ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992

Seria: AUTOMATYKA z. 109 Nr kol. 1175

Jan GRUSZECKI

Politechnika Rzeszowska

WARUNKI ZBIEŻNOŚCI ALGORYTMÓW DYSKRETNEGO STEROWANIA SAMOLOTEM LEKKIM

THE CONVERGENCE CONDITIONS FOR AIRCRAFT CONTROL DISCRETE ALGORITHMS

LES CONDITIONS DE CONVERGENCE DES ALGORITHMS DE COMMANDE DIGITALE POUR AVION D'AFFAIRES

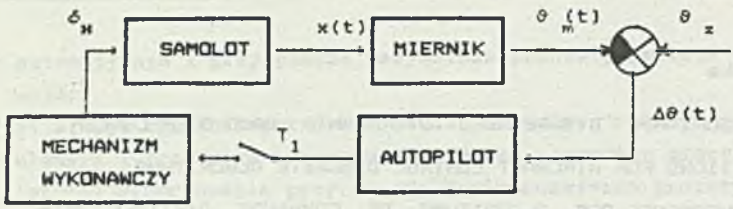
Streszczenie: W pracy przedstawiono wyniki oszacowania warunków zbieżności dwóch algorytmów sterowania samolotem z autopilotem cyfrowym w kanale pochylania. Oszacowanie tych warunków wykonano stosując pojęcie modułu ciągłości funkcji w przestrzeniach Banacha. Uzyskane warunki sprawdzono metodą symulacji dla samolotu dyspozycyjnego "M-20 MEWA".

Summary: The paper presents the results of evaluation convergence condition for selected aircraft control algorithms applied to the autopilot's pitch channel. To evaluate these conditions the notion of the modules function continuity in the Banach space is used. Computer simulations carried out for the light aircraft "M-20 MEWA" and the theoretical results have shown good agreement.

Résumé: Dans cet article on a consider é les resultats d'évaluation des condisions de convergence de deux algorithms de commande pour un avion avec le pilote automatique digital au chanel d'assiette longitudiale. L'évaluation de cettes conditions a été réealisée en appliquant l'idée du module de continuité des functions dans l'espace de Banach. Les conditions sont examinées pendant la simulation pour l'avion d'affaires "M-290 MEWA".

WPROWADZENIE

Różnorodność metod projektowania układów sterowania obiektami latającymi wynikła z różnych własności dynamicznych tych obiektów i zadań, jakie spełniają w czasie eksploatacji. Jest to przyczyną braku jednolitych kryteriów dla projektowania autopilotów. W przypadku sterowania ciągłego zadania te rozwiązano z powodzeniem za pomocą metod linii pierwiastkowych bądź też charakterystyk logarytmicznych, umożliwiających sprawdzenie obszarów stabilności układu. Wprowadzenie autopilotów cyfrowych, przy jednoczesnej agregacji danych o stanie obiektu, wymaga innego sposobu projektowania układów. Używane powszechnie metody symulacyjne prowadzą do poprawnych wyników, lecz czas potrzebny na realizacje procedur wyboru parametrów autopilota zależy od stopnia znajomości obszarów zbieżności algorytmu symulacyjnego oraz dokładności oszacowań zmiennych stanu obiektu dla wybranego czasu próbkowania. Problem zbieżności wybranego algorytmu symulującego ruch podłużny samolotu dla małych pochyleń został przedstawiony w niniejszej pracy w ujęciu półciągłym i dyskretnym. Załóżmy, że układ sterowania samolotem w ruchu podłużnym ma prostą strukturę podaną na rys.1.



Rys.1. Struktura układu sterowania kątem pochylenia samolotu
Fig.1. Pitch angle control system structure

Niech stan samolotu opisany będzie układem równań liniowych:

$$x(t)=Ax(t)+B\delta_H(t) \tag{1}$$

gdzie: $x(t)=[u,\alpha,q,\theta]^T$, A i B - macierze stałych współczynników o wymiarach odpowiednio (4x4) i (4x1),

u - przyrost prędkości podłużnej,

α - przyrost kąta natarcia,

q - przyrost prędkości pochylenia kątowego,

θ - przyrost kąta pochylenia samolotu,

z warunkami początkowymi

$$x(0)=x_0 \tag{2}$$

Kąt pochylenia samolotu mierzony miernikiem giroskopowym dany jest równaniem o postaci:

$$T_m\frac{d\theta_m(t)}{dt}+\theta_m(t)=K_m\theta(t) \tag{3}$$

Przyjmijmy,że prawo sterowania będzie miało właściwości regulatora PID z ograniczonym przedziałem całkowania [2], tj.:

$$\delta_H(t)=K_p\Delta\theta(t-T_i)+K_R\frac{d\Delta\theta(t-T_i)}{dt}+K_I\int_{t_i}^{t}\Delta\theta(\tau-T_i)d\tau \tag{4}$$

dla $0<t_i<t$ i T_i będącego czasem opóźnienia potrzebnym na obliczenie wartości sygnału sterującego δ_H. Tak postawiony problem symulacji odpowiada układowi z rys.1, gdy ruch obiektu wraz z miernikiem symulowany jest przez układ analogowy, zaś komputer stanowi przelicznik realizujący zależność (4). Odpowiada więc rzeczywistemu układowi sterowania samolotem przez autopilot o strukturze cyfrowej z przyjętą częstotliwością komutacji danych o stanie samolotu, $\omega_T=1/T$, oraz tą samą częstotliwością ustawiania mechanizmu wykonawczego.

2. PRZYPADEK MODELU PÓŁCIĄGŁEGO

Rozpatrzmy wpierw przypadek oszacowania zbieżności algorytmu (1),(3),(4) z równaniem węzła

$$\Delta\theta(t) = \theta_z - \theta_m(t) \quad , \quad \theta_z = \text{const.} \tag{5}$$

gdy rozwiązanie równania (1) przyjmiemy w postaci:

$$x[(k+1)T] = e^{AT}x(kT) + \int_{(kT)}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-t]}B\delta_R(kT)dt \tag{6}$$

w przedziale czasu $[0,T_K]$ podzielonym na K równych odcinków czasu o długości T, przy czasie opóźnienia T_i będącym r-krotnością przedziału T.

Równania (3),(4) i (5) przyjmą postać:

$$\Delta\theta(kT) = \theta_z - e^{-\frac{T}{T_m}}\theta_m[(k-1)T] - K_m\theta[(k-1)T](1-e^{-\frac{T}{T_m}}) \tag{7}$$

$$\delta_R(kT) = (K_p - \frac{K_R}{T} + K_I T)\Delta\theta[(k-r)T] + \frac{K_R}{T}\Delta\theta[(k-r+1)T] +$$

$$+ K_I T\sum_{i=k-3}^{k-1}\Delta\theta[(i-r)T] \tag{8}$$

dla ograniczonego do 3T czasu całkowania członu całkującego regulatora.

Wartość wektora $x[(k+1)T]=(Fx)[(k+1)T]$ będzie równa:

$$x[(k+1)T] = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-t]}B((K_p - \frac{K_R}{T} + K_I T)*$$

$$*[\theta_z - e^{-\frac{T}{T_m}}\theta_m[(k-r-1)T] - K_m\theta[(k-r-1)T](1-e^{-\frac{T}{T_m}})] +$$

$$+ \frac{K_R}{T}[\theta_z - e^{-\frac{T}{T_m}}\theta_m[(k-r)T] - K_m\theta[(k-r)T](1-e^{-\frac{T}{T_m}})] +$$

$$+ K_I T\sum_{i=k-3}^{k-1}[\theta_z - e^{-\frac{T}{T_m}}\theta_m[(i-r-1)T] - K_m\theta[(i-r-1)T](1-e^{-\frac{T}{T_m}})])dt \tag{9}$$

Warunki zbieżności algorytmu (9) określimy korzystając z pojęcia modułu ciągłości funkcji w przestrzeniach Banacha [1].

Rozważmy przestrzeń $C[0,T_K]$ funkcji ciągłych na odcinkach $[kT,(k+1)T]$ $k=0,1,\dots,K$ z normą maksimum oraz przestrzeń $C^n[0,T_K]$ funkcji n-krotnie różniczkowalnych w sposób ciągły na odcinku $[0,T_K]$ ze standardową normą:

$$\|x\|_{C^n[0,T_K]} = \max\,[\,\|x^{(i)}\|_{C[0,T_K]} \;:\; i=0,1,\dots,n\,].$$

Ponieważ w dalszym ciągu interesować nas będzie transformacja (Fx) dana zależnością (9) w punktach dyskretnych kT $(k=0,1,\dots,K)$, możemy założyć, że jest ona określona na przestrzeni $C[0,T_K]$ i przyjmuje wartości z tej przestrzeni. Jej moduł ciągłości rozumiany jako

$$\omega(Fx,T) = \sup\,[\,\|(Fx)[(k+1)T]-(Fx)(kT)\| \;:\; k=0,1,\dots,K\,]$$

spełnia nierówność:

$$\omega(Fx,T) \le \|e^{AT}\|\,\|x[(k+1)T]-x(kT)\| + \Big\| \int_{(k+1)T}^{(k+2)T} e^{A[(k+2)T-t]}\,B\,*$$

$$*\,\{(K_p - \frac{K_R}{T} + K_I T)\theta_z + \frac{K_R}{T}\theta_z + K_I T\sum_{i=k-2}^{k+1}\theta_z\} - \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-t]}\,B\,*$$

$$*\,\{(K_p - \frac{K_R}{T} + K_I T)\theta_z + \frac{K_R}{T}\theta_z + K_I T\sum_{i=k-2}^{k-1}\theta_z\}dt\Big\| + \Big\| -\int_{(k+1)T}^{(k+2)T} e^{A[(k+2)T-t]}\,*$$

$$*\,Be^{-\frac{T}{T_m}}\{(K_p - \frac{K_R}{T} + K_I T)\,\theta_m[(k-r)T] + \frac{K_R}{T}\theta_m[(k-r+1)T] +$$

$$- K_I T\sum_{i=k-2}^{k-1}\theta_m[(i-r)T]\}dt + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-t]}\,Be^{-\frac{T}{T_m}}\{(K_p - \frac{K_R}{T} + K_I T)*$$

$$*\,\theta_m[(k-r-1)T] + \frac{K_R}{T}\theta_m[(k-r)T] - K_I T\sum_{i=k-2}^{k-1}\theta_m[(i-r-1)T]\}dt\Big\| +$$

$$+ \left\| -\int_{(k+1)T}^{(k+2)T} e^{A((k+2)T-t)} B\left(1-e^{-\frac{T}{T_m}}\right)\left(K_m\left(K_p - \frac{K_R}{T} + K_I T\right)\theta[(k-r)T] + \right.\right.$$

$$+ \frac{K_R K_m}{T}\theta[(k-r+1)T] + K_I K_m T \sum_{i=k-R}^{k-1}\theta[(i-r)T]\Big) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-t)} B \,*$$

$$* \left(1-e^{-\frac{T}{T_m}}\right)\left(K_m\left(K_p - \frac{K_R}{T} + K_I T\right)\theta[(k-r-1)T] + \frac{K_R K_m}{T}\theta[(k-r)T] + \right.$$

$$\left.\left. + K_I K_m T \sum_{i=k-R}^{k-1}\theta[(i-r-1)T]\right)dt \right\| \tag{10}$$

Wartość drugiego modułu prawej strony (10) jest równa zero , zaś pozostałe oszacowania po prostych przekształceniach prowadzą do nierówności:

$$\omega(Fx) \le \|B\| \left\| \frac{e^{AT}-1}{A} \right\| \left| e^{-\frac{T}{T_m}} \right| \left| \left(K_p + 2\frac{K_R}{T} + 4K_I T\right) \right| \omega(\theta_m, T) + \|B\| \left| 1-e^{-\frac{T}{T_m}} \right| *$$

$$* \left\| \frac{e^{AT}-1}{A} \right\| \left| K_m\left(K_p + 2\frac{K_R}{T} + 4K_I T\right) \right| \omega(\theta\ T) + \|e^{AT}\| \omega(x,T) \tag{11}$$

gdzie: $\omega(\theta,T) = \sup\ [\|\theta[(k+1)T] - \theta(kT)\|:\ k=0,1,\ldots,K\ ]$,

$\omega(x,T) = \omega(\theta,T)$ dla $\theta \subset x$.

A więc rozpatrywany algorytm będzie zbieżny, do pewnego otoczenia rozwiązania problemu (1),(3),(4),(5), jeśli:

$$\|e^{AT}\| + 2\|B\| \left| 1-e^{-\frac{T}{T_m}} \right| \left\| \frac{e^{AT}-1}{A} \right\| \left| K_m\left(K_p + 2\frac{K_R}{T} + 4K_I T\right) \right| < 1 \tag{12}$$

przy sterowaniu δ_H spełniającym warunek:

$$\lim_{k\to\infty} |\delta_H[(k+1)T] - \delta_H(kT)| = 0$$

3. PRZYPADEK MODELU DYSKRETNEGO

W drugim przypadku rozpatrzmy algorytm, w którym obiekt opisany równaniem (1) z warunkami (2) reprezentuje równanie różnicowe w postaci:

$$x[(k+1)T]=A_1x(kT)+B_1\delta_H(kT); \quad k=0,1,\ldots,K \tag{13}$$

gdzie macierze A_1 i B_1 tworzone są odpowiednio z macierzy A i B:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+B\delta_H, \quad \frac{x[(k+1)]-x[kT]}{T} = Ax[kT]+B\delta_H, \quad A_1=I+TA, \quad B_1=TB$$

oraz elementy wektora $x(kT)$ należą do przestrzeni R^n, $n=4$, przy czym

$$x(0)=x_0 \tag{14}$$

Załóżmy jak wyżej, że obiekt jest sterowany ciągiem impulsów o wypełnieniu równym $\tau=1$ z opóźnieniem $T_1=rT$ względem chwili kT oraz $\vartheta_z=$ const:

$$\delta_H(jT)=K_IT\sum_{i=j-2}^{j-1}\vartheta_z+K_p\vartheta_z-(K_p+\frac{K_R}{T})\theta[(j-r)T]+\frac{K_R}{T}\theta[(j-r+1)T]+$$

$$+K_IT\sum_{i=k-2}^{k-1}\theta[(j-r)T] \tag{15}$$

przyjmując dla uproszczenia obliczeń równanie miernika w postaci:

$$\theta_m(kT) = \theta(kT).$$

W celu oszacowania warunków zbieżności algorytmu (13) i (15), przyjmujemy przestrzeń $l^\infty(R^n)$ złożona ze wszystkich ograniczonych ciągów:

$$\{x(kT)\} \text{ w } R^n, \quad x(kT)=[u(kT),\alpha(kT),q(kT),\theta(kT)]^T.$$

Niech w R^n będzie zadana norma maksimum, to znaczy:

$$\|x\|=\max\{|u|,|\alpha|,|q|,|\theta|\},$$

natomiast norma w $l^\infty(R^n)$ ma klasyczną postać:

$$\|x\|=\sup\{\max_{1\le i\le 4}|x_i(kT)|: k \le K\}.$$

Rozważmy więc transformację F określoną na przestrzeni $l^\infty(R^n)$:

$$(Fx)(kT)=A_1^kx_0+\sum_{j=0}^{k-1}A_1^{(k-j-1)}B_1\delta_H(jT) \quad \text{dla } k=1,2,\ldots,K. \tag{16}$$

gdzie $\delta_H(jT)$ dane jest zależnością (15), będącą rozwiązaniem równania różnicowego (13) w dyskretnych chwilach czasu kT. Warunki gwarantujące, że transformacja F jest kontrakcją względem miary niezwartości μ, czyli istnieje stała $k \in (0,1)$ taka, że:

$$\mu(FX)\le k\,\mu(X) \; ; \; x \in X.$$

określimy przyjmując miarę niezwartości w przestrzeni $l^{\infty}(R^n)$ w postaci:

$$\mu(X)=\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in X}\left(\sup\left(\|x(iT)-x(jT)\|:\ i,j\geq k\right)\right)\right),$$

gdzie X jest dowolnym niepustym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni $l^{\infty}(R^{\infty})$.

Wybierzmy więc dowolne $x\in X$ i $k\leq K$ oraz q będące dowolną liczbą naturalną. Mamy:

$$\|(Fx)[(k+q)T]-(Fx)(kT)\| = \Big\|A_1^{(k+q)}x_0+\sum_{j=0}^{k+q-1}A_1^{(k+q-j-1)}B_1\Big[K_IT\sum_{i=j-s}^{j-1}\theta_z+K_p\theta_z+$$

$$-\Big(K_p-\frac{K_R}{T}\Big)\theta[(j-r)T]+\frac{K_R}{T}\theta[(j-r+1)T]-K_IT\sum_{i=j-s}^{j-1}\theta[(i-r)T]-A_1^kx_0+$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}A_1^{(k-j-1)}B_1\Big[K_IT\sum_{i=j-s}^{j-1}\theta_z+K_p\theta_z-\Big(K_p+\frac{K_R}{T}\Big)\theta[(j-r)T]+\frac{K_R}{T}\theta[(j-r+1)T]+$$

$$+K_IT\sum_{i=j-s}^{j-1}\theta[(i-r)T]\Big]\Big\| \tag{17}$$

Oszacowanie (17), po uwzględnieniu nierówności:

$$(1+\|A\|+\|A\|^2+\ldots+\|A\|^k)\leq\frac{1}{1+\|A\|}$$

$$\|A^q-I\|\leq\frac{1+\|A\|}{1-\|A\|}$$

oraz oczywistego warunku $\|A_1\|<1$ daje, dla $k\to\infty$ i $\|x(kT)\|\leq M$, następującą nierówność:

$$\|(Fx)[(k+q)T]-(Fx)\|\leq\|A_1\|^k\frac{1+\|A_1\|}{1-\|A_1\|}\|x_0\|+\Big|2\frac{K_R}{T}+K_p+3K_IT\Big|\frac{1}{1-\|A_1\|}\,M$$

$$\cdot\|B_1\|\sup\{\|\theta(pT)-\theta(sT)\|:\ p,s\geq k-r\}+$$

$$+M\Big|K_p+2\frac{K_R}{T}+3K_IT\Big|\frac{\|A_1\|^k}{1-\|A_1\|}\|B_1\| \tag{18}$$

Przechodząc teraz z $k\to\infty$ i biorąc kres górny obu stron nierówności (18), dostajemy:

$$\mu(FX) \le \frac{\|B_1\|}{1-\|A_1\|} \left|K_p+2\frac{K_R}{T}+3K_I T\right| \mu(X) \tag{19}$$

co pozwala wnioskować, że ciąg $\{x(kT)\}$ będący rozwiązaniem zadania (16) ma skończoną granicę, gdy:

$$k=\frac{\|B_1\|}{1-\|A_1\|}\left(K_p+2\frac{K_R}{T}+3K_I T\right) < 1 \tag{20}$$

dla sterowania δ_H spełniającego warunek:

$$\lim_{k\to\infty} |\delta_H[(k+1)T]-\delta_H(kT)|=0 \quad \text{przy} \quad \|A_1\| < 1.$$

4. UWAGI KOŃCOWE

Zauważmy, że otrzymane wystarczające warunki zbieżności algorytmu półciągłego i dyskretnego zależą od parametrów prawa sterowania realizowanego przez autopilota i czasu T repetycji układu. Czas opóźnienia sygnału sterującego podawanego na wyjście mechanizmu wykonawczego nie wpływa bezpośrednio na zbieżność procedury, lecz ma istotny wpływ na wartość błędu kąta ϑ osiąganego przez samolot w kolejnych chwilach kT. Omówione przypadki algorytmu były symulowane dla wybranych danych samolotu "M-20 MEWA" dla różnych czasów opóźnień rT potwierdzając poprawność zaprezentowanych w pracy wyników. Z uwagi na ograniczenia objętościowe pracy zostaną one zaprezentowane szerzej w czasie trwania Konferencji ADPP.

LITERATURA

[1] Gruszecki J.: Ocena zbieżności komputerowych algorytmów sterowania. Zeszyty Naukowe, Seria Mechanika, z.25, Rzeszów 1991.

[2] Tomczyk A.: Praktyczne dyskretne algorytmy sterowania samolotem. Materiały VIII KK ADPP (w druku).

Recenzent: Prof.dr h.inż. Jerzy Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 30.04.1992 r.

Abstract:

The paper presents the results of evaluation of convergence condition estimation for selected aircraft control algorithms applied to the autopilot's pith channel. The control algorithm structure allows for the transmission of signal delay between the autopilot and its actuator. The PID regulator control law was implemented in the autopilot's controller.

The estimaton of algorithm convergence conditions was carried out for the semi-continuous and discrete aircraft mathematical models. To evaluate these conditions, the notion of the modules function continuity in the Banach space was used.

Computer simulations carried out for the light aircraft "M-20 MEWA" and the theoretical results have shown good agreement.