ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: BUDOWNICTWO z. 95 Nr kol. 1559

Zbigniew PERKOWSKI*
Politechnika Opolska

IZOTROPOWY OPIS NARASTANIA KRUCHYCH USZKODZEŃ W BETONIE

Streszczenie. W pracy sformułowano opis odkształcalności betonu z uwzględnieniem rozwoju mikrospękań w jego strukturze. Do oceny stopnia rozwoju uszkodzeń w betonie użyto parametru skalarnego, zakładając dla uproszczenia, iż w trakcie całego procesu obciążenia beton pozostaje materiałem izotropowym. Przyjęto, iż poziom uszkodzenia w materiale zależy od aktualnego stanu naprężenia oraz wyprowadzono warunki ograniczające ewolucję tego parametru na podstawie rozważań termomechanicznych.

ISOTROPIC DESCRIPTION OF BRITTLE DAMAGE EVOLUTION IN CONCRETE

Summary. A description for the deformability of concrete with taking into account an evolution of microcracks in its structure is formulated in the paper. Making an assumption that concrete is an isotropic material during the whole process of loading there is a scalar parameter used for the determination of damage evolution. It is also assumed that the level of damages in material is dependent on the present state of stress and the thermomechanical limitation is derived for this case.

1. Wprowadzenie

W trakcie procesu obciążenia betonu, z uwagi na jego kruche własności, pojawiają się w nim uszkodzenia (mikropęknięcia) o kierunkach zorientowanych zgodnie z kierunkami głównymi naprężeń, co powoduje, iż w betonie rozwija się wtórna anizotropia materiałowa. Problem ten był poruszany w pracach Chaboche'a [1], Chena [2], Dragona [3], Karpenki [6] i Litewki [11,12], gdzie sformułowano fenomenologiczne modele anizotropowej odkształcalności betonu z uszkodzeniami struktury. Główny nacisk przy wprowadzaniu wspomnianych modeli kładziony jest na przesłanki wynikające z empirycznych obserwacji działań natury mechanicznej na beton: mikropęknięcia rozwijają się pod kątem prostym do kierunku dodatnich naprężeń głównych, intensywność występowania mikropęknięć zależy od

*Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Jan Kubik

wartości pierwszego niezmiennika tensora naprężeń i od drugiego niezmiennika dewiatora naprężeń [4,8].

W niniejszej pracy podjęto próbę sformułowania równania fizycznego określającego odkształcenia w betonie z uwzględnieniem efektów mikrospękań w jego strukturze oraz ograniczeń termomechanicznych uwzględniających dyssypacje energii z materiału. Uszkodzenia, dla uproszczenia rozważań, reprezentowane są przez parametr skalarny, który wprowadzono przez porównanie niezmienników tensorów materiałowych anizotropowego i izotropowego opisujących odkształcalność betonu. Należy tu nadmienić, iż sprowadzenie opisu uszkodzeń betonu z anizotropii do izotropii narzuca ograniczenie do analiz materiału nieuszkodzonego w stanie początkowym i braku redystrybucji naprężeń wywołanej generacją makropęknieć.

2. Opis uszkodzeń- równanie fizyczne

Jak zaznaczono we wstępie pracy, beton poddany obciążeniom staje się wtórnie anizotropowy w wyniku nierównomiernej orientacji mikrorys. Stąd dokładna analiza odkształcalności betonu wymaga od nas, by uzależnić jego podatność w równaniu fizycznym od tensorowej miary uszkodzeń

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl}(\mathbf{D})\sigma_{kl}, \tag{1}$$

gdzie: A_{ijkl} - tensor określający podatność materiału ortotropowgo, D_0 - tensor efektu uszkodzenia [10].

Stosując teorię reprezentacji funkcji tensorowych (tw. Rivlina-Ericsena i Hamiltona-Cayleya) oraz ograniczając się do liniowej zależności, podajemy za Litewką [10] postać tensora materiałowego

$$\begin{aligned} A_{ijkl} = \frac{-\nu_0}{E_0}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1+\nu_0}{2E_0}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \alpha\left(\delta_{ij}D_{kl} + D_{ij}\delta_{kl}\right) + \\ + \gamma\left(\delta_{ik}D_{jl} + \delta_{il}D_{jk} + \delta_{jk}D_{il} + \delta_{jl}D_{ik}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie: E_0, ν_0 - początkowy moduł Younga i współczynnik Poissona, α, γ -stałe materiałowe, δ_{ij} - symbol Kroneckera.

Z drugiej strony równanie (1), pod kątem aplikacji, można znacznie uprościć pomijając rozwój anizotropii i uzależniając tensor określający podatność materiału od skalarnego parametru uszkodzenia

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{1-\omega}F_{ijkl}\sigma_{kl}, \tag{3}$$

gdzie: F_{ijkl} - tensor określający podatność materiału izotropowego, ω - skalarny parametr uszkodzenia przyjmujący wartości od zera dla materiału nieuszkodzonego do jedności w przypadku pełnego zniszczenia.

Tensor F_{ijkl} określony jest tutaj klasyczną zależnością

$$F_{ijkl} = \frac{-\nu_0}{E_0}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1+\nu_0}{2E_0}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right). \tag{4}$$

Zastosowanie równania (3) wprowadza założenie, iż beton pozostaje izotropowy w ciągu całego procesu obciążenia. W rzeczywistości, odkształcalność tego materiału cechuje się anizotropowością. Stąd, by poprawnie określić postać skalarnego parametru ω, wymagane jest wprowadzenie pewnej miary, która pozwoli ilościowo określać, w jakim stopniu materiał o własnościach anizotropowych różni się od materiału izotropowego o zbliżonych własnościach [7]. W przypadku materiału izotropowego tensor podatności ma wartości stałe, natomiast w materiale anizotropowym zależą one od wyboru układu odniesienia. Z tego powodu przy formułowaniu „izotropowego" opisu uszkodzeń w materiale niezbędne jest posłużenie się niezmiennikami tych tensorów. Są one dane zależnościami

$$I_1 = A_{ijij},\ I_2 = A_{iijj}, \tag{5}$$

gdzie: I_1, I_2 - niezmienniki tensora czwartego rzędu A_{ijkl}.

Porównując odpowiednie niezmienniki tensorów określających podatność materiału z uszkodzeniami o własnościach ortotropowych według zapisu (2), z jego izotropowym odpowiednikiem według zapisu (4), otrzymać możemy poszukiwane równanie na parametr ω

$$F_{iijj}\frac{1}{1-\omega} = A_{iijj} \rightarrow \omega = 1 - \frac{F_{iijj}}{A_{iijj}} \quad \text{lub} \quad F_{ijij}\frac{1}{1-\omega} = A_{ijij} \rightarrow \omega = 1 - \frac{F_{ijij}}{A_{ijij}}, \tag{6}$$

gdzie:

$$F_{ijij} = \frac{6+3\nu_0}{E_0},\ F_{iijj} = \frac{3-6\nu_0}{E_0},\ A_{ijij} = \frac{6+3\nu_0}{E_0} + (2\alpha + 8\gamma)D_{kk},\ A_{iijj} = \frac{3-6\nu_0}{E_0} + (6\alpha + 4\gamma)D_{kk}. \tag{7}$$

3. Równanie ewolucji uszkodzenia

W pracy przyjęto równanie ewolucji uszkodzenia, zakładając, iż o poziomie uszkodzeń decyduje aktualny stan naprężenia. Stąd tensor uszkodzenia będzie dany zależnością [11,12]

$$\Omega_{ij} = f_1\delta_{ij} + f_2\sigma_{ij} + f_3\sigma_{ik}\sigma_{kj}, \tag{8}$$

gdzie: Ω_{ij} - tensor uszkodzenia [13], f_1, f_2, f_3 - skalarne funkcje niezmienników tensora naprężeń.

Sprowadzając równanie (12) do formy liniowej, można zapisać je w postaci [11,12]:

$$\Omega_{ij} = Cs_{kl}s_{kl}\delta_{ij} + D\sqrt{\sigma_{kl}\sigma_{kl}}\sigma_{ij}, \tag{9}$$

gdzie: s_{kl} – dewiator tensora naprężeń, C, D – stałe materiałowe.

W równaniu (9) sprecyzowano postać skalarnych funkcji niezmienników tensora naprężenia zgodnie z relacjami:

$$f_1 = Cs_{kl}s_{kl},\ f_2 = D\sqrt{\sigma_{kl}\sigma_{kl}}. \tag{10}$$

Pierwszy człon równania (9) określa zniszczenia izotropowe, natomiast drugi zależy od znaku składowej tensora naprężenia i różnicuje wpływ ściskania-rozciągania na rozwój uszkodzeń, opisując część anizotropową zniszczenia.

Wiedząc, że wartości główne tensorów uszkodzenia i efektu uszkodzenia są związane zależnością:

$$D_i = \frac{\Omega_i}{1-\Omega_i}, \tag{11}$$

możemy rozpisać równania ewolucji na parametr uszkodzenia wprowadzone w zapisie (6):

$$\omega = 1 - \frac{\dfrac{3-6\nu_0}{E_0}}{\dfrac{3-6\nu_0}{E_0} + (6\alpha+4\gamma)\left(\dfrac{f_1+f_2\sigma_{11}}{1-f_1-f_2\sigma_{11}} + \dfrac{f_1+f_2\sigma_{22}}{1-f_1-f_2\sigma_{22}} + \dfrac{f_1+f_2\sigma_{33}}{1-f_1-f_2\sigma_{33}}\right)}, \tag{12}$$

$$\omega = 1 - \frac{\dfrac{6+3\nu_0}{E_0}}{\dfrac{6+3\nu_0}{E_0} + (2\alpha+8\gamma)\left(\dfrac{f_1+f_2\sigma_{11}}{1-f_1-f_2\sigma_{11}} + \dfrac{f_1+f_2\sigma_{22}}{1-f_1-f_2\sigma_{22}} + \dfrac{f_1+f_2\sigma_{33}}{1-f_1-f_2\sigma_{33}}\right)}. \tag{13}$$

4. Termomechanika procesu

Rozpatrzymy stosunkowo prosty model odkształcalności betonu, zakładający, iż beton nieuszkodzony jest materiałem liniowo sprężystym i izotropowym. Natomiast pojawiające się w trakcie procesu obciążania betonu uszkodzenia determinowane są jedynie przez aktualny stan naprężenia w materiale. Podejście takie ogranicza stosowalność rozważanego modelu do opisu odkształceń doraźnych bez uwzględnienia zjawisk reologicznych.

Energetyczny opis procesu narastania uszkodzeń struktury betonu rozpoczniemy od określenia niezależnych pól procesu termodynamicznego. Będzie to tensor odkształceń ε_{ij},

przyrost temperatury θ oraz parametr uszkodzenia ω jako zmienna wewnętrzna omawianego procesu. Wówczas energia swobodna będzie określona następująco:

$$\rho A = \rho A(\varepsilon_{ij}, \theta, \omega), \tag{14}$$

gdzie: ρ – gęstość materiału, A – energia swobodna.

W wyniku typowych rozważań termodynamicznych z konfrontacji bilansu energii i nierówności wzrostu entropii otrzymamy nierówność rezydualną [5]

$$-\rho S\dot{\theta} - \rho\dot{A} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{q_i\theta_{,i}}{T_0} \geq 0, \tag{15}$$

gdzie: S - entropia, q_i - strumień ciepła, T_0 - temperatura początkowa, θ-przyrost temperatury.

Zależność powyższa powinna być spełniona dla każdego rzeczywistego procesu narastania odkształceń i uszkodzeń oraz zmian przyrostów temperatury.

Na potrzeby analizowanego procesu energię swobodną aproksymować będziemy następującym wielomianem

$$\begin{aligned} \rho A(\varepsilon_{ij}, \theta, \omega) &= \rho A_0 - (\sigma_0)_{ij}\varepsilon_{ij} - \rho S_0\theta + \\ &+ \frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \frac{1}{2}\omega E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \frac{1}{2}c_v\theta^2 - \beta_{ij}\varepsilon_{ij}\theta + \omega\beta_{ij}\varepsilon_{ij}\theta \ , \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie: E_{ijkl} - tensor określający sztywność materiału, $A_0, (\sigma_0)_{ij}, S_0$ - energia swobodna, tensor naprężenia i entropia dla stanu naturalnego, β_{ij} - tensor współczynników określających naprężenia termiczne, c_v - ciepło właściwe.

Tensory E_{ijkl} i β_{ij} opisują własności materiału izotropowego, stąd mamy:

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \ \beta_{ij} = \alpha_T(3\lambda + 2\mu)\delta_{ij}, \tag{17}$$

gdzie: λ, μ - stałe Lamego, α_T - współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej.

Wstawiając energię swobodną w formie (16) do relacji (15), uzyskamy:

$$\begin{aligned} &(\rho S_0 + c_V\theta + \beta_{ij}\varepsilon_{ij} - \beta_{ij}\omega\varepsilon_{ij} - \rho S)\dot{\theta} + \\ &+ ((\sigma_0)_{ij} - E_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \omega E_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \beta_{ij}\theta - \omega\beta_{ij}\theta + \sigma_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij} + \\ &+ \left(\frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - \beta_{ij}\varepsilon_{ij}\theta\right)\dot{\omega} - \frac{q_i\theta_{,i}}{T_0} \geq 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Powyższa nierówność jest liniowa względem $\dot{\theta}$ i $\dot{\varepsilon}_{ij}$, stąd słuszne są wynikające z niej związki:

$$\rho S = \rho S_0 + c_V\theta + \beta_{ij}\varepsilon_{ij} - \omega\beta_{ij}\varepsilon_{ij}, \tag{19}$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \omega E_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\theta + \omega\beta_{ij}\theta - (\sigma_0)_{ij}, \tag{20}$$

$$\left(\frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - \beta_{ij}\varepsilon_{ij}\theta\right)\dot{\omega} - \frac{q_i\theta_{,i}}{T_0} \geq 0 . \tag{21}$$

Z uwagi na tematykę podjętą w pracy pominiemy w rozważaniach wpływy termiczne i naprężenia stanu naturalnego:

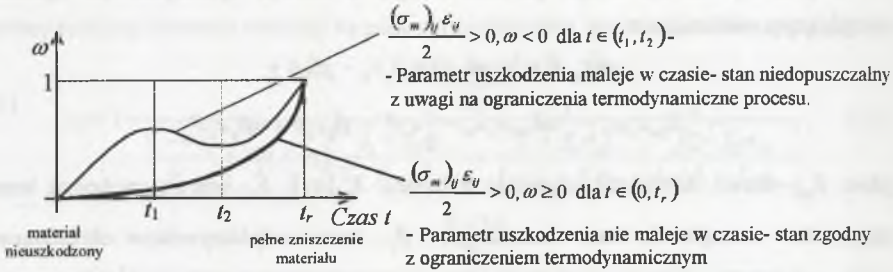
$$E_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \omega E_{ijkl}\varepsilon_{kl} >> -\beta_{ij}\theta + \omega\beta_{ij}\theta - (\sigma_0)_{ij}, \quad \frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} >> \beta_{ij}\varepsilon_{ij}\theta, \quad \frac{q_i\theta_{,i}}{T_0} \cong 0 \tag{22}$$

Wówczas otrzymamy

$$\sigma_{ij} = (1-\omega)E_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{23}$$

$$\frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\dot{\omega} \geq 0 \rightarrow \frac{(\sigma_m)_{ij}\varepsilon_{ij}}{2}\dot{\omega} \geq 0, \tag{24}$$

gdzie: $(\sigma_m)_{ij}$ - tensor naprężeń od działań mechanicznych (przy założeniu braku odkształceń dystorsyjnych).



Rys.1. Ewolucja parametru uszkodzenia ω
Fig.1. Evolution of the damage parameter ω

Powyższy warunek na rozwój parametru uszkodzenia ω pozwala stwierdzić, iż w przypadku, kiedy energia zgromadzona w ciele w wyniku wykonania przez naprężenia pracy na odkształceniach jest dodatnia, prędkość parametru uszkodzenia jest nieujemna. Warunek ten eliminuje sytuację, w której parametr uszkodzenia będzie ulegał zmniejszaniu podczas procesu odciążenia materiału (rys.1).

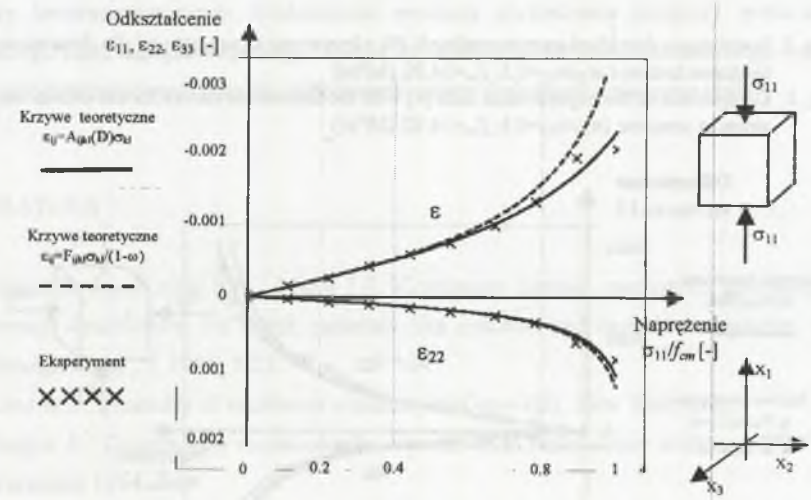
5. Stałe materiałowe

Wyznaczenie parametrów materiałowych występujących w równaniach fizycznych (1) i (3) na odkształcenia w betonie należy oprzeć na podstawie danych doświadczalnych. Prócz standardowych wielkości E_0, ν_0 pojawiają się tu także nowe stałe α, γ, C i D określające

wpływ uszkodzeń w strukturze materiału na jego odkształcalność. Sposób wyznaczenia tych stałych został wyczerpująco opisany przez Litewkę w pracach [11,12], gdzie proponuje się tu wykorzystać wyniki z badania dwuosiowego i jednoosiowego statycznego ściskania próbek betonowych. Porównuje się tam pomiary eksperymentalne [9,11] z uzyskanymi na drodze teoretycznej krzywymi opisanymi równaniem (1). Przykładowo, przytoczono poniżej dwa zestawy wartości parametrów, gdzie symbolem f_{cm} oznaczono średnią wytrzymałość na ściskanie:

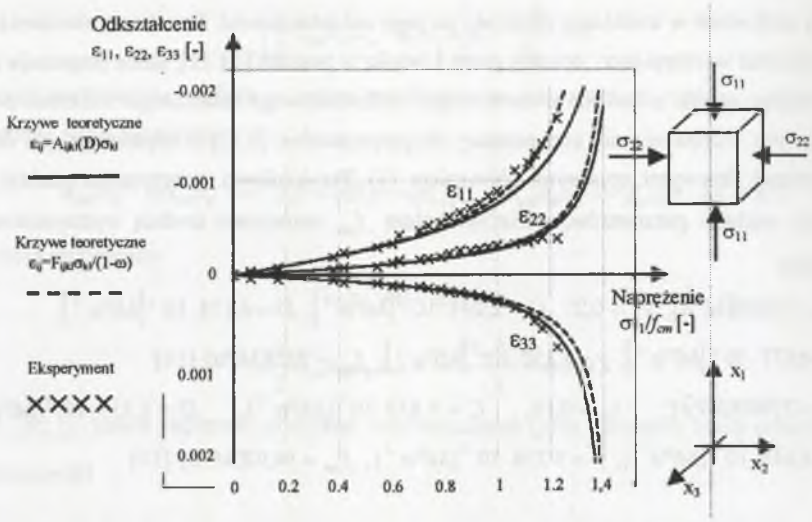
1) $E_0 = 20200[MPa]$, $\nu_0 = 0{,}21$, $C = 2{,}244 \cdot 10^{-3}[MPa^{-2}]$, $D = 6{,}174 \cdot 10^{-4}[MPa^{-2}]$, $\alpha = -4{,}877 \cdot 10^{-6}[MPa^{-1}]$, $\gamma = 1{,}352 \cdot 10^{-5}[MPa^{-1}]$, $f_{cm} = 23{,}9[MPa]$ [11]

2) $E_0 = 27900[MPa]$, $\nu_0 = 0{,}19$, $C = 4{,}432 \cdot 10^{-3}[MPa^{-2}]$, $D = 3{,}233 \cdot 10^{-4}[MPa^{-2}]$, $\alpha = -3{,}645 \cdot 10^{-6}[MPa^{-1}]$, $\gamma = 9.338 \cdot 10^{-6}[MPa^{-1}]$, $f_{cm} = 14{,}92[MPa]$ [11]



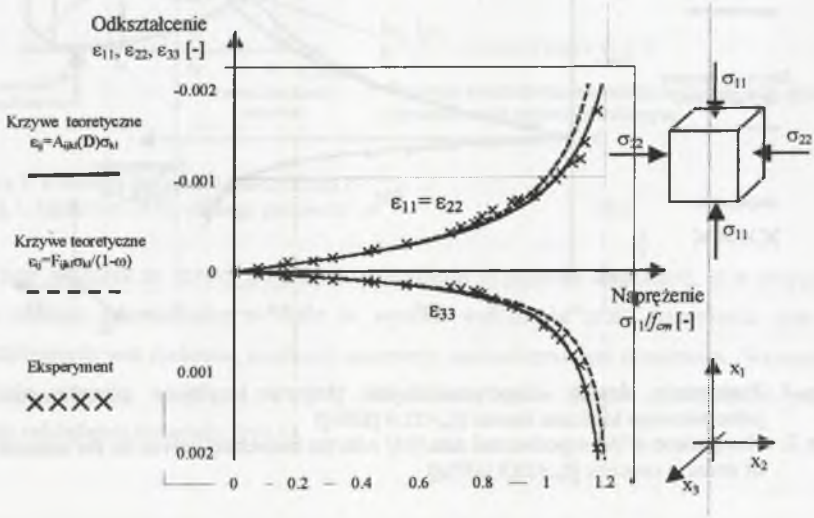
Rys. 2. Porównanie danych eksperymentalnych [11] z krzywymi teoretycznymi dla jednoosiowego ściskania betonu (f_{cm}=23,9 [MPa])

Fig. 2. Comparison of the experimental data [11] with the theoretical curves for the uniaxial state of stress in concrete (f_{cm}=23,9 [MPa])



Rys. 3. Porównanie danych eksperymentalnych [9] z krzywymi teoretycznymi dla dwuosiowego ściskania betonu ($\sigma_{22}/\sigma_{11}=0{,}5$; $f_{cm}=14{,}92$ [*MPa*])

Fig. 3. Comparison of the experimental data [9] with the theoretical curves for the biaxial state of stress in concrete ($\sigma_{22}/\sigma_{11}=0{,}5$; $f_{cm}=14{,}92$ [*MPa*])



Rys. 4. Porównanie danych eksperymentalnych [9] z krzywymi teoretycznymi dla dwuosiowego ściskania betonu ($\sigma_{22}/\sigma_{11}=1$; $f_{cm}=14{,}92$ [*MPa*])

Fig. 4. Comparison of the experimental data [9] with the theoretical curves for the biaxial state of stress in concrete ($\sigma_{22}/\sigma_{11}=1$; $f_{cm}=14{,}92$ [*MPa*])

Porównawczo, dla przedstawionych danych zestawiono na rysunkach 2, 3 i 4 krzywe opisujące przebieg naprężeń i odkształceń, uzyskane z zastosowaniem tensora efektu

uszkodzenia [11] i parametru uszkodzenia wyliczonego w oparciu o pierwsze niezmienniki tensorów podatności.

6. Wnioski

Zaproponowane równanie do opisu zależności naprężenie-odkształcenie z wykorzystaniem parametru skalarnego daje duże uproszczenie pod kątem aplikacji modelów opisujących uszkodzenia wywołanych deformacjami natury mechanicznej. Należy jednak zauważyć, iż w stanach bliskich granicy wytrzymałości przy nierównomiernym stosunku naprężeń głównych wystąpić mogą rozbieżności w stosunku do krzywych opartych na tensorowym opisie uszkodzeń.

W pracy wprowadzono także ograniczenie stawiane na rozważany proces, wynikające z analizy termomechanicznej. Uzależnienie ewolucji uszkodzenia struktury materiału od aktualnego stanu naprężenia pociąga za sobą konieczność postawienia dodatkowego warunku, iż dla procesu odciążenia wartość zastosowanej miary uszkodzenia nie może maleć.

LITERATURA

1. Chaboche J.L., Lesne P.M., Maire J.F.: Continuum damage mechanics, anisotropy and damage deactivation for brittle materials like concrete and ceramic composites, Int. J. Damage Mech., 1, 1995, 5-22.
2. Chen W.F.: Plasticity of reinforced concrete, McGraw-Hill, New York 1982.
3. Dragon A.: Kontynualny model ośrodka z parametrem przebudowy struktury, IPPT PAN, Warszawa 1974.
4. Hayhurst D.R., Creep rapture under multi axial state of stress, J. Mech. Phys. Solids, 20, 1972.
5. Jakubiak A., Kubik J.: Wpływ dyfuzji na sprężysto-plastyczne i kruche deformacje materiałów, ZN WSI Opole, Budownictwo Z35, 1992.
6. Karpenko N.I.: K postrojeniju obszczej ortotropnoj modeli deformirowanija betona, Stroitelnaja Miechanika i Rasczjet Sooruženji, 2, 1987, 31-36.
7. Kurzydłowski K.J.: Mechanika materiałów, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993.
8. Leckie F.A., Hayhurst D.R., Creep raptures of structures, Proc. R. Soc. Lond., A.340, 1974.

9. Ligęza W.: Experimental stress-strain relationship for cement concrete under biaxial compression, Proceedings of the International Conference Concrete and Concrete Structures, Zilina 1999, 47-54.
10. Litewka A.: Uszkodzenie i pękanie metali w warunkach pełzania, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Rozprawy Nr 250, Poznań 1991.
11. Litewka A., Bogucka J., Dębiński J.: Analytical and experimental study of damage induced anisotropy of concrete, ZN Politechniki Pznańskiej, Budownictwo Lądowe Z45, 2001.
12. Litewka A., Dębiński J.: Anizotropowy model odkształcalności betonu w złożonym stanie naprężenia, XLIII Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, cz.6, Poznań 1997, 56-64.
13. Murakami S., Ohno N.: A continuum theory of creep and creep damage, Creep in Structures, red: A.R.S.Ponter, D.R.Hayhurst, Springer-Verlag, Berlin 1981, 422-444.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Białkiewicz

Abstract

An description for the deformability of concrete is formulated in the paper taking into account the microcracks evolution in its structure, which arise generally in perpendicular sections to directions of tensile principle stresses. This phenomenon generates the secondary anisotropy in concrete. Making an assumption that the damage evolution can be treated approximately as an isotropic one it is possible using a scalar parameter for determination it what gives a great simplification in the considerations. Then the definition of the scalar damage parameter should be based on a comparison of the invariants of compliance tensors formulated for the anisotropic and isotropic cases. This operation allows stating how an anisotropic material differs from an isotropic one with similar properties. Further it is assumed that the damage evolution is dependent on the present sate of the stress tensor. An elimination of the situation that the scalar damage parameter can diminish during the process of unloading is introduced by the thermomechanical limitations.