

Jerzy BOBIŃSKI*
Politechnika Gdańska

ZASTOSOWANIE MODELU NIELOKALNEGO DO OPISU ZACHOWANIA SIĘ ELEMENTÓW BETONOWYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono obliczenia numeryczne elementów betonowych poddanych ścisłaniu jednoosiowemu w płaskim stanie odkształcenia. Obliczenia wykonano za pomocą metody elementów skończonych przy zastosowaniu dwóch różnych sprężysto-plastycznych praw konstytutywnych. Otrzymane wyniki są zależne od siatki elementów ze względu na przyjęcie osłabienia w materiale. W celu otrzymania właściwie zdefiniowanego problemu brzegowego i rozwiązania niezależnego od siatki elementów konwencjonalne prawa konstytutywne z osłabieniem wymagają rozszerzenia. W niniejszym artykule prawa konstytutywne są rozszerzone przy zastosowaniu modelu nielokalnego.

THE APPLICATION OF A NON-LOCAL MODEL TO DESCRIBE THE BEHAVIOUR OF CONCRETE ELEMENTS

Summary. Paper presents numerical simulations of behaviour of concrete elements subjected to uniaxial compression for plane strain. FE-calculations are performed with two different elasto-plastic constitutive laws. Numerical results obtained suffer from mesh sensitivity due to the presence of material softening. To obtain a well-posed boundary problem and a mesh independent solution, conventional constitutive laws with softening require an extension. In this paper elasto-plastic constitutive laws are extended by non-local strain terms.

1. Wstęp

Zjawisko lokalizacji deformacji zachodzi w wielu materiałach, takich jak: metale, grunty, polimery i beton. W tym przypadku deformacje koncentrują się jedynie w małych obszarach materiału. Wskutek występowania lokalizacji w materiale pojawia się spadek wytrzymałości (osłabienie). Lokalizacja przebiera postać rys lub stref ścinania.

Klasyczne symulacje numeryczne zachowania się materiałów z osłabieniem nie są w stanie prawidłowo opisać szerokości stref lokalizacji i odległości między nimi. Otrzymane

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Jacek Tejchman, prof. Politechniki Gdańskiej

wyniki są zależne od zastosowanej siatki elementów skończonych (ich rozmiaru i ułożenia), Bažant [2], de Borst [4]. Wraz z zagęszczaniem siatki lokalizacje są coraz węższe oraz wyznaczone krzywe siła – przemieszczenie zależą od szerokości strefy lokalizacji (w szczególności w obszarze osłabienia). Przyczyną jest fakt, że równania różniczkowe ruchu zmieniają swój typ (dla obliczeń statycznych z eliptycznego na hiperboliczny) i problem brzegowy jest źle zdefiniowany (de Borst i inni [6]). Deformacje lokalizują się w strefach o zerowej szerokości (dla obliczeń analitycznych) oraz w jednym elemencie przy obliczeniach metodą elementów skończonych. Z tego powodu klasyczne prawa konstytutywne wymagają rozszerzenia o długość charakterystyczną (zwanego regularyzacją), aby opisać szerokość i odległość między strefami lokalizacji.

Jednym ze sposobów regularyzacji jest model nielokalny (Eringen [8, 9]). W tym modelu miara odkształcenia zależy nie tylko od odkształceń plastycznych w rozważanym punkcie ciała, ale także od odkształceń plastycznych wokół tego punktu (Bažant i inni [3]). Pozostałe naprężenia i odkształcenia są zazwyczaj wielkościami lokalnymi. Podejście nielocalne zostało wykorzystane przez Brinkgreve'a [7] oraz Marchera i Vermeera [10].

W artykule przedstawiono obliczenia numeryczne elementu betonowego poddanego jednoosiowemu ścisaniu wykonane metodą elementów skończonych na bazie dwóch różnych praw materiałowych sprężysto-plastycznych. Zastosowano model z prawem Druckera-Pragera oraz von Misesa. To drugie prawo zostało rozszerzone o odkształcenia nielocalne według propozycji Brinkgreve'a [7], aby otrzymać wyniki niezależne od siatki MES.

2. Modele konstytutywne dla betonu

2.1. Kryterium plastyczności Druckera-Pragera

Jednym z dwóch modeli betonu dostępnym w programie Abaqus jest sprężysto-plastyczny model betonu [1]. Model ten stosuje się do opisu elementów betonowych obciążonych monotonicznie przy stosunkowo niewielkich naprężeniach hydrostatycznych. Wykorzystuje on wzmocnienie i osłabienie izotropowe oraz stowarzyszone prawo płynięcia. Model betonu definiuje się za pomocą następujących parametrów: modułu sprężystości, współczynnika Poissona, krzywej naprężenie – odkształcenie w jednoosiowym ścisaniu, krzywej naprężenie – odkształcenie w jednoosiowym rozciąganiu, stosunku wytrzymałości na ścisanie

w dwuosiowym stanie naprężenia do wytrzymałości na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia r_{bc}^{σ} , stosunku jednoosiowej wytrzymałości na rozciąganie do jednoosiowej wytrzymałości na ściskanie, stosunku głównego odkształcenia plastycznego dla wytrzymałości na ściskanie w dwuosiowym stanie naprężenia do odkształcenia plastycznego dla wytrzymałości jednoosiowej na ściskanie r_{bc}^{ϵ} , stosunku głównego naprężenia rysującego (gdy inne naprężenie główne osiąga wartość wytrzymałości betonu na ściskanie) do naprężenia rysującego w jednoosiowym rozciąganiu r_f oraz współczynnika ścinania po zarysowaniu β^f .

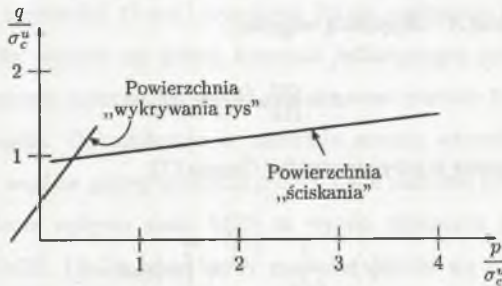
W obszarze ściskania beton jest modelowany powierzchnią uplastycznienia Druckera-Pragera (powierzchnia „ściskania” na rys. 1):

$$f_c = q - \sqrt{3}a_0p - \sqrt{3}\tau_c = 0, \quad (1)$$

gdzie $p = \text{tr}(\sigma_{ij})/3$ jest naprężeniem średnim, $q = \sqrt{3J_2}$, J_2 – drugi niezmiennik dewiatora naprężenia, a_0 – parametrem oraz τ_c – parametrem wzmocnienia określonym na podstawie zależności naprężenie – odkształcenie dla jednoosiowego ściskania. W obszarze rozciągania powierzchnia wykrywania rys jest opisana równaniem:

$$f_t = q' - \left(3 - b_0 \frac{\sigma_t}{\sigma_t^u}\right) p' - \left(2 - \frac{b_0}{3} \frac{\sigma_t}{\sigma_t^u}\right) \sigma_t = 0, \quad (2)$$

gdzie σ_t^u jest jednoosiową wytrzymałością na rozciąganie, b_0 – parametrem, σ_t – parametrem wzmocnienia w rozciąganiu, p' i q' – wartościami zdefiniowanymi jak p i q , lecz bez składowych naprężeń związanych z otwartymi rysami.



Rys. 1. Powierzchnie zniszczenia betonu w płaszczyźnie dewiatorowej (σ_c^u – jednoosiowa wytrzymałość betonu na ściskanie)

Fig. 1. Concrete failure surfaces in the p – q plane (σ_c^u – ultimate uniaxial compressive stress)

2.2. Kryterium plastyczności Misesa

Drugim modelem wykorzystanym w obliczeniach numerycznych jest prawo plastyczności von Misesa z izotropowym wzmocnieniem i osłabieniem. Model ten został wykorzystany jedynie do pokazania skuteczności zastosowanej techniki regularyzacji (model nielokalny). Funkcje płynięcia g i plastyczności f są zdefiniowane jako (stowarzyszone prawo płynięcia):

$$f = g = q - \sigma_0 (\varepsilon_p) = 0, \quad (3)$$

gdzie σ_0 jest wytrzymałością efektywną i ε_p jest efektywnym odkształceniem plastycznym ($\varepsilon_p = (2/3 e_{ij}^p e_{ij}^p)^{1/2}$, e_{ij}^p – dewiatory odkształceń plastycznych).

3. Model nielokalny

Model nielokalny został po raz pierwszy zaproponowany przez Bażanta [3] do opisu zachowania się betonu. Jego celem jest uzyskanie wyników niezależnych od siatki MES i poprawa zbieżności obliczeń numerycznych. Średnie naprężenia σ_{ij}^* i odkształcenia ε_{ij}^* definiuje się wówczas jako:

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{A} \iiint w(x_n) \sigma_{ij}(x_n + x'_n) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{A} \iiint w(x_n) \varepsilon_{ij}(x_n + x'_n) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (5)$$

gdzie indeks górny gwiazdka oznacza wielkość nielokalną, x_n jest współrzędną lokalną, x'_n – współrzędną lokalną ($n=1, 2, 3$), w – funkcją wagową, σ_{ij} i ε_{ij} – odkształceniami lokalnymi w całym materiale oraz A – objętością wagową:

$$A = \iiint w(x'_n) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (6)$$

Jako funkcję wagową w przyjęto rozkład Gaussa [7]:

$$w(r) = \frac{1}{l\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{r}{l}\right)^2} \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} w(r) dr = 1, \quad (7)$$

gdzie r jest odległością od rozważanego punktu do wszystkich punktów materiału oraz l jest długością charakterystyczną związaną z szerokością strefy lokalizacji. Uśrednianie

odkształceń i naprężeń (równ. 4 i 5) jest więc ograniczone do niewielkiego obszaru wokół rozważanego punktu. Jako wielkość nielokalną można zdefiniować tylko efektywne odkształcenie plastyczne ε_p^* w obszarze osłabienia (Bažant [3]):

$$\varepsilon_p^*(x) = \frac{1}{A} \int_V w(r) \varepsilon_p(x+r) dV \quad (8)$$

Według propozycji Brinkgreve'a [7] wielkość nielokalną ε_p^* można przedstawić jako:

$$\varepsilon_p^*(x) = (1 - \alpha) \varepsilon_p + \frac{\alpha}{A} \int_V w(r) \varepsilon_p(x+r) dV, \quad (9)$$

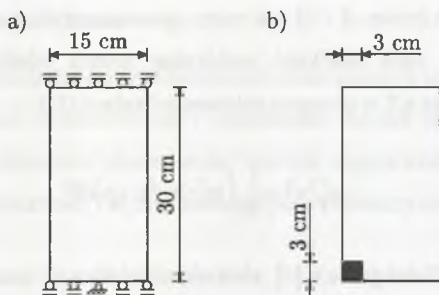
gdzie α jest parametrem. To sformułowanie składa się z części lokalnej i nielokalnej. Okazało się ono bardziej efektywne (dla $\alpha > 1$) do opisu lokalizacji niż sformułowanie zawierające tylko część nielokalną [7]. Dla $\alpha = 0$ otrzymuje się teorię lokalną, a dla $\alpha = 1$ równanie (8). Dla uproszczenia obliczeń (de Borst i Muhlhaus [5]) przyrosty plastyczne zostały zastąpione przez przyrosty całkowite:

$$d\varepsilon_p^*(x) \approx d\varepsilon_p + \alpha \left(\int_V w(r) d\varepsilon(x+r) dV - d\varepsilon(x) \right), \quad (10)$$

gdzie $d\varepsilon_p$ jest przyrostem efektywnych odkształceń plastycznych, a $d\varepsilon$ – całkowitych.

4. Obliczenia numeryczne

Obliczenia numeryczne przeprowadzono wstępnie dla elementu betonowego w płaskim stanie odkształcenia o szerokości 15 cm i wysokości 30 cm poddanego jednokierunkowemu ścisłaniu (rys. 2a). Dla węzłów na dolnej krawędzi zablokowano przesuw w kierunku pionowym. Dla zapewnienia stateczności próbki zablokowano przesuw poziomy środkowego węzła na dolnej krawędzi. Odkształcenie w materiale zostało wywołane przez pionowy równomierny przesuw węzłów górnej krawędzi próbki. Obie poziome krawędzie próbki były gładkie. W celu zbadania wpływu siatki MES na wyniki obliczenia przeprowadzono dla trzech siatek: 5x10, 10x20, 15x30, gdzie każdy prostokąt składał się z czterech elementów trójkątnych z liniowymi funkcjami kształtu. Lokalizacja została wywołana przez wprowadzenie imperfekcji materiałowej w lewym dolnym narożu próbki (rys. 2b).

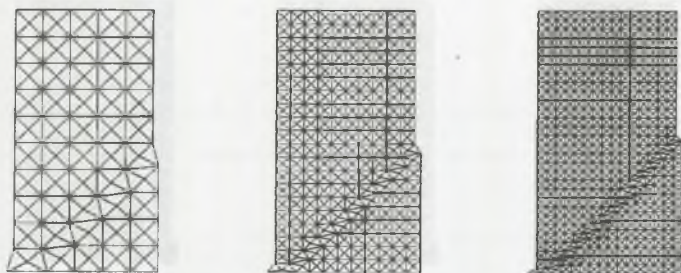


Rys. 2. Ściskanie jednoosiowe: a) geometria i warunki brzegowe, b) położenie imperfekcji
 Fig. 2. Uniaxial concrete compression: a) geometry and boundary conditions of the specimen, b) location of imperfection

Dla prawa sprężysto-plastycznego wg Druckera-Pragera przyjęto moduł sprężystości równy 29 GPa oraz współczynnik Poissona 0,18. Granica plastyczności była równa 18,4 MPa. Wytrzymałość jednoosiową betonu na ściskanie przyjęto równą 32 MPa przy odkształceniu 2,2‰, a wytrzymałość residualną jako 12 MPa (moduł osłabienia jest równy 1,5 GPa). Wytrzymałość betonu w jednoosiowym rozciąganiu była równa 2,4 MPa. Aby opisać zachowanie betonu w rozciąganiu, przyjęto przemieszczenie u_0 równe $7 \cdot 10^{-5}$ m (odpowiada to energii pęknięcia G_f równej 84 kN/m). Pozostałe stałe materiałowe były równe: $r_{bc}^{\sigma} = 1,16$, $r_{bc}^{\epsilon} = 1,28$, $r_f = 0,33$ oraz $\rho^{\epsilon} = 1,0$. Imperfekcję w modelu wprowadzono obniżając o 2% jednoosiową wytrzymałość na ściskanie.

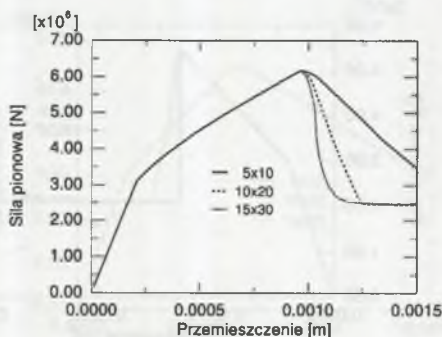
Na rys. 3 i 4 pokazano wyniki: efektywne odkształcenia plastyczne na zdeformowanych siatkach (współczynnik skali jest równy 6,0) oraz wykresy sił pionowych w funkcji przemieszczenia górnej krawędzi próbki. Deformacje lokalizują się w strefie ścinania o szerokości jednego elementu o nachyleniu 45° równym nachyleniu siatek. Wyniki wskazują na silną zależność wyników od zastosowanej liczby elementów skończonych, gdyż szerokość strefy ścinania maleje wraz ze zmniejszaniem się rozmiaru elementu. Maksymalne efektywne odkształcenia plastyczne występują w paśmie o szerokości trzech elementów (kolor szary). Wszystkie wykresy sił pionowych są podobne do miejsca osiągnięcia maksimum $P = 6,18 \cdot 10^3$ kN dla $v_{max} \approx 1$ mm. Następnie przebieg sił zależy od zastosowanej siatki.

Na rys. 5 i 6 pokazano wyniki obliczeń numerycznych dla kryterium von Misesa. Przyjęto podobne stałe materiałowe. Deformacje i odkształcenia koncentrują się ponownie w strefie ścinania o szerokości jednego elementu o nachyleniu 45° . Maksymalna siła pionowa wynosi $5,45 \cdot 10^3$ kN dla przemieszczenia $v_{max} = 0,66$ mm. Wykresy siła – przemieszczenie są



Rys. 3. Efektywne odkształcenia plastyczne dla różnych dyskretyzacji (model sprężysto-
plastyczny z kryterium Druckera-Pragera bez regularyzacji)

Fig. 3. Equivalent plastic strains for different discretisations (an elasto- plastic model by Drucker-
Prager without regularisation)

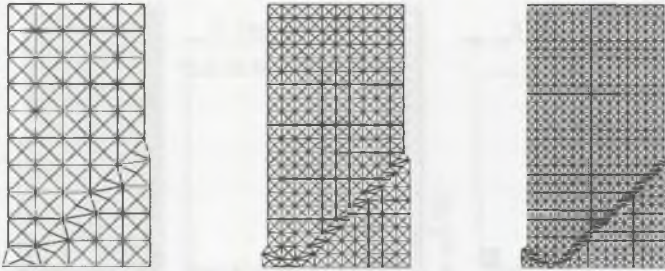


Rys. 4. Wykresy siła – przemieszczenie dla różnych dyskretyzacji (kryterium Druckera-Pragera
bez regularyzacji)

Fig. 4. Load–displacement diagrams for different mesh discretisations (Drucker-Prager criterion
without regularisation)

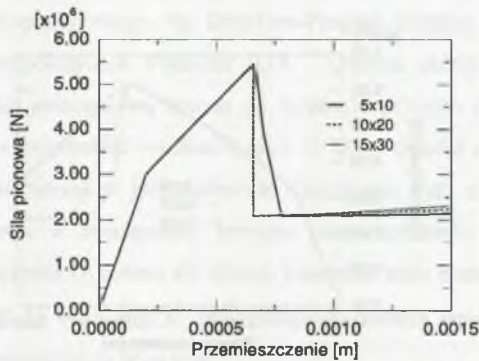
do siebie zbliżone tylko do miejsca osiągnięcia przez siłę maksimum (rys. 6). Dla siatek 10x20 i 20x40 spadek nośności w obszarze osłabienia jest gwałtowny.

Na rys. 7 i 8 przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych dla kryterium von Misesa rozszerzonego o odkształcenia nielokalne. Obliczenia wykonano dla parametru α zmieniającego się od 1 do 4 oraz dla długości charakterystycznej l zmieniającej się od 2 cm do 10 cm. Na rys. 7 pokazano efektywne odkształcenia plastyczne dla $\alpha=2$ i $l=3$ cm. Deformacje koncentrują się w strefie o szerokości większej niż jeden element skończony. Szerokość tej strefy wynosi w przybliżeniu 7 cm i nie zależy od zastosowanej siatki. Na rys. 8 przedstawiono zależności siła – przemieszczenie. Wartość maksymalna siły jest taka sama jak dla modelu bez regularyzacji (rys. 6). Wszystkie wykresy mają ten sam przebieg przed i po osiągnięciu maksimum. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że szerokość strefy



Rys. 5. Efektywne odkształcenia plastyczne dla różnych dyskretyzacji (model sprężysto-plastyczny z kryterium von Misesa bez regularyzacji)

Fig. 5. Equivalent plastic strains for different discretisations (an elasto-plastic model by von Mises without regularisation)



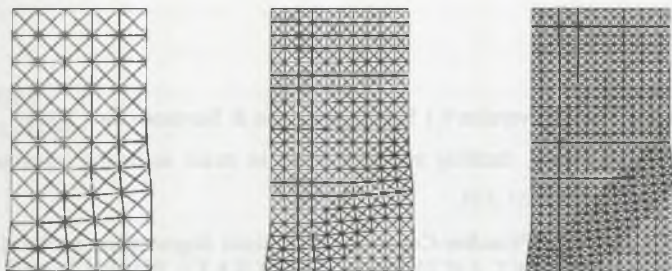
Rys. 6. Wykresy siła – przemieszczenie dla różnych dyskretyzacji (kryterium von Misesa bez regularyzacji)

Fig. 6. Load-displacement diagrams for different mesh discretisations (von Mises criterion without regularisation)

lokalizacji rośnie wraz ze wzrostem parametrów α i l (w przybliżeniu jest równa αl). Maksymalna siła pionowa nie zależy od wartości α i l . Osłabienie materiałowe zmniejsza się wraz ze wzrostem l .

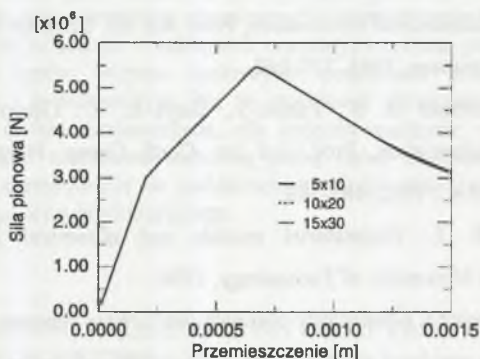
5. Wnioski

Obliczenia numeryczne pokazują, że wyniki uzyskane przy korzystaniu z klasycznych modeli sprężysto-plastycznych są zależne od siatki elementów skończonych (szerokość strefy lokalizacji oraz zależność siła – przemieszczenie w obszarze osłabienia). Przyjęcie



Rys. 7. Efektywne odkształcenia plastyczne dla różnych dyskretyzacji dla modelu sprężysto-plastycznego z kryterium von Misesa (z regularizacją)

Fig. 7. Equivalent plastic strains for different discretisations using an elasto-plastic model by von Mises (with regularisation)



Rys. 8. Wykresy siła – przemieszczenie dla różnych dyskretyzacji (kryterium von Misesa z regularizacją)

Fig. 8. Load–displacement diagrams for different mesh discretisations (von Mises criterion with regularisation)

odkształcenia jako wielkości nielokalnej pozwala na pełną regularizację problemu brzegowego. Szerokość strefy lokalizacji jest wtedy wartością stałą i niezależną od siatki. Szerokość strefy lokalizacji wzrasta wraz ze wzrostem długości charakterystycznej.

Modelowanie numeryczne lokalizacji deformacji w betonie będzie kontynuowane. Kryterium plastyczności Druckera-Pragera zostanie rozszerzone o odkształcenia nielokalne. Długość charakterystyczna zostanie powiązana ze średnią średnicą kruszywa w betonie.

Podziękowania

Obliczenia numeryczne wykonano na komputerach Trójmiejskiej Akademickiej Sieci Komputerowej (TASK) w Gdańsku.

LITERATURA

1. Abaqus Theory Manual, version 6.1 Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., 2000.
2. Bažant Z. P.: Instability, ductility and size effect in strain softening concrete, *ASCE J. Eng. Mech.*, 102, 1976, 331-344.
3. Bažant Z. P., Lin F. B., Pijaudier-Cabot G.: Yield limit degradation; nonlocal continuum model with local strain, *Proc. Int. Conf. Comp. Plasticity, Barcelona 1987*, 1757-1780.
4. de Borst R.: Non-linear analysis of frictional materials, dissertation, Delft University of Technology, Delft 1986.
5. de Borst R., Mühlhaus H.B.: Computational strategies for gradient continuum models with a view to localisation of deformation, *Proc. 4th. Int. Conf. on Nonlinear Eng. Comp.*, Pineridge Press, Swansea, 1991, 239-260.
6. de Borst, R., Mühlhaus H. B., Pamin J., Sluys L. Y.: Computational modelling of localisation of deformation, *Proc. 3rd Int. Conf. Comp. Plasticity*, Pineridge Press, Swansea, Wales, U.K., 1992, 483-508.
7. Brinkgreve R. B. J.: Geomaterial models and numerical analysis of softening, Dissertation, Delft University of Technology, 1994.
8. Eringen A. C.: Nonlocal polar elastic continua, *Int. J. Eng. Science*, 10, 1972, 1-16.
9. Eringen A. C.: On non-local plasticity, *Int. J. Engineering Science*, 19, 1981, 1461-1474.
10. Marcher T., Vermeer P. A.: Macromodelling of softening in non-cohesive soils, *Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive-Frictional Materials* Eds. P. A. Vermeer et al., Springer-Verlag, 2001, 89-110.

Recenzent: Dr hab. inż. Stanisław Majewski, prof. nzw. Politechniki Śląskiej

Abstract

Numerical simulations of behavior of concrete elements subjected to uniaxial compression for plane strain are presented. Two different elasto-plastic constitutive laws are used. To obtain a mesh-independent solution for materials with softening, a non-local theory is applied.