

Piotr POPIEL*

Politechnika Szczecińska

NUMERYCZNA ANALIZA STOCHASTYCZNEJ STATYKI I DYNAMIKI UKŁADÓW BELEK WSPORNIKOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono sformułowania zagadnień stochastycznej statyki i dynamiki układów konstrukcyjnych z parametrami losowymi zdefiniowanymi przez ich pierwsze dwa momenty statystyczne. Przedyskutowano rozwiązania analityczne i numeryczne. W rozwiązaniu analitycznym zastosowano technikę perturbacji z dokładnością do drugiego rzędu do analizy pierwszych dwóch momentów statystycznych. W sformułowaniu numerycznym zaimplementowano metodę stochastycznych elementów skończonych. Wyniki przedstawiono na przykładzie belki wspornikowej obciążonej siłą wymuszającą.

NUMERICAL ANALYSIS OF STOCHASTIC STATICS AND DYNAMICS OF CANTILEVER SYSTEMS

Summary. The paper presents a formulation for stochastic problems of static and dynamic systems with random parameters, that are defined by first two statistical moments. Analytical and numerical solutions are shown. In the analytical solution the second-order perturbation technique is employed for second-moment analysis, while in the numerical solution the stochastic finite element model is applied. The numerical results are presented via a cantilever beam excited by a Heaviside force.

1. Wstęp

W dobie szybkiego rozwoju metod komputerowych najbardziej powszechną metodą analizy konstrukcji jest metoda elementów skończonych (MES), wśród wielu prac wymienić można [1-2]. Rosnące możliwości komputerów spowodowały jednak stworzenie nowych metod uwzględniających aspekty losowości konstrukcji. Naprzeciw tym potrzebom wychodzi stochastyczna metoda elementów skończonych (SMES).

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Tran Duong Hien, prof. Politechniki Szczecińskiej

Powstając na bazie deterministycznej wersji MES, uzupełnia tę metodę o opcję stochastyczną, pozwalającą uwzględnić niepewności danych wejściowych i wyjściowych w rozpatrywanych układach konstrukcyjnych. Niepewności te zdefiniowane są poprzez parametry losowe, w szczególności przez wartości średnie i wzajemne korelacje lub kowariancje. Mogą to być lokalne charakterystyki geometryczne i materiałowe układu, jak pole przekroju elementu belkowego, grubość elementu płytowego czy powłokowego, moduł Younga, liczba Poissona, gęstość masy itp., również obciążenie zewnętrzne. Jako dane wyjściowe otrzymujemy odpowiednio pierwsze dwa momenty statystyczne, tj. wartości średnie i wzajemne kowariancje poszukiwanych odpowiedzi, takich jak: przemieszczenia, naprężenia etc.

W pracy przedstawiono analizę układu belek wspornikowych rozwiązanych zarówno metodą analityczną, jak i metodą stochastycznych elementów skończonych. Pokazano przykład belki wspornikowej obciążonej siłą skupioną prostopadłą do jej osi. Założono losowy rozkład pola przekroju poprzecznego.

Praca składa się z 4 rozdziałów. Po wprowadzeniu w punkcie 2 przedstawiono idee i główne założenia metody. W rozdziale 3 pokazano sformułowanie analityczne oraz numeryczne zagadnienia. Rozdział 4 zawiera wnioski końcowe.

W pracy wszystkie wartości liczbowe podano w wymiarach N, cm, s. Zastosowano zapis w konwencji sumacyjnej.

2. Modele stochastyczne

2.1. O podejściu perturbacyjnym drugich momentów

Metoda stochastycznych elementów skończonych opiera się na perturbacyjnej analizie drugich momentów statystycznych (PADMS). Sama zaś PADMS wywodzi się z analizy pierwszych dwóch momentów statystycznych zmiennych losowych wyrażonych przez rozwinięcie potęgowe do drugiego rzędu. Rozpatrzmy wektor $\mathbf{x} = \{x_i(\mathbf{a})\}$, $i=1,2,\dots, \mathfrak{z}$, gdzie $\mathbf{a}=\{a_r\}$, $r=1,2,\dots, \mathfrak{r}$ jest wektorem parametrów losowych, zdefiniowanych przez pierwsze dwa momenty statystyczne - wartości oczekiwane $\mathbf{a}^0=\{a_r^0\}$ oraz macierz kowariancji $\text{Cov}(a_r, a_s)$, $r,s= 1,2,\dots, \mathfrak{r}$. Rozwijając $x_i(\mathbf{a})$ w szereg Taylora wokół wartości średnich \mathbf{a}^0 z dokładnością do drugiego rzędu:

$$\mathbf{x}(\mathbf{a}) = \mathbf{x}(\mathbf{a}^0) + \left. \frac{\partial x_i}{\partial a_r} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^0} (\mathbf{a}_r - \mathbf{a}_r^0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_r \partial a_s} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^0} (\mathbf{a}_r - \mathbf{a}_r^0)(\mathbf{a}_s - \mathbf{a}_s^0) \quad (1)$$

i stosując przekształcenia liniowe mamy:

$$\begin{aligned}
 E[x] &= x_i(a_r^0) + \frac{\partial x_i}{\partial a_r} \overbrace{E[(a_r - a_r^0)]}^{=0} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_r \partial a_s} E[(a_r - a_r^0)(a_s - a_s^0)] \\
 &= x_i(a_r^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_r \partial a_s} \text{Cov}(a_s, a_r) = x_i(a_r^0) + \frac{1}{2} x_i^{(2)}(a_r^0) \\
 \text{Cov}(x_i, x_j) &= E[(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)] = \frac{\partial x_i}{\partial a_r} \frac{\partial x_j}{\partial a_s} E[(a_r - a_r^0)(a_s - a_s^0)] + \\
 &\approx \frac{\partial x_i}{\partial a_r} \frac{\partial x_j}{\partial a_s} \text{Cov}(a_s, a_r)
 \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie: $i, j = 1, 2, \dots, \bar{i}$; $r, s = 1, 2, \dots, \bar{r}$. Należy zwrócić uwagę na to, że określone w punktach a_r^0 zerowe, pierwsze i drugie pochodne są wielkościami deterministycznymi. W równ. (2) występuje wektor $x_i^{(2)}(a_r^0)$ przedstawiający liniową kombinację \bar{r}^2 wektorów $\partial^2 x_i / \partial a_r \partial a_s$, $r, s = 1, 2, \dots, \bar{r}$. Sugeruje to, że możliwe jest zastąpienie \bar{r}^2 równań dla drugich pochodnych przez jedno równanie dla $x_i^{(2)}$; będzie to omówione szczegółowo w następnym rozdziale. Zależności (2) określają pierwsze dwa momenty centralne, czyli wartości oczekiwane i wzajemne kowariancje zmiennych x_i .

W porównaniu z technikami statystycznymi, np. symulacja Monte Carlo, o zaletach PADMS decyduje to, że: (i) nie jest konieczne założenie normalnego rozkładu dla parametrów losowych a_r , (ii) na wejściu potrzebne są tylko pierwsze dwa momenty, a nie cały rozkład i (iii) koszt obliczeń jest o rząd wielkości niższy przy tej samej dokładności. Mankamentami PADMAS są:

- (a)- zmienne x_i muszą spełniać warunki małej fluktuacji i ciągłości w punktach a_r^0 ,
- (b)- na wyjściu są tylko pierwsze dwa momenty probabilistyczne
- (c)- dokładność $\text{Cov}(x_n, x_m)$ jest pierwszego stopnia ($E[x_n]$ stopnia drugiego).

2.2. Sformułowanie stochastycznej metody elementów skończonych

Niech będzie dany liniowy układ równań różniczkowych zwyczajnych o i stopniach swobody:

$$L_{ij}(a_r)[x_j] = f_i(a_r, \tau) \quad i, j = 1, 2, \dots, \bar{i}; r = 1, 2, \dots, \bar{r}, \tag{3}$$

gdzie L_{ij} oznacza liniowy operator różniczkowy:

$$L_{ij}(a_r) = m_{ij}(a_r) \frac{d^2}{d\tau^2} + c_{ij}(a_r) \frac{d}{d\tau} + k_{ij}(a_r). \quad (4)$$

Wektor obciążeń zewnętrznych f_i i macierze bezwładności, tłumienia i sztywności m_{ij}, c_{ij}, k_{ij} są funkcjami wektora parametrów losowych $\mathbf{a} = \{a_r\}$, zdefiniowanych przez wektor wartości oczekiwanych $\mathbf{a}^0 = \{a_r^0\}$ oraz macierz kowariancji $\text{Cov}(a_r, a_s)$. Wektor x_i oraz jego kolejne dwie pochodne oznaczają odpowiednio wektory przemieszczeń uogólnionych, prędkości i przyspieszeń. Mamy więc do czynienia z układem równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego z parametrami losowymi (w deterministycznej wersji MES – to układ równań ze stałymi współczynnikami). Funkcje $f_i(a_r, \tau)$, $m_{ij}(a_r)$, $c_{ij}(a_r)$, $k_{ij}(a_r)$ są dwukrotnie różniczkowalne w punktach a_r^0 , przy czym dla $a_r = a_r^0$ macierze $m_{ij}(a_r^0)$, $c_{ij}(a_r^0)$, $k_{ij}(a_r^0)$ są symetryczne i dodatnio określone. Składowe wektora przemieszczeń x_i są więc niejawnymi funkcjami parametrów losowych a_r i czasu $\tau, x_i = x_i(a_r, \tau)$. Celem analizy jest określenie pierwszych dwóch momentów zmiennych losowych $x_i(a_r, \tau)$, tzn. $E[x_i]$ i $\text{Cov}(x_i, x_j)$.

Ponieważ $x_i(a_r, \tau)$, $f_i(a_r, \tau)$, $m_{ij}(a_r)$, $c_{ij}(a_r)$, $k_{ij}(a_r)$ są funkcjami zmiennych losowych, dokonując perturbacji funkcji wokół wartości oczekiwanych a_r^0 do drugiego rzędu, z małym parametrem ε , otrzymamy wyrażenie, które zapisane symbolicznie jako

$$(\cdot) = (\cdot)^0 + (\cdot)^r \varepsilon \Delta a_r + \frac{1}{2} (\cdot)^{rs} \varepsilon^2 \Delta a_r \Delta a_s, \quad (5)$$

gdzie

$$\varepsilon \Delta a_r = \delta a_r = \varepsilon (a_r - a_r^0) \quad (6)$$

$$\varepsilon^2 \Delta a_r \Delta a_s = \delta a_r \delta a_s = \varepsilon^2 (a_r - a_r^0)(a_s - a_s^0) \quad (7)$$

są odpowiednio pierwszą wariacją zmiennej a_r wokół a_r^0 , drugą mieszaną wariacją a_r, a_s wokół a_r^0, a_s^0 . Symbole $(\cdot)^0$, $(\cdot)^r$ i $(\cdot)^{rs}$ oznaczają odpowiednio wartości zerowych, pierwszych i drugich pochodnych cząstkowych określonych w punktach, czyli

$$(\cdot)^r = \left. \frac{\partial(\cdot)}{\partial a_r} \right|_{a_r=a_r^0}, \quad (\cdot)^{rs} = \left. \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial a_r \partial a_s} \right|_{a_r=a_r^0} \quad (8)$$

Zgodnie z koncepcją perturbacyjną podstawiając równ.(5) do równ.(3) dochodzimy do

$$\begin{aligned}
 & \left(m_{ij}^0 \ddot{x}_j^0 + c_{ij}^0 \dot{x}_j^0 + k_{ij}^0 x_j^0 \right) + \left(m_{ij}^0 \ddot{x}_j^r + c_{ij}^0 \dot{x}_j^r + k_{ij}^0 x_j^r \right) \underline{\varepsilon} \Delta a_r + \left(m_{ij}^0 \ddot{x}_j^{rs} + c_{ij}^0 \dot{x}_j^{rs} + k_{ij}^0 x_j^{rs} \right) \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^2 \Delta a_r \Delta a_s \\
 & - f_i^0 + \left[f_i^r - \left(m_{ij}^r \ddot{x}_j^0 + c_{ij}^r \dot{x}_j^0 + k_{ij}^r x_j^0 \right) \right] \underline{\varepsilon} \Delta a_r - \left[f_i^{rs} - \left(m_{ij}^r \ddot{x}_j^s + c_{ij}^r \dot{x}_j^s + k_{ij}^r x_j^s \right) \right. \\
 & \left. + \left(m_{ij}^s \ddot{x}_j^r + c_{ij}^s \dot{x}_j^r + k_{ij}^s x_j^r \right) + \left(m_{ij}^{rs} \ddot{x}_j^0 + c_{ij}^{rs} \dot{x}_j^0 + k_{ij}^{rs} x_j^0 \right) \right] \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^2 \Delta a_r \Delta a_s = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

Uwzględniając dowolność i wzajemną niezależność wariacji δa_r i porównując człony tego samego rzędu względem ε , w równ. (9) otrzymujemy następujący hierarchiczny układ równań różniczkowych SMES:

- jeden układ zerowego rzędu równań dla $x_i^0(a_r^0, \tau)$

$$m_{ij}^0 \ddot{x}_j^0 + c_{ij}^0 \dot{x}_j^0 + k_{ij}^0 x_j^0 = f_i^0 \tag{10}$$

- \check{r} układów pierwszego rzędu równań dla $x_i^{r'}(a_r^0, \tau)$, $r=1, 2, \dots, \check{r}$

$$m_{ij}^0 \ddot{x}_j^{r'} + c_{ij}^0 \dot{x}_j^{r'} + k_{ij}^0 x_j^{r'} = f_i^{r'} - \left(m_{ij}^r \ddot{x}_j^0 + c_{ij}^r \dot{x}_j^0 + k_{ij}^r x_j^0 \right) \tag{11}$$

- jeden układ drugiego rzędu równań dla $x_i^{(2)}(a_r^0, \tau)$

$$\begin{aligned}
 m_{ij}^0 \ddot{x}_j^{(2)} + c_{ij}^0 \dot{x}_j^{(2)} + k_{ij}^0 x_j^{(2)} &= f_i^{(2)} - \left(m_{ij}^{(2)} \ddot{x}_j^0 + c_{ij}^{(2)} \dot{x}_j^0 + k_{ij}^{(2)} x_j^0 \right) \\
 &- 2 \left(m_{ij}^r \ddot{x}_j^{r'} + c_{ij}^r \dot{x}_j^{r'} + k_{ij}^r x_j^{r'} \right) \text{Cov}(a_r, a_s)
 \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie $(\cdot)^{(2)}$ oznacza dwukrotną sumę, por. równ.(8)

$$(\cdot)^{(2)} = (\cdot)^{rs} \text{Cov}(a_r, a_s) \quad r, s = 1, 2, \dots, \check{r} \tag{13}$$

Całkowita liczba układów równań wynosi więc $(\check{r} + 2)$; dla porównania symulacja Monte Carlo wymaga o $(10^3 \check{r})$ układów próbnych dla rozwiązań o podobnej dokładności.

Traktując równania statyki jako szczególny przypadek dynamiki równ. (3), gdy pominięte są efekty bezwładności i tłumienia $m_{ij}=0$, $c_{ij}=0$, tzn.

$$k_{ij}(a_r) x_j = f_i(a_r) \quad i, j = 1, 2, \dots, I \tag{14}$$

układ (10)-(12) równań różniczkowych zredukowano do:

- jednego układu zerowego rzędu równań dla $x_i^0(a_r^0)$

$$k_{ij}^0 x_j^0 = f_i^0 \tag{15}$$

- \check{r} układów pierwszego rzędu równań dla $x_i^{r'}(a_r^0)$, $r=1, 2, \dots, \check{r}$

$$k_{ij}^0 x_j^{r'} = f_i^{r'} - k_{ij}^r x_j^0 \tag{16}$$

- jednego układu drugiego rzędu równań dla $x_i^{(2)}(a_r^0)$

$$k_{ij}^0 x_j^{(2)} = f_i^{(2)} - k_{ij}^{(2)} x_j^0 - 2k_{ij}^r x_j^s \text{Cov}(a_r, a_s) \quad (17)$$

Po kolejnych rozwiązaniach układów równań (10)-(12) dla x_i^0 , x_i^r i $x_i^{(2)}$ otrzymujemy dwa momenty probabilistyczne przemieszczeń uogólnionych x_i (a_r, τ) oraz ich pochodnych względem czasu, czyli prędkości i przyspieszeń.

$$E[x_i, t] = x_i^0(a_r^0, t) + \frac{1}{2} x_i^{(2)}(a_r^0, t) \quad (18)$$

$$\text{Cov}(x_i(a_r^0, t_1), x_j(a_r^0, t_2)) = x_i^r(a_r^0) x_j^s(a_r^0) \text{Cov}(a_r, a_s) \quad i, j = 1, 2, \dots, \checkmark; r = 1, 2, \dots, \checkmark \quad (19)$$

gdzie t_1 i t_2 są punktami czasowymi. Dla zagadnień statyki rozwiązania układów równań (15)-(17) określają dwa pierwsze momenty tylko dla przemieszczeń x_i (a_r)

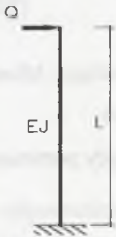
$$E[x_i] = x_i^0(a_r^0) + \frac{1}{2} x_i^{(2)}(a_r^0) \quad (20)$$

$$\text{Cov}(x_i(a_r^0), x_j(a_r^0)) = x_i^r(a_r^0) x_j^s(a_r^0) \text{Cov}(a_r, a_s) \quad i, j = 1, 2, \dots, \checkmark; r = 1, 2, \dots, \checkmark \quad (21)$$

3. Przykłady ilustrujące

3.1. Rozwiązanie analityczne belki wspornikowej

Rozpatrujemy belkę wspornikową o długości L , sztywności na zginane EJ , polu przekroju A , obciążony siłą skupioną Q (rys.1.).



Rys. 1. Schemat belki
Fig. 1. Beam's scheme

Zakładamy, że E, Q, L dane są deterministycznie, natomiast pole przekroju A przyjmujemy jako zmienną losową wyrażoną za pomocą $E[A]=A^0$ oraz $\text{Var}[A]$. Szukamy $E[x]$ oraz $\text{Var}[x]$.

Wychodząc z równania równowagi

$$R(J) = Q - K(J) \cdot y(J) = 0, \quad (22)$$

które różniczkujemy dwukrotnie. Zgodnie z równ.(5) otrzymujemy hierarchiczny układ równań równowagi w postaci:

$$k^0(A)x^0 = Q^0 \quad (23)$$

$$k^0(A)x^1 = Q^1 - k^1(A)x^0 \quad (24)$$

$$k^0(A)x^2 = Q^2 - 2k^1(A)x^1 - k^2(A)x^0 \quad (25)$$

Poszukiwane wartości $E[x]$ oraz $\text{Var}[x]$ można zapisać:

$$E(x) = x^0 + \frac{1}{2}(x'')^2 Var(A) \quad (26)$$

$$Var(x) = (x')^2 Var(A) \quad (27)$$

Zakładając $J = \beta A^2$, w naszym przypadku różniczkujemy najpierw względem J,

$$\begin{aligned} k^0 &= \frac{3EJ^0}{L^3} & Q^0 &= Q \\ k^1 &= \frac{3E}{L^3} & Q^1 &= 0 \\ k^2 &= 0 & Q^2 &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Podstawiając równanie (26) do równań(21)-(23), otrzymujemy:

$$\frac{3EJ^0}{L^3} x^0 = Q \quad (29)$$

$$\frac{3EJ^0}{L^3} x^1 = -\frac{3E}{L^3} x^0 \quad (30)$$

$$\frac{3EJ^0}{L^3} x^2 = -2\frac{3E}{L^3} x^1 \quad (31)$$

i dalej

$$x^0 = \frac{QL^3}{3E(J^0)} \quad x^1 = -\frac{QL^3}{3E(J^0)^2} \quad x^2 = \frac{2QL^3}{3E(J^0)^3} \quad (32)$$

Pierwsze dwa momenty statystyczne dla belki wspornikowej wynoszą:

$$E(x) = \frac{QL^3}{3E(J^0)} \left[1 + \frac{1}{(J^0)^2} Var(J^0) \right] \quad (33)$$

$$Var(x) = \left[\frac{QL^3}{3E(J^0)^2} \right]^2 Var(J^0), \quad (34)$$

które po podstawieniu $J = \beta A^2$ są równe:

$$E(x) = \frac{QL^3}{3E(\beta A^2)} \left[1 + \frac{1}{(\beta A^2)^2} Var(A^0) \right] \quad (35)$$

$$Var(x) = \left[\frac{QL^3}{3E(\beta A^2)^2} \right]^2 Var(A^0) \quad (36)$$

W obliczeniach przyjęto następujące dane liczbowe: długość belki $L = 600$, moduł Younga $E = 2,05 \times 10^7$, moment bezwładności przekroju belki $J_y = J_z = 46220$ (rura stalowa $\phi 50 \times 1$), pole przekroju $A = 154$, siła wymuszająca $Q = 100000$, $\beta = 0,513$. Przyjęto odchylenie standardowe równe 15% wartości średniej. Wówczas $E[A^0] = 154 \text{ cm}^4$ i $Var[J^0] = (0,15)^2 \times 154^2 = 3,465$.

Zgodnie ze wzorem (33)-(34) otrzymujemy:

$$E[x] = 7.771184 \quad Var(x) = 1,299662 \quad (37)$$

3.2. Rozwiązanie belki wspornikowej za pomocą SMES

Przeprowadzono analizę numeryczną za pomocą SMES w celu porównania z metodą analityczną. Znalaziono odpowiedź dynamiczną układu na siłę wymuszającą, stosując metodę superpozycji modalnej. Belkę wspornikową zamodelowano jako 32-elementowy układ. Przyjęto przekrój rurowy $\phi 50 \times 1$ o następujących charakterystykach: pole przekroju poprzecznego $A=154$, pole przekroju poprzecznego przy ścinaniu $A_v=98$, momenty bezwładności przekroju na zginanie $J_y=J_z=46220$ oraz gęstość masy materiału $\rho=7850 \cdot 10^{-8}$; liczba Poissona $\nu=0,3$; współczynnik tłumienia $\xi=0,02$. Pole przekroju poprzecznego A w analizie deterministycznej (MES) określono jako wartości oczekiwane A^0 , natomiast podczas analizy stochastycznej należało zdefiniować dodatkowo macierz kowariancji

$$\text{Cov}(A_r, A_s) = \alpha_{E_r} \alpha_{E_s} \cdot A_r^0 A_s^0 \cdot \mu(A_r, A_s) \quad (38)$$

w której funkcja korelacji zmiennych losowych

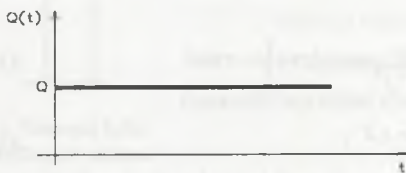
$$\mu(A_i, A_j) = \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|}{\lambda}\right) \quad (39)$$

gdzie długość korelacji $\lambda=3$, współczynnik wariacji zmiennych losowych $\alpha_{A_i}=0,15$,

x_r, x_s – współrzędne x środków poszczególnych elementów skończonych, $r, s = 1, 2, \dots, 32$.

Macierz kowariancji ma więc wymiar 32×32 ; na jej przekątnej znajdują się wariancje zmiennych losowych, natomiast poza przekątną występują kowariancje pomiędzy poszczególnymi zmiennymi.

W naszym przypadku obciążamy belkę funkcją Heaviside'a. Jest to siła skupiona,



Rys. 2. Funkcja Heaviside'a

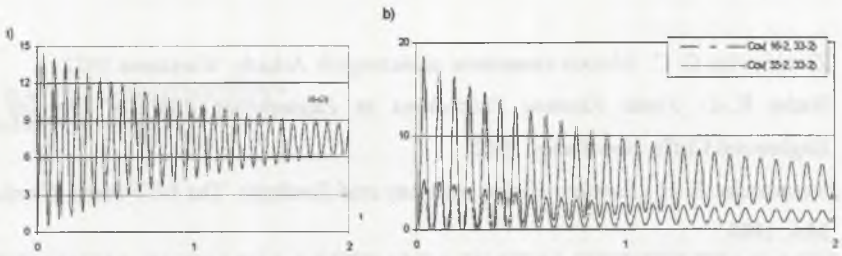
Fig. 2. Excitation function Heaviside'a

wymuszająca o stałej wartości Q , nagle przyłożona w chwili $t=0$ (rys.2). Efekt nagłego przyłożenia siły jest równorzędny podwojonemu statycznemu działaniu tej siły. W rzeczywistym układzie tłumionym efekty dynamiczne są nieco mniejsze.

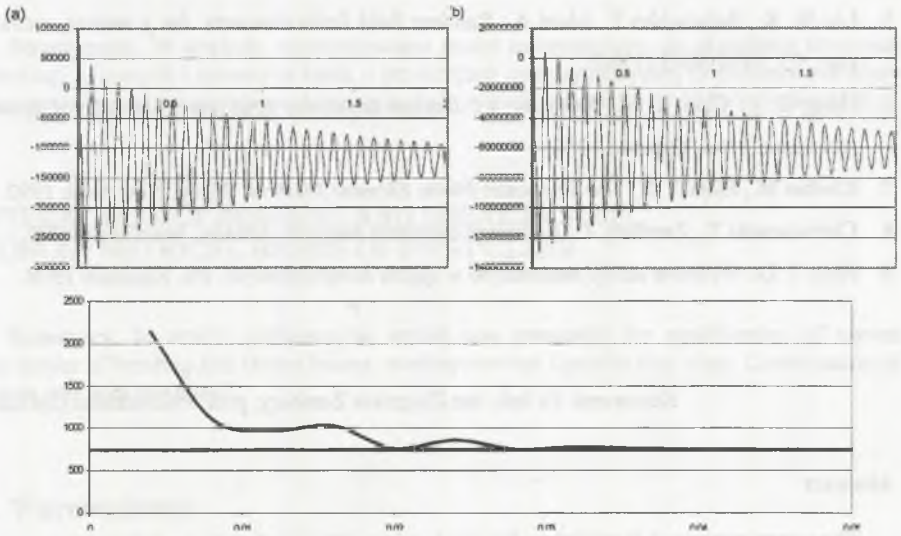
Obliczenia wykonano w zakresie

czasowym $2,048$ s, zdefiniowanym 1024 krokami czasowymi, każdy o długości $\Delta t = 0,002$ s.

Uwzględniono pierwszych 12 częstotliwości własnych. Wyniki analizy SMES pokazano na rys. 3-4.



Rys. 3. (a) wartości oczekiwane przemieszczeń dla węzłów 16 i 32, (b) kowariancje
 Fig. 3. (a) expected value, (b) covariance



Rys. 4. (a) momenty zginające, (b) siły poprzeczne, (c) siły podłużne
 Fig. 4. (a) bending moments, (b) shearing forces, (c) axial forces

4. Wnioski końcowe

Metoda stochastyczna przedstawiona w pracy daje możliwości prostego, efektywnego uwzględnienia wpływu losowego na układy konstrukcyjne. Nietrudno jest implementować opcję analizy stochastycznej do istniejących pakietów deterministycznych MES. W planach jest zastosowanie metody do obliczeń układów kominowych, stworzenie modelu, badania w tunelu aerodynamicznym i weryfikacja wyników doświadczalnych z numerycznymi.

LITERATURA

1. Zienkiewicz O. C.: *Metoda elementów skończonych*. Arkady, Warszawa 1972.
2. Bathe K.-J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1982.
3. Vanmarcke E. H.: *Random Fields: Analysis and Synthesis*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1984.
4. Hisada T., Nakagiri S.: Stochastic finite element method developed for structural safety and reliability. *Proc. 3 Int. Conf. on Safety Reliability*, 1981, str. 395-402
5. Liu W. K., Belytschko T., Mani A.: Random field finite elements. *Int. j. numer. methods eng.*, 23, 1831-1845 (1986).
6. Haug E. J., Choi K. K., Komkov V.: *Design sensitivity analysis of structural system*. Academic Press, Orlando 1986.
7. Kleiber M., Hien T. D.: *The Stochastic Finite Element Method*. Wiley, New York 1992.
8. Chmielewski T., Zembaty Z.: *Podstawy dynamiki budowli*. Arkady, Warszawa 1998.
9. Hien T. D.: *Wybrane działy matematyki w ujęciu komputerowym*. PS, Szczecin 1998.

Recenzent: Dr hab. inż Zbigniew Zembaty, prof. Politechniki Opolskiej

Abstract

The paper presents a formulation for stochastic problems of static and dynamic systems with random parameters, that are defined by first two statistical moments. Analytical and numerical solutions are shown. In the analytical solution the second-order perturbation technique is employed for second-moment analysis, while in the numerical solution the stochastic finite element model is applied. The numerical results are presented via a cantilever beam excited by a Heaviside force.