ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992
Seria: AUTOMATYKA z. 109 Nr kol. 1175

Ewa Dudek-Dyduch
Akademia Górniczo Hutnicza

DOLNE OGRANICZENIA ALGORYTMÓW BRANCH & BOUND W STEROWANIU DPP

LOWER BOUNDS FOR BRANCH & BOUND ALGORITHMS APPROPRIATE FOR CONTROL OPTIMIZATION OF DMP

НИЖНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ АЛГОРИТМОВ РАЗДЕЛА И ОГРАНИЧЕНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ДИСКРЕТНЫМИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Streszczenie: Artykuł dotyczy algorytmów branch & bound zastosowanych do optymalizacji sterowania dyskretnych procesów produkcyjnych. Omawia różne sposoby konstrukcji dolnych ograniczeń. Przedstawiono ogólną klasyfikację dolnych ograniczeń, twierdzenia dotyczące możliwości konstruowania dolnych ograniczeń w zależności od własności problemów. Zaprezentowano szczegółowy podział dolnych ograniczeń zadania uzyskanych w wyniku zmiany jego modelu oraz podano ogólne reguły dominacji dolnych ograniczeń. Rozważania zilustrowano przykładem.

Summary: The paper deals with branch & bound algorithms applied to control optimization of a class of discrete manufacturing processes. Different manners of lower bound constructions has been presented and domination rules of lower bounds has been defined. The paper uses formalization introduced in the earlier author's paper. An example is given.

Резюме: В статье обсуждаются алгоритмы раздела и ограничений примененные для оптимизации управления дискретными производственными процессами. Предлагаются разные способы конструирования нижних ограничений. Автор предлагает вниманию читателя теоремы для конструирования нижних ограничений, представляет подробное деление нижних ограничений задания, полученных в результате изменения его модели, а также общие правила доминирования нижних ограничений. Рассуждения иллюстрируются примером.

1. Wstęp

Artykuł dotyczy algorytmów branch & bound (B&B) zastosowanych do optymalizacji sterowania dyskretnych procesów produkcyjnych (DPP).

W literaturze można spotkać trzy zasadnicze typy opracowań związanych z metodą B&B: opracowania bardzo ogólne (poziom sztucznej inteligencji), opracowania dotyczące metody zastosowanej dla pewnej klasy problemów, np. zdefiniowanej za pomocą modelu programowania dyskretnego, wreszcie opracowania prezentujące algorytmy dla pojedynczych, konkretnych problemów. Artykuły dotyczące optymalizacji sterowania DPP należą na ogół do tej ostatniej grupy . W przeciwieństwie do nich niniejszy artykuł należy do drugiej grupy i związany jest z badaniami mającymi na celu formalne przedstawienie różnych możliwości konstruowania algorytmów. Stanowi on kontynuację wcześniejszego opracowania autorki [3], w którym zaprezentowano podstawowe klasy algorytmów B&B w oparciu o formalny model klasy DPP. Niniejszy arty-

* Opracowanie wykonano w ramach grantu nr 8-8528-9102 "Komputerowe systemy sterowania i podejmowania decyzji".

kuł poświęcony jest przedstawieniu różnych sposobów konstrukcji dolnych ograniczeń oraz ich wzajemnych relacji w algorytmach wykorzystujących model procesu wieloetapowego.

2. Problemy poszukiwania obiektu złożonego

Problemy sterowania DPP należą do tzw. klasy problemów poszukiwania obiektu złożonego zdefiniowanej w [2] w oparciu o pojęcie procesu wieloetapowego.

Definicja 1

Wieloetapowym procesem decyzyjnym (konstruującym) nazywamy proces P zdefiniowany przez szóstkę (U, Y, y_o, f, Y_N, Y_F), gdzie: U jest zbiorem zwanym zbiorem decyzji, Y jest zbiorem zwanym zbiorem stanów, y_o, Y_N, Y_F są wyróżnionymi odpowiednio stanem początkowym oraz zbiorami stanów niedopuszczalnych i końcowych, f jest funkcją częściową $f : U \times Y \to Y$ zdefiniowaną za pomocą funkcji $g : Y \to 2^U$ następująco:
$(u, y) \in \mathrm{Dom}\, f \Leftrightarrow u \in g(y)$; tak więc funkcja $g(y)$ określa podzbiór decyzji $U_p(y)$, dla których funkcja f jest określona w stanie y.

Trajektorią procesu jest skończony lub nieskończony ciąg stanów $\tilde{y} = (y_o, y_1, \ldots y_i, \ldots y_n \ldots)$ rozpoczynający się w stanie początkowym y_o, wyznaczony przez funkcję przejścia dla znanego ciągu decyzji $\tilde{u}$ i kończący się (w przypadku ciągów skończonych) w zbiorze stanów Y_F, Y_N lub w zbiorze stanów, dla których funkcja przejścia jest nieokreślona, czyli $U_p(y) = \emptyset$. Trajektorie kończące się w zbiorze stanów końcowych nazywane są dopuszczalnymi, zaś wyznaczające je ciągi decyzji dopuszczalnymi ciągami decyzji (ciągami sterującymi). Proces P reprezentowany jest przez zbiór trajektorii.

Definicja 2

Zadaniem poszukiwania obiektu złożonego jest zadanie, w którym poszukiwany obiekt jest zdefiniowany za pomocą dopuszczalnego lub optymalnego ciągu decyzji pewnego wieloetapowego procesu decyzyjnego określonego definicją 1, a więc jest bezpośrednio ciągiem sterującym lub odpowiednim stanem końcowym jednoznacznie wyznaczonym przez ciąg sterujący. Zadanie optymalizacji wyznacza para (P, Q), w której proces P reprezentuje wszystkie ograniczenia nałożone na dopuszczalny ciąg decyzji, zaś Q jest kryterium.

Definicja 3

Ustalonym problemem poszukiwania obiektu złożonego jest taki zbiór zadań poszukiwania, które mają wspólnie zdefiniowany zbiór danych oraz wspólną (parametryczną) definicję wieloetapowego procesu decyzyjnego, zaś w przypadku problemu optymalizacyjnego dodatkowo wspólną definicję funkcji kryterialnej.

Zbiór wieloetapowych procesów P, mających wspólną parametryczną definicję wielkości U, Y, y_o, f, Y_N, Y_F, będziemy oznaczali symbolem $\mathbb{P}$, nazywając go również wieloetapowym procesem. W przypadku wymagającym roz-

różnienia, proces $P \in \mathbb{P}$ będziemy nazywać indywidualnym wieloetapowym procesem. Problem optymalizacji będzie oznaczany jako para $(\mathbb{P},\Phi)$.

Dyskretny proces produkcyjny został zdefiniowany w [1,3] jako szczególny przypadek procesu wieloetapowego, w którym przynajmniej jedna współrzędna stanu lub wyjścia jest współrzędną liczbową monotonicznie rosnącą wzdłuż trajektorii.

3. Klasyfikacja algorytmów

Jak wiadomo, metoda B&B należy do metod przeglądu sterowanego. Ogólnie mówiąc, polega ona na konstruowaniu drzewa decyzyjnego, którego wierzchołkom odpowiadają podzbiory rozwiązań lub zbiory obiektów tego samego typu co poszukiwane rozwiązanie problemu. Drogą eliminacji wierzchołków, których następniki nie zawierają rozwiązań dopuszczalnych bądź lepszych od najlepszego z uzyskanych dotychczas, ogranicza się ilość obliczeń. Zbiór obiektów związanych z wierzchołkiem ω drzewa decyzyjnego będzie oznaczany symbolem $A(\omega)$. W [3] wyróżniono i omówiono następujące grupy algorytmów B&B optymalizujących sterowanie DPP:

- algorytmy konstruujące rozwiązanie w oparciu o proces wieloetapowy,
- algorytmy poprawy,
- algorytmy wykorzystujące dekompozycję.

Przypomnijmy, że pod pojęciem algorytmów poprawy rozumieć będziemy algorytmy, które startują mając dane pewne rozwiązanie dopuszczalne (lub pewien obiekt tego samego typu co rozwiązanie dopuszczalne), którego elementy są zmieniane w kolejnych iteracjach. Natomiast algorytmami konstruującymi nazywać będziemy algorytmy, które kolejno dołączają pewne elementy rozwiązania, nie mając początkowych ustaleń. Należy podkreślić, że pewne obiekty mogą być konstruowane za pomocą kilku odmiennych wieloetapowych procesów i wówczas definicja wykorzystywanego procesu zasadniczo określa koncepcję algorytmu [2]. Oczywiście duża ilość algorytmów składa się zarówno z części konstruującej, jak i poprawiającej (w szczególności pierwszy etap algorytmów poprawiających polega na konstrukcji początkowego rozwiązania, z tym że na ogół etap ten jest trywialny). Najczęściej zalicza się wtedy algorytm do grupy o dominującym sposobie.

W przypadku algorytmów konstruujących w oparciu o wieloetapowy proces, z każdym wierzchołkiem drzewa decyzyjnego związany jest pewien początkowy ciąg decyzji tego procesu. Ciąg ten, nazywany ciągiem charakterystycznym dla wierzchołka, wyznacza zbiór $A(\omega)$.

4. Dolne ograniczenia

4.1. Klasyfikacja dolnych ograniczeń

Koncepcja wyznaczania dolnego ograniczenia zależy istotnie od tego, do którego z wyróżnionych w punkcie 3. typów należy rozważany algorytm. Ze względu na sposób konstruowania wyróżnimy następujące grupy dolnych ograniczeń:

1) ograniczenia otrzymane jako częściową wartość monotonicznie rosnącego kryterium (w szczególności obliczoną dla początkowej wartości ciągu sterującego odpowiedniego wieloetapowego procesu),
2) ograniczenia otrzymane w wyniku rozwiązywania innego problemu lub zadania (zmiana modelu),
3) ograniczenia otrzymywane w wyniku kombinacji dwóch poprzednich typów.

Wartość dolnego ograniczenia kryterium dla zbioru rozwiązań związanych z wierzchołkiem ω będzie oznaczana $L(\omega)$

Twierdzenie 1

Dla każdego problemu $(\mathbb{P},\Phi)$, gdzie $\mathbb{P}$ jest wieloetapowym procesem, zaś Φ minimalizowanym kryterium ściśle monotonicznie wzrastającym wzdłuż trajektorii tego procesu, może być zastosowany konstrukcyjny algorytm B&B o ograniczeniu dolnym równym częściowej wartości kryterium Q_i obliczonej dla początkowej części trajektorii $(y_0, y_1, \ldots y_i)$ wyznaczonej przez ciąg charakterystyczny (w przypadku maksymalizacji funkcja kryterialna musi maleć).

Dowód jest oczywisty. Z monotoniczności ścisłej funkcji Q wynika bowiem, że dla każdego następnika ω' węzła ω w drzewie decyzyjnym wartość $L(\omega') > L(\omega)$.

Definicje kryterium separowalnego, addytywnie separowalnego, monotonicznie i ściśle monotonicznie rosnącego podane są w [1]. Jakkolwiek w przypadku monotoniczności nieścisłej twierdzenie jest również słuszne, to jednak efektywność rekurencyjnego algorytmu znacznie spada, gdyż w tym przypadku $L(\omega') \geq L(\omega)$ i działanie eliminacyjne dolnego ograniczenia jest o wiele słabsze. Z tego względu konstrukcyjny algorytm z dolnym ograniczeniem tego typu nie powinien być stosowany.

Algorytm określony w twierdzeniu 1 jest najprostszym z rozważanej klasy. Jak widać, wykorzystuje on minimum informacji. Oczywiście wykorzystując więcej informacji otrzymujemy algorytmy efektywniejsze.

Twierdzenie 2

Dla każdego problemu $(\mathbb{P},\Phi)$, gdzie $\mathbb{P}$ jest wieloetapowym procesem, zaś Φ minimalizowanym kryterium addytywnie separowalnym dla tego procesu, może być zastosowany konstrukcyjny algorytm podziału i ograniczeń o ograniczeniu dolnym równym sumie częściowej wartości kryterium Q_i dla stanu y_i oraz dolnego oszacowania kryterium dla końcowych odcinków trajektorii rozpoczynających się w stanie y_i.

Dowód, jako oczywisty, pomijamy.

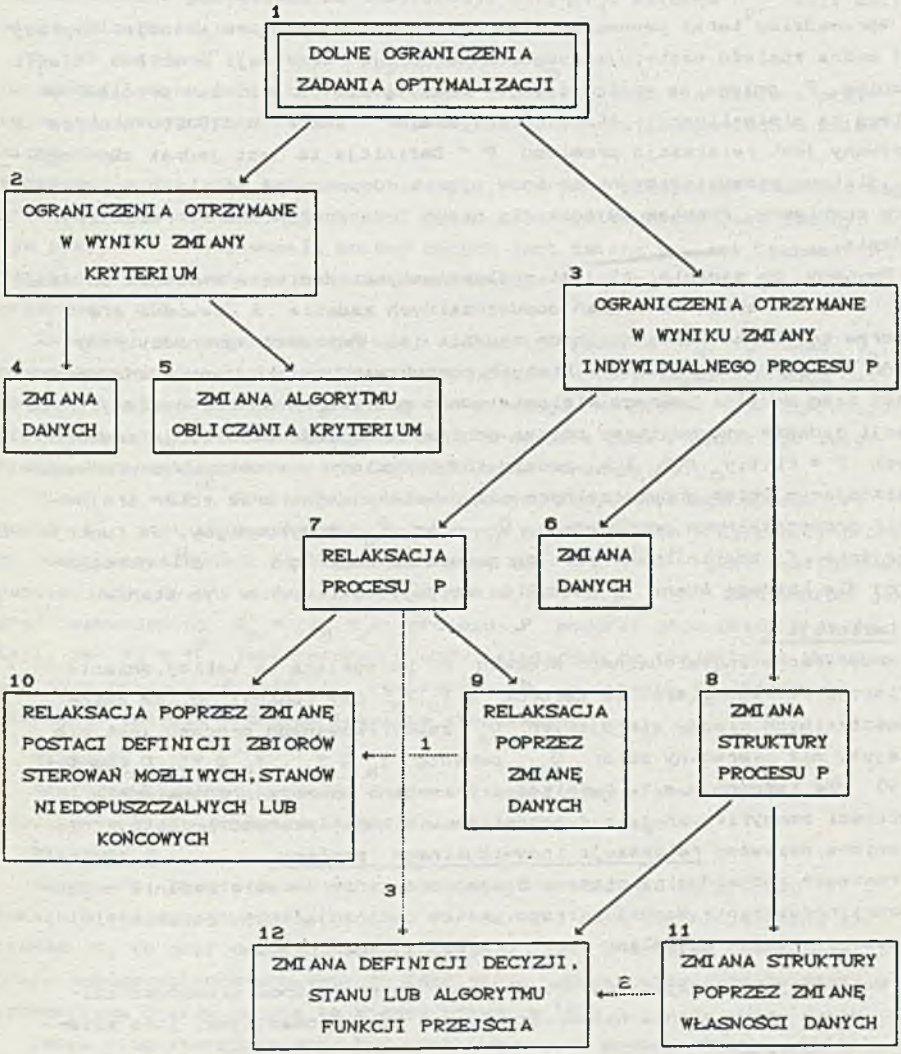
Powiemy, że kryterium jest multiplikatywnie separowalne, jeśli może być rekurencyjnie obliczane dla kolejnych stanów trajektorii według wzoru:

$Q_i = \sigma Q_1 \cdot \sigma Q_2 \cdots \sigma Q_i$ gdzie $\sigma Q_i = \sigma Q(u_{i-1}, y_{i-1})$, $i=1,2,\ldots$

Twierdzenie 3

Dla każdego problemu $(\mathbb{P},\Phi)$, gdzie Φ jest minimalizowanym kryterium multiplikatywnie separowalnym dla procesu $\mathbb{P}$ oraz $\sigma Q_i > 0$ dla każdej pary

(u,y), dla której jest określona funkcja przejścia, może być zastosowany konstrukcyjny algorytm B&B o ograniczeniu dolnym równym iloczynowi częściowej wartości kryterium Q_i dla stanu y_i oraz dolnego oszacowania kryterium dla końcowych odcinków trajektorii rozpoczynających się w stanie y_i. Prawdziwość twierdzenia wynika z faktu, że kryterium wzrasta monotonicznie wzdłuż trajektorii.



Rys.1. Typy dolnych ograniczeń zadania uzyskanych w wyniku zmiany jego modelu. Linie przerywane wskazują dodatkowe konsekwencje zmian

Fig.1. Types of lower bounds for a task, obtained as a result of its model change

Omawiając drugą grupę ograniczeń (czyli otrzymywanych w wyniku zmiany modelu), zwróćmy uwagę na konieczność odróżnienia konstrukcji dolnego ograniczenia dla konkretnego zadania od konstrukcji tegoż ograniczenia dla całego problemu. Podział dolnych ograniczeń zadania uzyskanych w wyniku zmiany jego modelu przedstawiono na rysunku 1. Zwróćmy uwagę, że relaksacja (zdefiniowana poniżej) jest tu tylko jednym ze sposobów zmiany modelu wykorzystywanym do uzyskania dolnego ograniczenia.

Wprowadzimy teraz pewne formalne rozróżnienie typów relaksacji. W pracy [7] można znaleźć następującą ogólną definicję relaksacji problemu. "Jeśli problem $\mathbb{P}$ polega na minimalizacji $c(x)$, gdzie $x \in A$, zaś problem $\mathbb{R}$ polega na minimalizacji $c(x)$, gdzie $x \in B$ i jeśli $A \subset B$, to problem $\mathbb{R}$ nazywany jest relaksacją problemu $\mathbb{P}$." Definicja ta jest jednak zbyt ogólna, dlatego przedstawimy nieco inne ujęcie, dopasowane do klasy rozważanych problemów. Punktem wyjścia dla niego jest zdefiniowanie relaksacji zadania.

Powiemy, że zadanie A' jest zrelaksowanym zadaniem w stosunku do zadania A, jeśli zbiór rozwiązań dopuszczalnych zadania A zawiera się w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych zadania A'. Ponieważ ograniczyliśmy zbiór problemów do takich, w których poszukiwany obiekt jest wyznaczony przez ciąg decyzji pewnego wieloetapowego procesu, zatem dla dyskusji relaksacji zadania wykorzystamy podaną poniżej definicję relaksacji procesu. Niech $P = (U, Y, y_0, f, Y_N, Y_F)$ będzie indywidualnym wieloetapowym procesem posiadającym zbiór dopuszczalnych ciągów sterujących oraz zbiór trajektorii dopuszczalnych odpowiednio $\tilde{U}_d$ oraz $\tilde{Y}_d$. Przypomnijmy, że funkcja przejścia f zdefiniowana jest za pomocą funkcji $g : Y \to 2^U$ określającej dla każdego stanu y podzbiór decyzji możliwych w tym stanie.

<u>Definicja 4</u>

Modyfikację indywidualnego procesu P polegającą na takiej zmianie definicji któregokolwiek ze zbiorów U, Y_N, Y_F czy funkcji g, że zbiór dopuszczalnych ciągów sterujących $\tilde{U}'_d$ zmodyfikowanego procesu jest nie mniejszy niż pierwotny zbiór $\tilde{U}_d$, ponadto $Y'_N \subseteq Y_N$, $Y_F \subseteq Y'_F$, $U_p(y) \subseteq U'_p(y)$ dla każdego $y \in Y$, (wielkości primowane oznaczają odpowiednie wielkości zmodyfikowane), zaś pozostałe wielkości procesu pozostają nie zmienione, nazywamy <u>relaksacją indywidualnego procesu.</u>

Ponieważ indywidualny proces P jednoznacznie określa zadanie poszukiwania rozwiązania dopuszczalnego, zatem definiując typy relaksacji procesu tym samym określamy typy relaksacji zadań.

a) Relaksacja polegająca na ograniczeniu zbioru stanów niedopuszczalnych. Niech zbiór stanów niedopuszczalnych zdefiniowany jest jako alternatywa predykatów:

$$Y_N = \{y \in Y : \psi_1(y) \cup \psi_2(y) \cup \ldots \psi_N(y)\}.$$

Zbiór ten możemy ograniczyć opuszczając w definicji przynajmniej jeden predykat lub odpowiednio zmieniając występujące w nim dane.

b. Relaksacja polegająca na powiększeniu zbioru stanów końcowych. Jeśli zbiór stanów końcowych jest zdefiniowany za pomocą koniunkcji predykatów

$Y_F = \{y \in Y : \phi_1(y) \cap \phi_2(y) \cap \ldots \phi_F(y)\}$,

to w definicji zmodyfikowanego zbioru stanów końcowych procesu zrelaksowanego opuszczony jest przynajmniej jeden z tych predykatów lub też odpowiednio zmienione są występujące w nim dane.

c. Relaksacja polegająca na modyfikacji definicji zbiorów U_p. Jeśli definicja zbiorów U_p ma postać koniunkcji predykatów

$U_p(y) = \{u \in U : \mu_1(u,y) \cap \mu_2(u,y) \cap \ldots \mu_p(u,y)\}$,

to zmodyfikowana definicja dla procesu zrelaksowanego nie zawiera przynajmniej jednego predykatu lub w predykacie występują odpowiednio zmienione dane.

W szczególności, dla zmienionych danych, któryś z predykatów może dla tego procesu nigdy nie być spełniony , zatem może być usunięty jako zbędny. W tym przypadku konsekwencją zmiany danych jest zmiana postaci (schematu) definicji odpowiedniego zbioru. Reprezentuje to na rysunku 1 strzałka przerywana (1).

Zauważmy, że wskutek modyfikacji definicji zbiorów Y_N, Y_F oraz U_p pewne współrzędne stanu występujące w opuszczonych predykatach mogą okazać się zbędne w modelu procesu zrelaksowanego. Na skutek tego definicja zbioru stanów i w konsekwencji funkcji przejścia może również być zmieniona. Reprezentuje to na rys. 1 przerywana strzałka (3).

Niech $G = (Y^P, R)$ będzie grafem przejść indywidualnego procesu P, gdzie Y^P jest zbiorem stanów należących do wszystkich trajektorii procesu (dopuszczalnych i niedopuszczalnych) zaś $R \subset Y^P \times Y^P$ jest zdefiniowana następująco: $(y,y') \in R \Leftrightarrow \exists\, u \in U_p(y)$ takie, że $f(u,y) = y'$. Zdefiniujmy jako graf dopuszczalny $G_d = (Y_d, R_d)$ procesu P podgraf jego grafu przejść taki, że $Y_d \subset Y^P$ jest zbiorem stanów należących do trajektorii dopuszczalnych procesu P, zaś R_d restrykcją R do zbioru Y_d. Poniższe własności dotyczą procesów lokalnie skończonych.

Własność 1

Graf dopuszczalny procesu P jest izomorficzny z pewnym podgrafem częściowym grafu dopuszczalnego procesu zrelaksowanego.

Własność 2

Niech P' będzie procesem zrelaksowanym w stosunku do procesu P i lokalnie skończonym. Jeśli proces P' ma taką samą definicję stanu jak proces P, to graf dopuszczalny procesu P jest podgrafem częściowym grafu dopuszczalnego procesu P' (definicje podgrafu częściowego oraz izomorfizmu grafów podane są między innymi w [6]).

Jeśli ciąg sterujący może być konstruowany za pomocą różnych wieloetapowych procesów, wówczas typ relaksacji zależy dodatkowo od wykorzystywanego procesu. Zdefiniujmy teraz relaksację problemów.

Definicja 5

Proces $\mathbb{P}'$ jest zrelaksowany w stosunku do procesu $\mathbb{P}$, jeśli dla każdego zestawu danych wyznaczone przez nie indywidualne procesy $P' \subset \mathbb{P}'$ oraz $P \subset \mathbb{P}$ stanowią parę procesów, w których P' jest zrelaksowany w stosunku do P.

Definicja 6

Problem $\mathbb{A}'$ jest zrelaksowany w stosunku do problemu $\mathbb{A}$, jeśli istnieje para procesów $\mathbb{P}'$ i $\mathbb{P}$ definiujących zbiory rozwiązań dopuszczalnych odpowiednio problemów $\mathbb{A}'$ oraz $\mathbb{A}$ taka, że proces $\mathbb{P}'$ jest zrelaksowany w stosunku do procesu $\mathbb{P}$.

Reasumując, możemy wyróżniać typy relaksacji, biorąc pod uwagę:

a) rodzaj procesu definiującego obiekt,

b) rodzaj ograniczenia modyfikowanego w procesie.

4.2. Dominacja dolnych ograniczeń

Jak wiadomo, najważniejszym dla efektywności algorytmu podziału i ograniczeń jest opracowanie takiego dolnego ograniczenia, które z jednej strony jak najlepiej przybliża wartość kryterium, z drugiej zaś wyznaczane jest przy możliwie małym nakładzie obliczeń. Dla konkretnego problemu można zaproponować dolne ograniczenia różnego typu. Dominację ich przedstawia się zazwyczaj za pomocą tzw. grafów relacji dominowania, w których wierzchołkom przypisuje się poszczególne dolne ograniczenia zakodowane za pomocą, ustalonych dla rozpatrywanego problemu, symboli graficznych [5], [4]. Grafy dominowania konstruowane są oddzielnie dla poszczególnych problemów.

Korzystając z wprowadzonego podziału dolnych ograniczeń, możemy teraz podać ogólne reguły spełniane przez relacje dominacji niezależnie od rozpatrywanego problemu. Ustalmy zadanie (P,Q). Powiemy, że dolne ograniczenie L' dominuje dolne ograniczenie L, jeśli dla każdego wierzchołka ω drzewa decyzyjnego zachodzi: $L'(\omega) \geq L(\omega)$. W podanych poniżej regułach dominowania, mówiąc o zmianie procesu, kryterium, danych, będziemy mieli na myśli zmianę w pożądanym kierunku:

a. ograniczenie L' uzyskane w wyniku zmiany kryterium i zmiany procesu jest dominowane przez ograniczenie uzyskane w wyniku tylko zmiany (takiej samej) kryterium bądź tylko zmiany (takiej samej) procesu;

b. ograniczenie L' uzyskane w wyniku zmiany struktury procesu oraz w wyniku relaksacji procesu (w znaczeniu def.4) jest dominowane przez ograniczenie L uzyskane w wyniku tylko zmiany (takiej samej) struktury procesu bądź tylko w wyniku relaksacji (takiej samej) procesu;

c. jeśli ograniczenie L uzyskane jest w wyniku opuszczenia pewnych predykatów w definicjach zbiorów S_N, S_F, U_p, a ograniczenie L' uzyskane jest w wyniku opuszczenia oprócz nich jeszcze dodatkowych predykatów, to ograniczenie L dominuje ograniczenie L' (mówiąc o definicjach wymienionych zbiorów, w tym i następnym podrozdziale będziemy

mieli na myśli podaną wcześniej postać alternatywną w przypadku zbioru S_N i koniunkcyjną w przypadku zbiorów S_r i U_p);

d. ograniczenie dolne uzyskane w wyniku relaksacji indywidualnego procesu P poprzez opuszczenie pewnego predykatu w definicji zbioru S_N, S_F lub U_p jest dominowane przez ograniczenie uzyskane w wyniku tylko zmiany danych występujących w odpowiednim predykacie.

5. Przykład

Dla zilustrowania wprowadzonego podziału dolnych ograniczeń odniesiemy go do przykładowych ograniczeń dla problemu kolejnościowego taśmowego (flow-shop problem) z ogólną minimaksową funkcją celu podanych w drugiej części [5]. Zagadnienie kolejnościowe taśmowe postaci $n|m|P,\succ|f_{max}$ można sformułować następująco. Dany jest n-elementowy zbiór zadań Z, które mają być wykonane za pomocą m-elementowego zbioru maszyn M. Każde zadanie składa się z m-elementowego ciągu operacji, które mają być wykonane na kolejnych maszynach. Znane są czasy wykonywania kolejnych operacji każdego zadania. Dana jest relacja $\succ$ częściowego porządku w zbiorze zadań. Dla każdego zadania, np. i-tego, określona jest niemalejąca funkcja $f_i : C_{im} \to \mathbb{R}$ reprezentująca koszt związany z wykonaniem zadania w terminie C_{im}. Należy określić kolejność wykonywania zadań, która spełnia wymogi relacji częściowego porządku i przy której kryterium

$$f_{max} = \max_{1 \le i \le n} f_i(C_{im}) \quad \text{osiąga minimum.}$$

W pierwszej części pracy [5] podano ciekawy algorytm, który można zaliczyć do grupy algorytmów poprawy. Opierając się na werbalnym opisie problemu, wyróżniono następujące dolne ograniczenia określone jako:

a) relaksację możliwości wykonawczych maszyn,

b) relaksację czasów trwania operacji,

c) relaksację funkcji kosztów zadań,

d) relaksację ograniczeń kolejnościowych (częściowego porządku),

e) relaksację liczby zadań,

f) relaksację przydziału czasów trwania operacji.

Przedstawimy teraz umiejscowienie ich w schemacie dolnych ograniczeń podanym na rysunku 1.

Ad a)

Relaksacja możliwości wykonawczych maszyn, polegająca na dopuszczeniu, że dla pewnych wybranych maszyn o ograniczonej przepustowości (równej 1) liczba operacji wykonywanych jednocześnie może być dowolna, powoduje zmianę algorytmu funkcji przejścia, odpowiada więc blokowi 12.

Ad b)

Relaksacja czasów trwania operacji, polegająca na przyjęciu jednakowego (minimalnego) czasu trwania dla wszystkich operacji wykonywanych na pewnych maszynach, jest równoznaczna z wprowadzeniem dodatkowej własności spełnianej przez dane powodującej zmianę algorytmu dla funkcji przejścia i odpowiada blokowi 11.

Ad c)

Relaksacja funkcji kosztów zadań, polegająca na przyjęciu funkcji kosztów wszystkich zadań jednakowych i równych

$$f^{*}(t) = \min_{1 \le i \le n} f_i(t) \qquad 0 \le t < \alpha,$$

odpowiada blokowi 2.

Ad d)

Relaksacja ograniczeń kolejnościowych, a więc przyjęcie $\succ = \emptyset$, odpowiada relaksacji procesu polegającej na zmianie definicji zbioru U_p i jest reprezentowana blokiem 10.

Ad e)

Relaksacja liczby zadań, polegająca na wyznaczeniu dolnego ograniczenia dla pewnego podzbioru zadań $Z' \subset Z$, odpowiada relaksacji procesu polegającej na zmianie definicji zbioru stanów końcowych reprezentowanej blokiem 10.

Ad f)

Relaksacja przydziału czasów trwania operacji odpowiada blokowi 6.

Analogicznie można scharakteryzować dolne ograniczenia dla zagadnienia kolejnościowego gniazdowego opisane w [4].

LITERATURA

[1] Dudek-Dyduch E.: Formalizacja i analiza problematyki dyskretnych procesów produkcyjnych, Zesz. Nauk. AGH, Automatyka z.54, 1990.

[2] Dudek-Dyduch E.: Wieloetapowe procesy decyzyjne w optymalizacji sterowania DPP, Zesz. Nauk. AGH, Automatyka z.59, 1991.

[3] Dudek-Dyduch E.: Metoda podziału i ograniczeń w optymalizacji sterowania DPP (część pierwsza), Zesz. Nauk. AGH, Automatyka, z.59, 1991.

[4] Grabowski J., Nowicki E., Smutnicki C.: Nowe metody wyznaczania dolnych ograniczeń dla zagadnienia kolejnościowego gniazdowego, Zesz. Nauk. AGH Nr 1064, Automatyka z.39, Kraków 1985, 171-175.

[5] Grabowski J., Smutnicki C.: Minimalizacja maksymalnego kosztu w zagadnieniach kolejnościowych taśmowych, Część I, II. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, t.XXIX, z.1-2, 1984, 35-74.

[6] Kulikowski J.L.: Zarys teorii grafów, PWN, Warszawa 1986.

[7] Sysło M.M.: Generalization of the standard travelling salesman problem, Zast. Mat. XVI, 4, 1980.

Recenzent: Prof.dr hab.inz. J.Węglarz

Wpłynęło do Redakcji do 30.04.1992.

Abstract: The paper refers to branch & bound algorithms applied to control optimization of a class of discrete manufacturing processes. It deals with constructions of lower bounds. The general classification of lower bounds constructions has been given. Then the theorems connecting properties of the problem with the possibility of creating lower bound of a given type have been presented. Detailed classification of lower bounds obtained as a result of model change has been introduced and domination rules have been defined. An example illustrates the consideration.