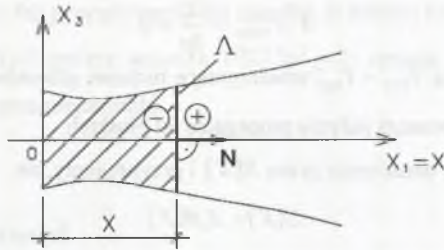
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial X}. \quad (7)$$

Warunek (6) oraz równanie (5) są podstawowymi równaniami propagacji jednowymiarowej fali przyspieszenia dla omawianego przypadku pręta.

3. Propagacja fali przyspieszenia

Przyjmujemy, że propagacja zaburzenia dla $X = 0$ w chwili $t = 0$ następuje wzdłuż osi pręta w dodatnim kierunku osi X .

Obszar przed frontem pozostaje w spoczynku i jest poddany deformacji $p_o(X)$.



Rys.2. Propagacja powierzchni nieciągłości Λ o kierunku \mathbf{N}
Fig. 2. The propagation slowness surface Λ at the direction \mathbf{N}

Funkcje p i v są ciągłe, natomiast drugie ich pochodne doznają skoku nieciągłości. Tak więc front propagacji zaburzenia jest falą przyspieszenia.

Wprowadzimy następujące oznaczenia: znak (+) oznacza wielkość na powierzchni Λ przed frontem fali, natomiast znak (-) wielkość na powierzchni Λ za frontem fali (patrz rys.2).

Wówczas zapiszemy:

$$p^- = p^+, \quad \sigma = v_i^- - v_i^+, \quad (8)$$

gdzie σ oznacza natężenie fali przyspieszenia. Ponieważ $v_i^+ = 0$, natężenie fali będzie równe:

$$\sigma = v_i^-. \quad (9)$$

Równanie transportu dla nieciągłości σ zgodnie z pracą Jeffreya i Gilberta (por.[5]) ma postać:

$$\sigma(X) = \sigma(0) \frac{\exp\left(-\int_0^X \mu(\tau) d\tau\right)}{1 + \sigma(0) \left\{ \int_0^X \beta(\tau) \left[\exp\left(\int_0^\tau \mu(r) dr\right) d\tau \right] \right\}}, \quad (10)$$

gdzie $\sigma(0)$ jest początkową wartością natężenia fali przyspieszenia dla $X = 0$, natomiast

$$\mu(X) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{T_0}{2\rho^2 c_o^4} \left(\frac{\partial^3 \Sigma}{\partial p^3} \right)_o \right] \left[\frac{d}{dX} \ln S(X) \right] \quad (11)$$

oraz $\beta(X) = -\frac{1}{4\rho c_o^4} \left(\frac{\partial^3 \Sigma}{\partial p^3} \right)_o$,

gdzie wielkość c_o jest prędkością propagacji frontu fali przyspieszenia. Zgodnie z [5]

$$c_o^2 = \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 \tag{12}$$

Wyrażenia oznaczone indeksem „o” (por. (12)) oznaczają wielkości przed frontem fali.

Dla deformacji (1) gradient deformacji oraz lewy tensor deformacji odpowiednio wynoszą:

$$F_{i\alpha} = \begin{bmatrix} p+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} p^2 + 2p + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Niezmienniki lewego tensora odkształcenia B_{ij} określimy zależnościami:

$$I_1 = B_{ii}, \quad I_2 = (B_{ii}B_{jj} - B_{ij}B_{ji})/2, \quad I_3 = \det(B_{ij}), \tag{14}$$

natomiast tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa zapiszemy w postaci:

$$T_{ri\alpha} = \rho \frac{\partial \Sigma}{\partial F_{i\alpha}} = \rho \Sigma_{,M} \frac{\partial I_M}{\partial F_{i\alpha}} \quad \text{dla } M = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Przyjmujemy, że $S(X) = Ae^{\gamma X}$. Wówczas natężenie fali przyspieszenia $\sigma(X)$ wynosi:

$$\sigma_1(X) = \sigma(0) \frac{e^{\frac{Q(X)X\gamma}{2}}}{1 - \sigma(0) \left[2 \left(e^{\frac{Q(X)X\gamma}{2}} - 1 \right) \frac{\beta(X)}{Q(X)\gamma} \right]}, \tag{16}$$

gdzie:

$$Q(X) = \left[1 - \frac{T_0}{2\rho^2 c_o^4} \left(\frac{\partial^3 \Sigma}{\partial p^3} \right)_o \right]. \tag{17}$$

Zakładając natomiast, że $S(X) = Ae^{-\gamma X}$, natężenie fali przyspieszenia $\sigma(X)$ będzie równe:

$$\sigma_2(X) = \sigma(0) \frac{e^{\frac{Q(X)X\gamma}{2}}}{1 + \sigma(0) \left[2 \left(e^{\frac{Q(X)X\gamma}{2}} - 1 \right) \frac{\beta(X)}{Q(X)\gamma} \right]}. \tag{18}$$

4. Fala przyspieszenia dla materiału Murnaghana

Zakładamy, że fala przyspieszenia propaguje się w ściśliwym materiale sprężystym określonym potencjałem Murnaghana (por. [8]):

$$W(I_1, I_2, I_3) = \rho \Sigma(I_1, I_2, I_3) = \frac{l+2m}{24} (I_1 - 3)^3 + \frac{\lambda + 2\mu + 4m}{8} (I_1 - 3)^2 + \frac{8\mu + n}{8} (I_1 - 3) - \frac{m}{4} (I_1 - 3)(I_2 - 3) - \frac{4\mu + n}{8} (I_2 - 3) + \frac{n}{8} (I_1 - 1), \quad (19)$$

dla którego pochodne względem niezmienników wynoszą:

$$\Sigma_K = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_K}, \quad \Sigma_{KL} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_K \partial I_L}, \quad \Sigma_{KLM} = \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial I_K \partial I_L \partial I_M} \quad \text{dla } K, L, M = 1, 2, 3 \quad (20)$$

Materiał sprężysty Murnaghana opisany jest pięcioma stałymi sprężystości (l, m, n, λ, μ) . Trzy pierwsze są stałymi sprężystości drugiego rzędu, pozostałe dwie stałymi Lamego.

Funkcje materiałowe mają postać (por. [7]):

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{l+2m}{8} (I_1 - 3)^2 + \frac{\lambda + 2\mu + 4m}{4} (I_1 - 3) + \frac{8\mu + n}{8} - \frac{m}{4} (I_2 - 3) \right], \\ \Sigma_2 &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{m}{4} (I_1 - 3) + \frac{4\mu + n}{8} \right], \quad \Sigma_3 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{n}{8}, \\ \Sigma_{11} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{l+2m}{4} (I_1 - 3) + \frac{\lambda + 2\mu + 4m}{4} \right], \quad \Sigma_{111} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{l+2m}{4} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Dla deformacji (1) niezmienniki tensora deformacji wynoszą:

$$I_1 = p^2 + 2p + 3, \quad I_2 = 2p^2 + 4p + 3, \quad I_3 = p^2 + 2p + 1, \quad (22)$$

natomiast nominalny tensor naprężenia jest równy:

$$T = T_{R11} = 2\rho(1+p)(\Sigma_1 + 2\Sigma_2 + \Sigma_3). \quad (23)$$

Dla wartości początkowej, gdy $p=0$ niezmienniki tensora odkształcenia B_ν , funkcje materiałowe oraz tensor nominalny naprężenia odpowiednio wynoszą:

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 = 3, \quad I_3 = 1, \\ (\Sigma_1)_o = \frac{1}{\rho} \left(\frac{8\mu + n}{8} \right), \quad (\Sigma_2)_o = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{4\mu + n}{8} \right), \quad (\Sigma_3)_o = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{n}{8}, \quad T_o = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

5. Analiza numeryczna

Stałe przyjęto zgodnie z [7], przeliczając z $[kG/cm^2]$ na $[Pa]$. Przyjęto wartości stałych m, n, l, λ, μ jak dla stali:

$$m = -6,239 \cdot 10^5 [Pa], \quad n = -6,945 \cdot 10^5 [Pa], \quad l = -4,522 \cdot 10^5 [Pa],$$

$$\lambda = 1,089 \cdot 10^5 [Pa], \quad \mu = 8,093 \cdot 10^4 [Pa].$$

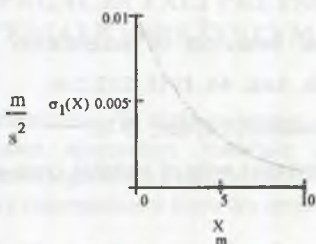
Zakładamy na początku, że materiał jest nieodkształcony.

$$T_o S_o = T_{11} S(X) = 0, \quad p_o(X) = 0.$$

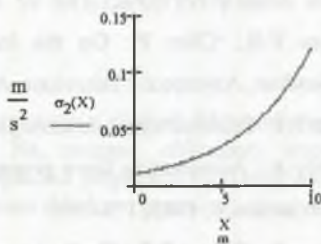
Przyjmujemy, że:

$$\gamma = 0,5 [1/m].$$

a)



b)



Rys.3. Wykresy natężenia fali przyspieszenia: a) dla $S(X) = Ae^{\gamma X}$, b) dla $S(X) = Ae^{-\gamma X}$, przy założeniu że $\sigma_o = 10^{-2} [m/s^2]$

Fig. 3. The diagrams of the acceleration wave intensity: a) for $S(X) = Ae^{\gamma X}$, b) for $S(X) = Ae^{-\gamma X}$, for the assumption that $\sigma_o = 10^{-2} [m/s^2]$

6. Wnioski

Przeprowadzona analiza numeryczna wykazała, że wraz ze zmianą przekroju poprzecznego analizowanego przypadku pręta zmienia się natężenie fali przyspieszenia.

Dla pręta o rosnącym przekroju poprzecznym natężenie fali maleje (patrz rys.3a). W przypadku gdy przekrój poprzeczny pręta maleje, natężenie fali przyspieszenia rośnie (patrz rys.3b). Do obliczeń numerycznych przyjęto statyczną prędkość odkształcenia rzędu $1 \cdot 10^{-4} [s^{-1}]$, zgodnie z [6]. Wartości odkształceń dynamicznych w procesie propagacji fal przyspieszenia w metalach, zgodnie z cytowaną literaturą (por. [6]), mieszczą się w przedziale od $10^{-2} [s^{-1}]$ do $10^2 [s^{-1}]$. Przeprowadzona analiza numeryczna, zgodnie z poczynionym założeniem, uwzględnia wyłącznie statyczną prędkość odkształcenia. Wart podkreślenia jest

również fakt, iż początkowa wartość przekroju poprzecznego pręta nie wpływa na natężenie propagującej się fali przyspieszenia.

LITERATURA

1. Bailey P.B., Chen P.: On the local and global behaviour of acceleration waves, Arch. Rat. Mech. Anal. 41, 1971, 121-131.
2. Bailey P.B., Chen P.: On the local and global behaviour of acceleration waves: Addendum, Asymptotic behaviour, Arch. Rat. Mech. Anal. 44, 1971, 212-216.
3. Chen P.J.: Selected topics in wave propagation, Noordhoff, Layden, 1976.
4. Jeffrey A.: Acceleration wave propagation in hyperelastic rods of variable cross-section, Wave motion 4, 1982, 173-180.
5. Jeffrey A., Gilbert R.P.: On the approximation of acceleration waves in rods, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 22, No. 3, 1987, 209-215.
6. Klepaczko J.: Doświadczalne badania sprężysto-plastycznych procesów falowych w metalach, IPPT PAN, Warszawa 1970.
7. Kosiński S.: Odbicie i ewolucja fali uderzeniowej w wybranych materiałach hipersprężystych, IPPT PAN, Warszawa 1995.
8. Wesołowski Z.: Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości, PWN, Warszawa 1974.

Recenzent: Prof. zw. dr hab. Józef Nizioł

Abstract

The problem discussed in this paper run on propagation of disturbance in rod of slowly varying area of cross-section was made. This paper employs an approximate form of analysis based on the assumption of one-dimensional stress to find the transport equation and corresponding evolution law governing the intensity of acceleration wave. The numerical analysis of the propagation of acceleration wave in elastic rod of slowly varying area was made. Results are illustrated for Murnaghana's nonlinear elastic materials.