

Andrzej MARYNOWICZ*
Politechnika Opolska

SZACOWANIE WSPÓŁCZYNNIKA DYFUZJI PARY WODNEJ METODĄ CAŁKOWĄ

Streszczenie. W pracy przedstawiono algorytm wyznaczania współczynnika dyfuzji w materiałach budowlanych przy wykorzystaniu uproszczonego modelu ośrodka wieloskładnikowego. Formułę na poszukiwany współczynnik uzyskano za pomocą metody całkowej. Otrzymane wyniki badań laboratoryjnych porównano z wartościami normowymi.

INTEGRAL METHOD FOR ESTIMATION OF WATER VAPOUR DIFFUSION COEFFICIENT

Summary. An algorithm for evaluating of water vapour diffusion coefficient in building materials with use of simplified multicomponent body model is presented. The formula for this coefficient was obtained from balance equations by means of integral method. Obtained experimental results were compared to these in Polish Code.

1. Wprowadzenie

Ruch wilgoci w materiałach budowlanych ma złożony charakter. Składają się nań bowiem: dyfuzja pary wodnej, dyfuzja powierzchniowa wody i przepływ kapilarny wody. Zazwyczaj w materiale występuje też woda zaadsorbowana na ściankach kapilar. Istotne znaczenie ma tu również fakt, iż większość materiałów budowlanych ma strukturę porowatą, co w połączeniu z ich wieloskładnikowością powoduje, że budując model matematyczny przepływu wilgoci zmuszeni jesteśmy dokonywać wielu uproszczeń. Należy również zwrócić uwagę na to, iż udział poszczególnych czynników w przebiegu wypadkowego procesu migracji wilgoci zależy od struktury wewnętrznej materiału [5, 6]. Chcąc otrzymać kompletny model matematyczny, należy go uzupełnić badaniami eksperymentalnymi

*Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Jerzy Wyrwał, prof. Politechniki Opolskiej

pozwalającymi na wyznaczenie potrzebnych współczynników materiałowych, zazwyczaj występujących w modelu.

2. Model ośrodka

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie zależności określającej współczynnik dyfuzji pary wodnej w ośrodku kapilarno-porowatym. Wykorzystano w tym celu modelowanie transportu wilgoci w ośrodku wieloskładnikowym, podczas badania paroprzepuszczalności metodą stacjonarną, w którym to modelu wyróżnić można cztery składniki:

- szkielet – s ,
- parę wodną wypełniającą kapilary – v ,
- wodę wewnątrz kapilar – wc ,
- wodę zaadsorbowaną na ściankach kapilar – wa .

Przyjęte w punkcie wyjścia zależności bazują na teorii mieszanin, zgodnie z którą, w celu określenia gęstości danego składnika mieszaniny, należy zbilansować jego masę, co w efekcie końcowym prowadzi do następujących równań różniczkowych [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s v_s) &= \mathfrak{R}_s \\ \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v v_v) &= \mathfrak{R}_v \\ \frac{\partial \rho_{wc}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{wc} v_{wc}) &= \mathfrak{R}_{wc} \\ \frac{\partial \rho_{wa}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{wa} v_{wa}) &= \mathfrak{R}_{wa} \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

$\rho_s, \rho_v, \rho_{wc}, \rho_{wa}$ - gęstości objętościowe składników mieszaniny, $[\text{kg}/\text{m}^3]$,

v_s, v_v, v_{wc}, v_{wa} - prędkości składników, $[\text{m}/\text{s}]$,

$\mathfrak{R}_s, \mathfrak{R}_v, \mathfrak{R}_{wc}, \mathfrak{R}_{wa}$ - źródła masy składników, $[\text{kg}/\text{m}^3 \text{s}]$,

$\frac{\partial}{\partial t}$ - pochodna czasowa (lokalna), $[\text{1}/\text{s}]$,

∇ - operator gradientu, $[\text{1}/\text{m}]$, \cdot - iloczyn skalarny,

przy czym:

$$\rho_s + \rho_v + \rho_{wc} + \rho_{wa} = \rho - \text{gęstość całego ośrodka,}$$

$$\mathfrak{R}_s + \mathfrak{R}_v + \mathfrak{R}_{wc} + \mathfrak{R}_{wa} = 0.$$

W zastosowanym modelu przyjęto kilka założeń upraszczających, a mianowicie: szkielet jest nieruchomy, $v_s = 0$, oraz pomijamy ruch wilgoci zaadsorbowanej na ściankach kapilar, czyli $v_{wa} = 0$. Ponadto, chcąc wyodrębnić poszukiwany współczynnik dyfuzji pary wodnej, przyjmujemy, że proces zachodzi przy zawartości wilgoci $\rho_{wc} < \rho_{wc}^{cr}$, czyli strumień wody w kapilarach jest pomijalnie mały ($v_{wc} = 0$). Przykładowe wartości ρ_{wc}^{cr} dla kilku materiałów zestawiono w tabeli 1 [5].

Tabela 1

Material	ρ_{wc}^{cr} , [kg/m ³]
Gazobeton	180
Cegła	50
Cegła silikatowa	140
Beton	93
Zaprawa cem.- wap.	120

Ze względu na to, iż w układzie nie zachodzą reakcje chemiczne lub zjawiska absorpcji/desorpcji, mamy $\mathfrak{R}_s = 0$ i $\mathfrak{R}_{wa} = 0$, a z uwagi na $\mathfrak{R}_s + \mathfrak{R}_v + \mathfrak{R}_{wc} + \mathfrak{R}_{wa} = 0$, czyli $\mathfrak{R}_v = -\mathfrak{R}_{wc}$, układ równań (1) upraszcza się do postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v v_v) &= \mathfrak{R}_v, \\ \frac{\partial \rho_{wc}}{\partial t} &= -\mathfrak{R}_v \end{aligned} \quad (2)$$

Zgodnie z założeniami zadania dalszym rozważaniom podlegać będzie tylko równanie bilansu pary wodnej, przy założeniu że jej źródła nie znajdują się wewnątrz ośrodka, czyli $\mathfrak{R}_v = 0$, co prowadzi do

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v v_v) = 0 \quad (3)$$

Prędkość v_v można odnieść do prędkości lokalnego środka masy (barycentrycznej) w [4], określanej jako

$$w = \frac{1}{\rho}(\rho_s v_s + \rho_v v_v + \rho_{wc} v_{wc} + \rho_{wa} v_{wa}) = \frac{1}{\rho} \rho_v v_v = C_v v_v, \quad (4)$$

gdzie

$$C_v = \frac{\rho_v}{\rho} \quad (5)$$

jest koncentracją masową pary wodnej. Pozwala to uprościć wyrażenie opisujące prędkość dyfuzyjną

$$u_v = v_v - w = v_v - C_v v_v = (1 - C_v) v_v \approx v_v, \quad (6)$$

gdź w warunkach procesu koncentracja masowa pary wodnej $C_v \ll 1$ ($C_v \approx 2.7\%$ masy powietrza).

Po przyjęciu, że $v_v \approx u_v$, mamy $w \approx 0$, dzięki czemu znika człon nieliniowy, który wystąpi po rozpisaniu lewej strony równania (3), co w konsekwencji, przy $\rho \approx \text{const}$, prowadzi do

$$\rho \frac{\partial C_v}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_v = 0, \quad (7)$$

gdzie:

$$\mathbf{j}_v = \rho \mathbf{u}_v = -\frac{\rho}{\varepsilon} D_v \nabla C_v, \quad (8)$$

przy czym

ε - porowatość materiału,

D_v - współczynnik dyfuzji pary wodnej, [m^2/s].

Uwzględniając powyższe, oraz sprowadzając zagadnienie do jednowymiarowego, odpowiadającego w przybliżeniu warunkom pomiaru, otrzymamy równanie wyjściowe do określenia współczynnika dyfuzji D_v .

$$\frac{\partial C_v}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} D_v \nabla C_v \right) \quad (9)$$

3. Metoda całkowa

Podany niżej sposób wyprowadzenia zależności opisującej współczynnik dyfuzji został podany w zbliżonej postaci, m.in. w [1, 3], a dla zagadnień dotyczących wymiany ciepła w [2].

Równanie (9) należy przemnożyć stronami przez iloraz x/h , w którym h jest grubością próbki, oraz scałkować (uśrednić) po grubości $x \in < 0, h >$ i przedziale czasu $< t, t + \Delta t >$, [1, 2, 3], co prowadzi do zależności

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_0^h \frac{x}{h} \left(\frac{\partial C_v}{\partial t} \right) dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_0^h \frac{x}{h} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} D_v \nabla C_v \right) dx dt \quad (10)$$

Całkując poszczególne człony równania (10) przez części, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_0^h \frac{x}{h} \left(\frac{\partial C_v}{\partial t} \right) dx dt &= \int_0^h \frac{x}{h} [C_v(t + \Delta t) - C_v(t)] dx \\ \int_t^{t+\Delta t} \int_0^h \frac{x}{h} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} D_v \nabla C_v \right) dx dt &= \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\varepsilon} D_v \nabla C_v(h) dt - \int_t^{t+\Delta t} \frac{D_v}{\varepsilon h} [C_v(h) - C_v(0)] dt \end{aligned} \quad (11)$$

W powyższych rozważaniach przyjęto, że koncentracje migrującej pary wodnej na brzegach próbki, $C_v(h)$ i $C_v(0)$, są stałe w czasie. Po podstawieniu (11) do równania (10) oraz uwzględniając zależność (8), otrzymamy

$$\int_0^h \frac{x}{h} [C_v(t + \Delta t) - C_v(t)] dx = - \int_t^{t+\Delta t} \frac{j_v(h)}{\rho} dt - \frac{1}{\varepsilon h} [C_v(h) - C_v(0)] \int_t^{t+\Delta t} D_v dt \quad (12)$$

Po przekształceniach, jak również stosując twierdzenie o wartości średniej całkowej do całek ze strumienia $j_v(h)$ i współczynnika D_v ,

$$\langle D_v \rangle = - \frac{\varepsilon h}{C_v(h) - C_v(0)} \left\{ \frac{\langle j_v(h) \rangle}{\rho} + \int_0^h \frac{x}{h \Delta t} [C_v(t + \Delta t) - C_v(t)] dx \right\} \quad (13)$$

otrzymamy ostateczną postać równania opisującego poszukiwany współczynnik dyfuzji pary wodnej:

$$\langle D_v \rangle = - \frac{\varepsilon h}{C_v(h) - C_v(0)} \left\{ \frac{\langle j_v(h) \rangle}{\rho} + \int_0^h \frac{x}{h \Delta t} [C_v(t + \Delta t) - C_v(t)] dx \right\}. \quad (14)$$

4. Badanie doświadczalne

4.1. Założenia dodatkowe

W wyrażeniu (14) strumień $\langle j_v(h) \rangle$ oraz stężenia $C_v(h)$ i $C_v(0)$ wyznaczono na podstawie założenia, że traktujemy parę wodną jako gaz doskonały [3, 5], czyli

$$\tilde{\rho}_v = \frac{p_v}{R_v T}, \quad (15)$$

w którym:

$\tilde{\rho}_v$ - gęstość pary wodnej w powietrzu, $[\text{kg}/\text{m}^3]$,

p_v - ciśnienie pary wodnej w powietrzu, $[\text{Pa}]$,

R_v - stała gazowa pary wodnej, $[\text{J}/\text{kgK}]$,

T - temperatura bezwzględna, $[\text{K}]$.

Uwzględniając związek między wilgotnością powietrza φ a ciśnieniem pary wodnej, $\varphi = p_v p_{sat}^{-1}$, w którym p_{sat} jest ciśnieniem pary wodnej nasyconej (w warunkach izotermicznych, $T = T_{sr}$), oraz zależność (5), otrzymujemy związki między koncentracją C_v a wilgotnością φ dla wewnętrznej i zewnętrznej strony próbki

$$C_v(0) = \frac{\varepsilon p_{sat}}{\rho R_v T} \varphi(0), \quad C_v(h) = \frac{\varepsilon p_{sat}}{\rho R_v T} \varphi(h). \quad (16)$$

We wzorze (16) wilgotność powietrza po zewnętrznej stronie próbki $\varphi(h)$ oraz temperaturę T przyjęto na podstawie pomiaru warunków wewnątrz komory klimatycznej. Wilgotność po stronie wewnętrznej, $\varphi(0)$, przyjęto równą 95%.

Ostatnią nieznaną wielkość we wzorze (14), strumień $\langle j_v(h) \rangle$, obliczono na podstawie pomiarów ubytków masy zestawu pomiarowego typu Wet Cup (rys.1), korzystając z zależności

$$\langle j_v(h) \rangle = \frac{\Delta m}{\Delta t A} = \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t A}, \quad [\text{kg}/\text{m}^2\text{s}], \quad (17)$$

w której

m - masa zestawu, [kg],

t - czas, [s],

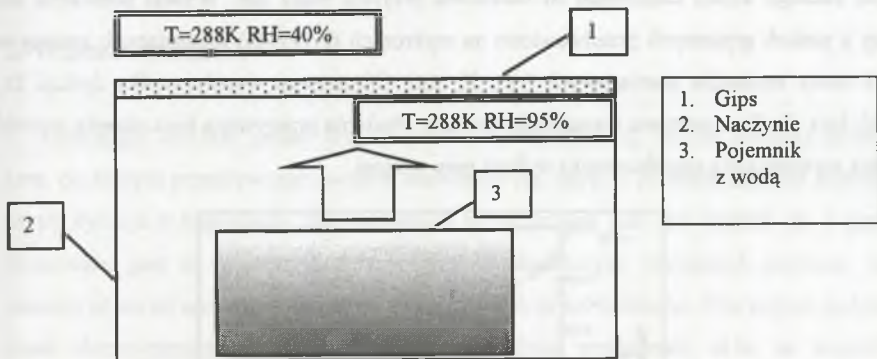
A - pole powierzchni próbki, [m^2].

Ostatecznie, uwzględniając zależności (14) do (17), oraz przyjmując upraszczająco w miejsce koncentracji $C_v(t)$ jej wartość średnią, zapisujemy wzór (14) w postaci

$$\langle D_v \rangle = -\frac{R_v T h}{p_{sat}} [\varphi(h) - \varphi(0)] + \left\{ \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t A} + \rho \int_0^h \frac{x}{h \Delta t} [C_{v, sr}(t + \Delta t) - C_{v, sr}(t)] dx \right\} \quad (18)$$

4.2. Przebieg pomiarów

Pomiary ubytków masy potrzebnych do wyznaczenia współczynnika dyfuzji pary wodnej wykonano dla próbek gipsowych, w warunkach ustalonej temperatury i wilgotności za pomocą trzech zestawów pomiarowych typu Wet Cup (rys.1), umieszczonych wewnątrz komory klimatycznej, zapewniającej stałe warunki ciepłno-wilgotnościowe doświadczenia.



Rys.1. Zestaw pomiarowy typu Wet Cup

Fig.1. The Wet Cup measuring set

Wszystkie próbki miały jednakową grubość równą 5,5 mm oraz średnicę 8 cm. Pomiary przeprowadzono w temperaturze 288 K i przy średniej wilgotności względnej 40% i 95% odpowiednio po zewnętrznej i wewnętrznej stronie próbki. Przed badaniem próbki przechowywane były w warunkach laboratoryjnych (293 K, 50% RH).

Badanie polegało na mierzeniu ubytków masy zestawu pomiarowego w określonych chwilach czasu za pomocą wag laboratoryjnych o rozdzielczości 0,001g. Jednocześnie, za pomocą rejestratora cyfrowego, odczytywane były warunki panujące w komorze (temperatura i wilgotność), z krokiem 15 min, przy czym do obliczeń przyjęto ich wartości średnie.

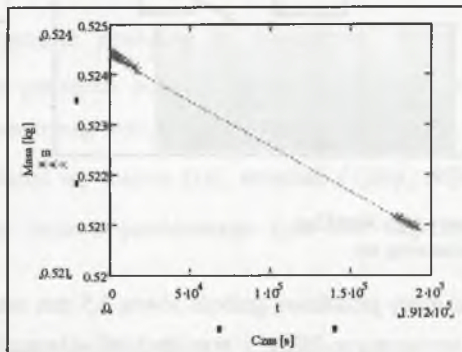
4.3. Wyniki pomiarów

W wyniku pomiarów otrzymano trzy zestawy danych zawierające czas pomiaru i aktualną masę zestawu. Poza tym do obliczeń przyjęto pewne wielkości zadane odczytane z tablic i z [3], które zestawiono w tabeli 2.

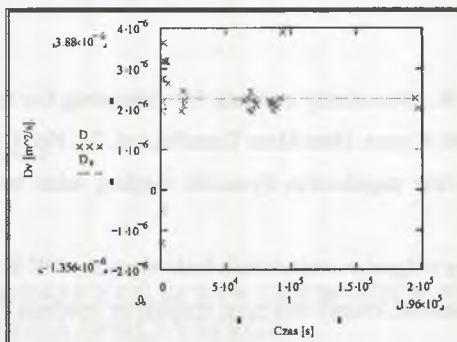
Tabela 2

Wielkości zadane		
Wielkość	Wartość	Jednostka
Ciśnienie pary wodnej nas.	1706	Pa
Stała gazowa pary wodnej	461,5	J/kg/K
Gęstość gipsu	1090	kg/m ³
Gęstość pary wodnej	1,1835	kg/m ³
Porowatość materiału	0,5	m ³ /m ³

Dla każdego kroku czasowego Δt określono przyrost masy Δm . Wyniki pomiarów dla jednej z próbek gipsowych przedstawiono na wykresach (krzyżki) ilustrujących zmiany w czasie masy zestawów pomiarowych (rys. 2) oraz obliczonego współczynnika dyfuzji D_v , [m²/s], (rys. 3). Czas pomiaru wynosił ok. dwa dni. Pozioma przerywana linia określa wartość średnią arytmetyczną współczynnika dyfuzji pary wodnej.



Rys.2. Zmiany w czasie współczynnika dyfuzji pary wodnej
Fig.2. Water vapour diffusion coefficient changes in time



Rys.3. Zmiany w czasie współczynnika dyfuzji pary wodnej
Fig.3. Water vapour diffusion coefficient changes in time

Otrzymany średni wynik z trzech badanych próbek wyniósł $3.883 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Porównując go z normowym współczynnikiem paroprzepuszczalności $\delta_p \approx 3,92 \text{ m}^2/\text{s}$ (przy założonych tych samych warunkach wyjściowych) dla gipsu o gęstości 1100 kg/m^3 można wnioskować, że wynik ten jest zbliżony do możliwego przedziału wartości.

5. Wnioski końcowe

Analizując wykresy zmian współczynnika dyfuzji (rys. 3), można również oszacować czas, po którym przepływ pary wodnej stabilizuje się, czyli w procesie zaczyna dominować czysta dyfuzja w kapilarach. Dla wszystkich trzech próbek czas ten wyniósł ok. 4 godziny. Oczywiście jest to rezultat słuszny jedynie w określonych warunkach pomiaru; zależy również silnie od warunków przechowywania próbek przed badaniem. Dla próbek poddanych przed eksperymentem np. wyżarzaniu czas ten ulega wydłużeniu, m.in. ze względu na zjawisko adsorpcji wilgoci na ściankach kapilar, połączone z pobieraniem wilgoci nie z pojemnika z wodą (nr 3 na rys. 1), lecz z otoczenia (komory klimatycznej). Tak więc, im bardziej warunki przechowywania próbek przed doświadczeniem będą zbliżone do warunków pomiaru, tym bardziej czas ustalania się współczynnika dyfuzji będzie krótszy.

LITERATURA

1. Drhalova J, Cerny R.: Non-steady methods for determining the moisture diffusivity of porous materials, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, vol. 25, No. 1, pp.109-116, 1998.
2. Kossecka E.: Wybrane zagadnienia dynamiki cieplnej ścian budynków, PAN-IPPT, Warszawa 1998.
3. Kubik J.: Przepływy wilgoci w materiałach budowlanych, OW PO, Opole 2000.
4. Slattery J.C.: Momentum, energy and mass transfer in continua, E. E. Krieger, Florida 1981.
5. Wyrwał J.: Ruch wilgoci w porowatych materiałach i przegrodach budowlanych, WSI w Opolu, Studia i monografie z. 31, Opole 1989.
6. Wyrwał J., Świrska J.: Problemy zawilgocenia przegród budowlanych, PAN KIL-IPPT, Warszawa 1998.

Recenzent: Dr hab. inż Dariusz Gawin

Abstract

In the paper the simplified multicomponent model of capillary-porous body is presented. The mass balance equations were used for deriving a basing formula for water vapour diffusion coefficient. The final form describing searched coefficient was obtained with use of the integral method. There was also carried out an experiment for evaluation the water vapour diffusion coefficient for gypsum. The obtained result was compared to literature data (Polish Building Code).