ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992
Seria: AUTOMATYKA z. 109 Nr kol. 1175

Jerzy Klamka
Politechnika Śląska

STEROWALNOŚĆ NIELINIOWYCH DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH-PRZEGLĄD PROBLEMÓW
CONTROLLABILITY OF NONLINEAR DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS - A SURVEY
УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ - ОБЗОР ПРОБЛЕМ

Streszczenie: Artykuł stanowi przegląd problemów sterowalności dyskretnych, nieliniowych układów dynamicznych, opracowany na podstawie publikacji z ostatnich lat. Przedstawiono różne warunki wystarczające sterowalności dla szerokich klas nieliniowych, dyskretnych układów dynamicznych. Rozpatrzono również nieliniowe układy dyskretne z opóźnienieniami. Przedyskutowano relacje zachodzące pomiędzy różnymi rodzajami sterowalności. Podano pewne dodatkowe uwagi i komentarze dotyczące w głównej mierze biliniowych dyskretnych układów dynamicznych.

Summary: The paper presents a survey of problems associated with the controllability of nonlinear discrete-time dynamical systems. It has been prepared on the basis of recent publications. The various sufficient controllability conditions for wide classes of nonlinear discrete dynamical systems are presented. Nonlinear delay discrete systems are also considered. Relationships among various kinds of controllability are discussed. Finally, some additional remarks and comments concerning mainly bilinear discrete dynamical systems are given.

Резюме: Статья является обзором проблем управляемости нелинейных дискретных динамических систем, разработанным на основе опубликованных за последние годы работ. Представлены достаточные условия управляемости для широких классов нелинейных дискретных динамических систем. Представлены тоже нелинейные дискретные динамические системы с запаздыванием. Рассмотрена связь между разными типами управляемости. Представлены замечания об управляемости билинейных дискретных динамических систем.

1. Wstęp

Sterowalność układów dynamicznych jest jednym z podstawowych pojęć matematycznej teorii systemów i optymalnego sterowania. Pierwsze prace z zakresu sterowalności układów dynamicznych dotyczyły głównie układów ciągłych [16]. W oparciu o uzyskane dla nich rezultaty zaczęto badać sterowalność różnych typów układów dyskretnych, początkowo liniowych, a następnie nieliniowych [13].

Niniejszy artykuł stanowi przegląd literaturowy rezultatów dotyczących różnego rodzaju sterowalności dla nieliniowych dyskretnych układów dynamicznych. Stanowi on kontynuację cyklu prac przeglądowych [12, 13, 14 oraz 15] poruszających problematykę sterowalności dyskretnych układów liniowych [13], biliniowych [12], liniowych z ograniczeniami na sterowanie [14] oraz tzw. układów typu 2-D, tzn. układów dyskretnych o dwóch zmiennych niezależnych [15]. W cytowanych powyżej pracach przytoczono najważniejsze znane z literatury rezultaty dotyczące sterowalności omawianych typów dyskretnych układów dynamicznych.

W niniejszej pracy zostaną przedstawione zasadnicze rezultaty dotyczące sterowalności bardzo szerokiej klasy nieliniowych, niestacjonarnych dyskretnych układów dynamicznych. Sformułowane będą, na

podstawie literatury, warunki wystarczające lokalnej U-sterowalności w ustalonym przedziale $[k_o,k_1]$ oraz w chwili k_o. Warunki te wymagają między innymi weryfikacji kryteriów U-sterowalności odpowiednich liniowych układów dyskretnych, które można znaleźć w pracach [13] oraz [14]. Rozpatrzone zostaną także nieliniowe niestacjonarne układy dyskretne z opóźnieniami zarówno we współrzędnych stanu, jak i w sterowaniu.

Wszystkie twierdzenia i wnioski zamieszczone w niniejszej pracy są zaczerpnięte z literatury i będą podawane bez dowodów, jedynie z powołaniem na te pozycje bibliograficzne, w których podane są pełne dowody. Artykuł zawiera także podstawowe definicje różnych rodzajów sterowalności oraz uwagi i komentarze dotyczące poszczególnych wyników i wzajemnych relacji między nimi. Wykaz literatury obejmuje w zasadzie wszystkie najbardziej istotne publikacje związane ze sterowalnością nieliniowych dyskretnych układów dynamicznych.

2. Opis układów dynamicznych i podstawowe definicje

Niech będzie dany dyskretny nieliniowy, niestacjonarny i skończenie wymiarowy układ dynamiczny opisany następującym równaniem różnicowym:

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k)), \quad k \geq k_o \tag{2.1}$$

gdzie: $k \in Z$ - zbiór liczb całkowitych,

$x(k) \in R^n$ - wektor stanu układu dynamicznego,

$u(k) \in U \subset R^m$ - sterowanie dopuszczalne,

$f: R \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$ - dana funkcja.

Niech $U \subset R^m$ będzie dowolnym zbiorem. Sekwencją sterowań dopuszczalnych nazywa się sekwencję $u = \{u(k_o), u(k_o+1), u(k_o+2), \ldots\}$ taką, że $u(k) \in U \subset R^m$ dla wszystkich $k \geq k_o$. Zbiór wszystkich sekwencji dopuszczalnych tworzy tzw. zbiór sterowań dopuszczalnych.

Dla ustalonego stanu początkowego $x(k_o) \in R^n$ oraz zadanej sekwencji sterowań dopuszczalnych u istnieje zawsze jednoznaczne rozwiązanie $x(k,x(k_o),u)$ nieliniowego równania różnicowego (2.1). W praktyce rozwiązanie to można wyznaczyć drogą kolejnych iteracji.

W przypadku układu stacjonarnego, tzn. gdy funkcja f nie zależy bezpośrednio od zmiennej dyskretnej k, równanie różnicowe (2.1) jest postaci następującej:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), \quad k \geq 0 \tag{2.2}$$

Dla układów stacjonarnych bez utraty ogólności można założyć, że chwila początkowa $k_o=0$.

W szczególnym przypadku liniowego niestacjonarnego układu dyskretnego równanie różnicowe stanu jest postaci następującej:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad k \geq k_o \tag{2.3}$$

gdzie: $A(k)$ są $n \times n$ - wymiarowymi macierzami dla $k \geq k_o$,

$B(k)$ są $n \times m$ - wymiarowymi macierzami dla $k \geq k_o$.

Stacjonarny układ liniowy opisuje różnicowe równanie stanu postaci:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k \geq 0 \tag{2.4}$$

gdzie: A - jest stałą n×n - wymiarową macierzą, oraz B - jest stałą n×m - wymiarową macierzą.

Dla układu liniowego (2.3) można stosunkowo łatwo wyznaczyć analityczną postać rozwiązania $x(k,x(k_o),u)$, a mianowicie [16]:

$$x(k,x(k_o),u) = F(k,k_o)x(k_o) + \sum_{j=k_o}^{j=k-1} F(k,j+1)B(j)u(j) \tag{2.5}$$

gdzie: F(k,j) - jest n×n - wymiarową macierzą tranzycji układu dynamicznego (2.3), zdefiniowaną w sposób następujący [16]:

$$F(k,j) = \begin{cases} I, \text{ dla } k=j \\ A(k-1)A(k-2)\ldots A(j+1)A(j), \text{ dla } k>j \\ \text{nieokreślona dla } k<j \end{cases}$$

W przypadku gdy macierze A(k) są nieosobliwe dla $k \in Z$, macierz transpozycji F(k,j) jest określona również dla k<j następującą równością:

$$F(k,j) = A^{-1}(k)A^{-1}(k+1)A^{-1}(k+2) \ldots A^{-1}(j-2)A^{-1}(j-1)$$

Dla stacjonarnego układu liniowego (2.4) macierz tranzycji $F(k,j) = A^{k-j}$ dla $k \geq j$, a gdy macierz A jest nieosobliwa, równość ta jest również prawdziwa dla k<j. W tym przypadku postać rozwiązania x(k,x(0),u) jest dana następującym wzorem:

$$x(k,x(0),u) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{j=k-1} A^{k-j-1}Bu(j) \tag{2.6}$$

Należy podkreślić,że w przypadku dyskretyzacji układów ciągłych macierze A(k), $k \in Z$ są zawsze nieosobliwe [16, 25].

Dla nieliniowych układów dyskretnych można sformułować wiele różnych rodzajów sterowalności [12-16]. Poniżej zostaną przytoczone najważniejsze z tych definicji.

Definicja 2.1. Układ dynamiczny (2.1) nazywa się globalnie U - sterowalnym w przedziale $[k_o,k_1]$, jeżeli dla każdego stanu początkowego $x(k_o) \in R^n$ oraz każdego stanu końcowego $x_1 \in R^n$ istnieje sekwencja sterowań dopuszczalnych $\{u(k_o),u(k_o+1),u(k_o+2),\ldots,u(k_1-2),u(k_1-1)\}$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji trajektoria układu dynamicznego (2.1) spełnia następujący warunek:

$$x(k_1,x(k_o),u) = x_1$$

Definicja 2.2. Układ dynamiczny (2.1) nazywa się globalnie U - sterowalnym w chwili k_o, jeżeli dla każdego stanu początkowego $x(k_o) \in R^n$ oraz każdego stanu końcowego $x_1 \in R^n$ istnieje chwila $k_1 \geq k_o$ (zależna od $x(k_o)$ oraz x_1) oraz sekwencja sterowań dopuszczalnych $\{u(k_o),u(k_o+1),u(k_o+2),\ldots,u(k_1-2), u(k_1-1)\}$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji sterowań trajektoria układu dynamicznego (2.1) spełnia następujący warunek:

$$x(k_1,x(k_o),u) = x_1$$

Definicja 2.3. Układ dynamiczny (2.1) nazywa się lokalnie U-sterowalnym ze zbioru $D_o \subset R^n$ do zbioru $D_1 \subset R^n$ w przedziale $[k_o, k_1]$, jeżeli dla każdego stanu początkowego $x(k_o) \in D_o$ oraz każdego stanu końcowego $x_1 \in D_1$ istnieje sekwencja sterowań dopuszczalnych $\{u(k_o), u(k_o+1), u(k_o+2), \ldots, u(k_1-2), u(k_1-1)\}$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji sterowań trajektoria układu dynamicznego (2.1) spełnia następujący warunek:

$$x(k_1, x(k_o), u) = x_1$$

Definicja 2.4. Układ dynamiczny (2.1) nazywa się lokalnie U-sterowalnym ze zbioru $D_o \subset R^n$ do zbioru $D_1 \subset R^n$ w chwili k_o, jeżeli dla każdego stanu początkowego $x(k_o) \in D_o$ oraz każdego stanu końcowego $x_1 \in D_1$ istnieje chwila $k_1 \geq k_o$ (zależna od $x(k_o)$ oraz x_1) oraz sekwencja sterowań dopuszczalnych $\{u(k_o), u(k_o+1), u(k_o+2), \ldots, u(k_1-2), u(k_1-1)\}$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji sterowań trajektoria układu dynamicznego (2.1) spełnia następujący warunek:

$$x(k_1, x(k_o), u) = x_1$$

Jeżeli $D_o = D_1 = D \subset R^n$, to zamiast o globalnej U-sterowalności z D_o do D_1 mówimy w skrócie o globalnej U-sterowalności w zbiorze D. Jeżeli natomiast $D_o = R^n$ oraz $D_1 = \{0\}$ ($D_o = \{0\}$ oraz $D_1 = R^n$), to mówimy odpowiednio o globalnej U-sterowalności do zera i globalnej U-sterowalności z zera. W przypadku gdy $D_o = D_1 = R^n$, wówczas definicja 2.1 pokrywa się z definicją 2.3, a definicja 2.2 pokrywa się z definicją 2.4. W sytuacji gdy $0 \in \mathrm{int} D_o$ oraz $D_1 = \{0\}$ ($D_o = \{0\}$ oraz $0 \in \mathrm{int} D_1$) posługujemy się odpowiednio terminologią: lokalna U-sterowalność do zera i lokalna U-sterowalność z zera. Natomiast w przypadku gdy $0 \in \mathrm{int}(D_o \cap D_1)$, używamy terminu lokalna U-sterowalność wokół zera.

3. Warunki wystarczające lokalnej sterowalności

Najczęściej stosowana metoda badania lokalnej sterowalności nieliniowego układu dynamicznego (2.1) polega na analizowaniu globalnej lub lokalnej sterowalności jego liniowego przybliżenia postaci (2.3). Metoda ta bazuje na znanym z analizy funkcjonalnej twierdzeniu o nieliniowych operatorach pokrywających otoczenia wybranych punktów przeciwdziedziny. Twierdzenie to mówi, że nieliniowy operator $P : X \to Y$, odwzorowujący otoczenie punktu $x_o \in X$ przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y i posiadający w punkcie x_o pochodną Frechета, której obrazem (przeciwdziedziną) jest cała przestrzeń Y, zawiera w swoim obrazie otoczenie punktu $P(x_o)$.

W celu zastosowania tego ogólnego twierdzenia należy poczynić pewne założenia dotyczące układu dynamicznego (2.1), a w szczególności funkcji $f(k, x(k), u(k))$.

Niech funkcja $f(k, x, u)$ będzie w sposób ciągły różniczkowalna względem x oraz u w obszarze $(x, u) \in D \times U$, gdzie $D \subset R^n$ oraz $U \subset R^m$ są zbiorami o niepustych wnętrzach odpowiednio w przestrzeni R^n oraz R^m. Oznaczmy

odpowiednie pochodne cząstkowe funkcji f(k,x,u) następującymi wzorami:

$$\frac{\partial f(k,\bar{x},\bar{u})}{\partial x} = A(k) \qquad \frac{\partial f(k,\bar{x},\bar{u})}{\partial u} = B(k), \quad k \geq k_o \tag{3.1}$$

gdzie: $(\bar{x},\bar{u}) \in \text{int } D \times \text{int } U$ jest ustalonym punktem w przestrzeni $R^n \times R^m$,

A(k) jest macierzą n×n - wymiarową dla $k \geq k_o$,

B(k) jest macierzą n×m - wymiarową dla $k \geq k_o$.

Ponadto załóżmy, że istnieje trajektoria $\{\bar{x}(k_o),\bar{x}(k_o+1),\bar{x}(k_o+2),\ldots,\bar{x}(k),\ldots\}$, $\bar{x}(k) \in \text{int}D$ dla $k \geq k_o$, układu dynamicznego (2.1) odpowiadająca sekwencji sterowań dopuszczalnych $\{\bar{u}(k_o),\bar{u}(k_o+1),\bar{u}(k_o+2),\ldots,\bar{u}(k),\ldots\}$, $\bar{u}(k) \in \text{int}U$. Innymi słowy, dopuszczalnej sekwencji sterowań $\bar{u}(k)$, $k \geq k_o$ o wartościach leżących wewnątrz zbioru $U \subset R^m$ odpowiada trajektoria układu dynamicznego (2.1) $\bar{x}(k)$, $k \geq k_o$ o wartościach leżących wewnątrz zbioru $D \subset R^n$.

Przy powyższych nietrudnych do sprawdzenia założeniach można sformułować warunek wystarczający lokalnej U-sterowalności w zbiorze $D \subset R^n$ nieliniowego układu dynamicznego (2.1).

Twierdzenie 3.1 [23]. Jeżeli spełnione są założenia dotyczące funkcji f(k,x,u) oraz układu dynamicznego (2.1), to warunkiem wystarczającym lokalnej U-sterowalności w zbiorze $D \subset R^n$ w przedziale $[k_o,k_1]$ nieliniowego układu dynamicznego (2.1) jest lokalna U-sterowalność w zbiorze D w przedziale $[k_o,k_1]$ liniowego przybliżenia (2.3) z macierzami A(k) oraz B(k) danymi wzorami (3.1).

Wniosek 3.1 [23]. Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3.1, to warunkiem wystarczającym lokalnej U-sterowalności w zbiorze $D \subset R^n$ w chwili k_o nieliniowego układu dynamicznego (2.1) jest lokalna U-sterowalność w zbiorze D w chwili k_o liniowego przybliżenia (2.3) z macierzami A(k) oraz B(k) danymi wzorami (3.1).

Analogiczne rezultaty dotyczące lokalnej U-sterowalności stacjonarnych układów nieliniowych (2.2) zostaną sformułowane w twierdzeniu 3.2 oraz wniosku 3.2.

Twierdzenie 3.2 [23]. Jeżeli spełnione są założenia dotyczące funkcji f(x,u) oraz układu dynamicznego (2.2), to warunkiem wystarczającym lokalnej U-sterowalności w zbiorze $D \subset R^n$ w przedziale $[0,k_1]$ nieliniowego stacjonarnego układu dynamicznego (2.2) jest lokalna U-sterowalność w w zbiorze D w przedziale $[0,k_1]$ liniowego stacjonarnego przybliżenia (2.4) z macierzami A oraz B danymi następującymi wzorami:

$$\frac{\partial f(\bar{x},\bar{u})}{\partial x} = A \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial f(\bar{x},\bar{u})}{\partial u} = B \tag{3.2}$$

gdzie: A jest stałą n×n - wymiarową macierzą oraz B jest stałą n×m - wymiarową macierzą.

Wniosek 3.2 [23]. Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3.2, to warunkiem wystarczającym lokalnej U-sterowalności w zbiorze $D \subset R^n$ w chwili 0 nieliniowego stacjonarnego układu dynamicznego (2.2) jest lokalna U-sterowalność w zbiorze D w chwili 0 liniowego stacjonarnego przybliżenia

(2.4) z macierzami A oraz B danymi wzorami (3.2).

Przytoczone twierdzenia i wnioski podają warunki wystarczające lokalnej U-sterowalności w zbiorze $D \subset R^n$ dla najbardziej ogólnych nieliniowych układów dynamicznych niestacjonarnych postaci (2.1) oraz stacjonarnych postaci (2.2).

Obecnie sformułujemy warunki wystarczające lokalnej U-sterowalności w otoczeniu zera dla niestacjonarnych oraz stacjonarnych nieliniowych układów dyskretnych postaci (2.1) oraz (2.2). W tym celu załóżmy, że $0 \in \mathrm{int}D$ oraz $0 \in \mathrm{int}U$, a ponadto niech $f(k,0,0) = 0$ dla $k \geq k_o$. Powyższe założenia gwarantują nam, że zerowej sekwencji sterowań dopuszczalnych odpowiada zerowa trajektoria układu dynamicznego, która całkowicie mieści się w zbiorze $D \subset R^n$, zawierającym w swoim wnętrzu początek układu współrzędnych. Zatem para $(\bar{x},\bar{u}) = (0,0) \in \mathrm{int}D \times \mathrm{int}U$ spełnia wszystkie założenia sprecyzowane na początku niniejszego podrozdziału. Niech funkcja $f(k,x,u)$ będzie w sposób ciągły różniczkowalna w otoczeniu zera względem drugiego i trzeciego argumentu, wówczas jej pochodne cząstkowe w punkcie (0,0) oznaczamy odpowiednio następującymi wzorami:

$$\frac{\partial f(k,0,0)}{\partial x} = A(k) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial f(k,0,0)}{\partial u} = B(k), \; k \geq k_o \qquad (3.3)$$

Twierdzenie 3.3 [13,23]. Jeżeli spełnione są założenia dotyczące funkcji $f(k,x,u)$ podane wyżej, to warunkiem wystarczającym lokalnej U-sterowalności wokół zera w przedziale $[k_o,k_1]$ nieliniowego układu dynamicznego (2.1) jest lokalna U-sterowalność wokół zera w przedziale $[k_o,k_1]$ liniowego przybliżenia (2.3) z macierzami $A(k)$ oraz $B(k)$ danymi wzorami (3.3).

Wniosek 3.3 [13,23]. Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3.3, to warunkiem wystarczającym lokalnej U-sterowalności wokół zera w chwili k_o nieliniowego układu dynamicznego (2.1) jest lokalna U-sterowalność w chwili k_o liniowego przybliżenia (2.3) z macierzami $A(k)$ oraz $B(k)$ danymi wzorami (3.3).

Podobne kryteria lokalnej U-sterowalności wokół zera dla stacjonarnych nieliniowych układów dyskretnych postaci (2.2) uzyskuje się w oparciu o twierdzenie 3.3 oraz wniosek 3.3 wykorzystując liniowe przybliżenie (2.4) z macierzami A oraz B postaci następującej:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = A \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial u} = B, \; k \geq 0 \qquad (3.4)$$

Kryteria te zostaną sformułowane w twierdzeniu 3.4 oraz wniosku 3.4.

Twierdzenie 3.4 [13,23]. Jeżeli spełnione są założenia dotyczące funkcji $f(x,u)$, to warunkiem wystarczającym lokalnej U-sterowalności wokół zera w przedziale $[0,k_1]$ nieliniowego stacjonarnego układu dynamicznego (2.2) jest lokalna U-sterowalność wokół zera w przedziale $[0,k_1]$ liniowego stacjonarnego przybliżenia (2.4) z macierzami A oraz B danymi wzorami (3.4).

Wniosek 3.4 [13,23]. Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3.4, to

warunkiem wystarczajacym lokalnej U-sterowalności wokół zera w chwili 0 nieliniowego stacjonarnego układu dynamicznego (2.2) jest lokalna U-sterowalność wokół zera w chwili 0 liniowego stacjonarnego przybliżenia (2.4) z macierzami A oraz B danymi wzorami (3.4).

Wykorzystanie przytoczonych kryteriów badania lokalnej U-sterowalności nieliniowych dyskretnych układów dynamicznych wymaga znajomości warunków lokalnej U-sterowalności ich liniowych aproksymacji. W przypadku dowolnych zbiorów $U \subset R^m$ zagadnienie to jest trudne do rozwiazania. Dodatkowe założenia dotyczace zbioru U, takie jak zwartość, wypukłość czy też ograniczoność umozliwiaja podanie efektywnych kryteriów badania lokalnej oraz globalnej U-sterowalności liniowych układów dyskretnych postaci (2.3) lub (2.4). Szereg takich kryteriów zostało przedstawionych w przeglądowych pracach [13] i [14] oraz monografii [16]. W szczególnym przypadku gdy $U=R^m$, to znaczy gdy nie ma zadnych ograniczen na wartości sterowań i każda sekwencja sterowan jest sekwencja dopuszczalną, kryteria te mają postać klasycznych warunków koniecznych i wystarczających sterowalności opartych na badaniu rzedu macierzy sterowalności [13,14,16]. Ponadto, jeżeli zbiór $U \subset R^m$ zawiera w swoim wnetrzu punkt zero, wówczas globalna R^m-sterowalność układów liniowych jest rownowazna lokalnej U-sterowalności.

Ponizej zostana przytoczone dwa najczęściej stosowane kryteria globalnej sterowalności liniowych układów dyskretnych przy braku ograniczeń na sterowania.

Twierdzenie 3.5 [13,14,16]. Warunkiem koniecznym i wystarczającym globalnej sterowalności w przedziale $[k_o,k_1]$ liniowego niestacjonarnego układu dyskretnego (2.3) jest, aby

$$\text{rząd}\left[B(k_1-1)\,\vdots\,A(k_1-1)B(k_1-2)\,\vdots\,A(k_1-1)A(k_1-2)B(k_1-3)\,\vdots\,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\,\vdots\,A(k_1-1)A(k_1-2)\ldots A(k_o+2)A(k_o+1)B(k_o)\right] = n \qquad (3.5)$$

Wniosek 3.5 [13,14,16]. Warunkiem koniecznym i wystarczającym globalnej sterowalności w przedziale $[0,k_1]$ liniowego stacjonarnego układu dyskretnego (2.4) jest, aby

$$\text{rząd}\left[B\,\vdots\,AB\,\vdots\,A^2B\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,A^kB\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,A^{k_1-1}\right] = n \qquad (3.6)$$

Można dowieść, że w przypadku braku ograniczeń nałożonych na sterowanie pojecia globalnej sterowalności w przedziale $[k_o,k_1]$ oraz globalnej sterowalności w chwili k_o liniowego niestacjonarnego układu dyskretnego (2.3) są sobie równoważne. Oczywiście to samo stwierdzenie odnosi się również do liniowego układu stacjonarnego postaci (2.4). Zatem twierdzenie 3.5 oraz wniosek 3.5 są jednocześnie warunkami koniecznymi i wystarczającymi globalnej sterowalności w chwili k_o liniowego niestacjonarnego układu dyskretnego (2.3) oraz w chwili 0 liniowego stacjonarnego układu dyskretnego (2.4) [13,14,16].

Metoda badania lokalnej U-sterowalności nieliniowych układów dyskretnych oparta na analizowaniu globalnej lub lokalnej U-sterowalności

ich liniowych aproksymacji ma swoje zalety i wady. Do zalet tej metody należy niewątpliwie jej prostota oraz fakt, że w literaturze istnieje stosunkowo wiele rezultatów dotyczących globalnej oraz lokalnej U-sterowalności liniowych układów dyskretnych [13,14,16].

Podstawową wadą tej metody jest istnienie dość silnych założeń dotyczących funkcji $f(k,x(k),u(k))$. Najbardziej istotnym założeniem ograniczającym stosowalność tej metody jest założenie o ciągłej różniczkowalności funkcji $f(k,x,u)$ względem drugiej i trzeciej zmiennej. Założenie to eliminuje szereg nieliniowych układów dyskretnych [18,19]. Warunki wystarczające lokalnej U-sterowalności układów dynamicznych (2.1) oraz (2.2) z nieróżniczkowalnymi funkcjami $f(k,x,u)$ oraz $f(x,u)$ zostaną sformułowane w kolejnym, czwartym podrozdziale niniejszej pracy w oparciu o wyniki prezentowane w publikacjach [18], [19] oraz [24].

Prezentowana metoda badania lokalnej U-sterowalności nieliniowych układów dyskretnych, oparta na ich liniowych aproksymacjach, nie obejmuje również bardzo ważnej klasy układów dyskretnych, a mianowicie tzw. układów biliniowych. Wynika to z faktu, że dla układów biliniowych ich aproksymacja w zerze nie zawiera zmiennej sterującej [1,8,22].

4. Sterowalność bez założenia różniczkowalności

Bezpośrednie zastosowanie metody przybliżenia liniowego do badania lokalnej U-sterowalności nieliniowych dyskretnych układów dynamicznych (2.1) lub (2.2) z nieróżniczkowalnymi funkcjami $f(k,x,u)$ lub $f(x,u)$ nie jest możliwe. W tym przypadku stosuje się inne metody, najczęściej oparte na pojęciu uogólnionej pochodnej Clarke'a [19,20,24], stanowiącej rozszerzenie klasycznej pochodnej Frecheta na funkcje nieróżniczkowalne.

W celu uproszczenia zapisu ograniczymy się wyłącznie do badania lokalnej U-sterowalności wokół zera zakładając, że spełnione są następujące zależności:

$$0 \in \mathrm{int}U \quad \text{oraz } f(k,0,0) = 0 \text{ dla } k \geq k_0 \tag{4.1}$$

Dodatkowo zakłada się, że funkcje $f(k,x,u)$ spełniają warunek Lipschitza względem drugiej i trzeciej zmiennej lokalnie wokół punktu $(0,0) \in \mathrm{int}D \times \mathrm{int}U$, tzn.:

$$\|f(k,x_1,u)-f(k,x_2,u)\| \leq M\|x_1-x_2\| \text{ dla } x_1,x_2 \in \mathrm{int}D,\ k \geq k_0 \tag{4.2}$$

$$\|f(k,x,u_1)-f(k,x,u_2)\| \leq N\|u_1-u_2\| \text{ dla } u_1,u_2 \in \mathrm{int}U,\ k \geq k_0 \tag{4.3}$$

Jeżeli spełnione są założenia (4.2) oraz (4.3), wówczas istnieją w punkcie (0,0) uogólnione pochodne cząstkowe Clarke'a [19,20,24]. Ponieważ funkcja $f(k,x,u)$ jest typu $f: R \times R^n \times R^m \to R^n$, więc odpowiednie uogólnione pochodne cząstkowe Clarke'a A_{kx} oraz B_{ku}, $k \geq k_0$ są zbiorami macierzy A^c_{kx} oraz B^c_{ku} odpowiednio $n \times n$ - wymiarowych oraz $n \times m$ - wymiarowych. Wiadomo [19,20,24], że zbiory A_{kx} oraz B_{ku} są domknięte i wypukłe dla $k \geq k_0$. Są one określone następującymi relacjami [19]:

$$\mathcal{A}_{kx}=co(sp\{A^c_{kx}=\lim_{x^c_i\to 0} f_x(k,x_i,0):\ \text{po wszystkich ciągach } x^c_i\to 0\}) \quad (4.4)$$

$$\mathcal{B}_{ku}=co(sp\{B^c_{ku}=\lim_{u^c_j\to 0} f_u(k,0,u_j):\ \text{po wszystkich ciągach } u^c_j\to 0\}) \quad (4.5)$$

gdzie symbol co(sp{S}) oznacza otoczkę wypukłą zbioru S, natomiast f_x oraz f_u oznaczają pochodne Frecheta odpowiednio względem zmiennej x oraz zmiennej u.

W szczególnym przypadku, gdy funkcja f(k,x,u) posiada pochodne cząstkowe Frecheta $f_x(k,0,0)$ oraz $f_u(k,0,0)$, wówczas granice występujące we wzorach (4.4) oraz (4.5) nie zależą od wyboru ciągów $x^c_i\to 0$ oraz $u^c_j\to 0$, a zatem zbiory $\mathcal{A}_{kx}$ oraz $\mathcal{B}_{ku}$ są zbiorami jednoelementowymi postaci następującej [19,20,24]:

$$\mathcal{A}_{kx}=\{A(k)=f_x(k,0,0)=\frac{\partial f(k,0,0)}{\partial x}\},\ k\geq k_o \quad (4.6)$$

$$\mathcal{B}_{ku}=\{B(k)=f_u(k,0,0)=\frac{\partial f(k,0,0)}{\partial u}\},\ k\geq k_o \quad (4.7)$$

Przypadek ten został szczegółowo omówiony w podrozdziale 3, gdzie przytoczono szereg warunków wystarczających lokalnej U-sterowalności. Obecnie podamy warunek wystarczający lokalnej U-sterowalności wokół zera bez zakładania różniczkowalności funkcji f(k,x,u).

<u>Twierdzenie 4.1</u> [24]. Załóżmy, ze spełnione są założenia (4.1), (4.2) oraz (4.3). Jeżeli istnieją macierze m×n - wymiarowe P(k), dla $k=k_o$, k_o+1, ..., k_1-2, k_1-1 takie, że otoczka wypukła zbioru S:

$$S=\{A^c_{k_1-1,x}\,A^c_{k_1-2,x}\ldots A^c_{k_o+2,x}\,A^c_{k_o+1,x}\,B^c_{k_o,u}\,P(k_o)+A^c_{k_1-1,x}\,A^c_{k_1-2,x}\ldots$$

$$\ldots A^c_{k_o+2,x}\,B^c_{k_o+1,u}\,P(k_o+1)+\ldots+B^c_{k_1-1,u}\,P(k_1-1)\ :\ \text{gdzie}$$

$$A^c_{kx}\in\mathcal{A}_{kx},\ B^c_{ku}\in\mathcal{B}_{ku},\ \text{dla } k\geq k_o\} \quad (4.8)$$

zawiera jedynie nieosobliwe macierze n×n - wymiarowe, wówczas nieliniowy niestacjonarny układ dyskretny (2.1) jest lokalnie U-sterowalny wokół zera w przedziale $[k_o,k_1]$.

W przypadku gdy funkcja f(k,x,u) posiada pochodne cząstkowe Frecheta w punkcie (0,0), a zatem zbiory $\mathcal{A}_{kx}$ oraz $\mathcal{B}_{ku}$ są jednoelementowe, wówczas $A^c_{kx}=A(k)$ oraz $B^c_{ku}=B(k)$ dla $k\geq k_o$. Wybierając m×n - wymiarowe macierze P(k), $k\geq k_o$ w sposób następujący [24]:

$$\begin{aligned}
&P(k_o)=[A(k_1-1)A(k_1-2)\ldots A(k_o+2)A(k_o+1)B(k_o)]^T\\
&P(k_o+1)=[A(k_1-1)A(k_1-2)\ldots A(k_o+2)B(k_o+1)]^T\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P(k_1-1)=[B(k_1-1)]^T
\end{aligned} \quad (4.9)$$

otrzymuje się jako bezpośredni wniosek z twierdzenia 4.1 - twierdzenie 3.3 przedstawione w rozdziale 3.

Rozpatrzmy obecnie szczególny przypadek nieliniowego układu dyskretnego (2.1), w którym można rozdzielić funkcję $f(k,x(k),u(k))$ na dwie składowe zależne od zmiennych $x(k)$ oraz $u(k)$ oddzielnie, tzn.:

$$f(k,x(k),u(k)) = g(k,x(k)) + h(k,u(k)), \quad k\geq k_o \tag{4.10}$$

Zatem analizowany będzie nieliniowy niestacjonarny dyskretny układ dynamiczny postaci:

$$x(k+1) = g(k,x(k)) + h(k,u(k)), \quad k\geq k_o \tag{4.11}$$

gdzie: $g : R \times R^n \to R^n$ jest funkcją spełniającą warunek Lipschitza lokalnie wokół punktu 0, tzn.:

$$\|g(k,x_1)-g(k,x_2)\| \leq K\|x_1-x_2\| \text{ dla } x_1,x_2\in \mathrm{int}D\ni 0, \quad k\geq k_o \tag{4.12}$$

$h:R\times R^m \to R^n$ jest dowolną funkcją taką, że

$$0\in h(k,U), \text{ dla } k\geq k_o \tag{4.13}$$

$$h(k,U)\subset R^n \text{ są zbiorami wypukłymi i domkniętymi dla } k\geq k_o. \tag{4.14}$$

Załóżmy ponadto, że funkcja g spełnia warunek następujący:

$$g(k,0) = 0, \text{ dla } k\geq k_o \tag{4.15}$$

Należy zaznaczyć, że warunek (4.15) jest warunkiem słabszym niż warunek (4.1) sformułowany na wstępie niniejszego podrozdziału.

Ponieważ funkcja g spełnia w otoczeniu zera warunek Lipschitza, więc można zdefiniować dla niej uogólnioną pochodną Clarke'a w punkcie $0\in R^n$, wykorzystując w tym celu zależność (4.4). Oznaczmy symbolami A_{k0}, $k\geq k_o$ $n\times n$ - wymiarowe macierze będące elementami zbioru definiującego uogólnioną pochodną Clarke'a funkcji $g(k,x)$ w punkcie $0\in \mathrm{int}D$.

Rozpatrzmy dla każdej macierzy A_{k0}, $k\geq k_o$ liniowy dyskretny układ dynamiczny postaci następującej:

$$x(k+1) = A_{k0}x(k) + h(k,u(k)), \quad k\geq k_o \tag{4.16}$$

Układ dynamiczny (4.16) jest układem liniowym ze względu na zmienną x, natomiast jest w dalszym ciągu układem nieliniowym ze względu na sterowanie u (funkcja h może być funkcją silnie nieliniową).

W pracy [19] sformułowano i udowodniono warunek wystarczający lokalnej U-sterowalności wokół zera w przedziale $[k_o,k_1]$ nieliniowego układu dynamicznego (4.11) w oparciu o badanie lokalnej U-sterowalności wokół zera rodziny liniowych układów dynamicznych postaci (4.16).

<u>Twierdzenie 4.2</u> [19]. Jeżeli spełnione są założenia (4.12), (4.13), (4.14) oraz (4.15) dla $k+k_o,k_o+1,\ldots,k_1-2,k_1-1$, a ponadto dla każdej macierzy A_{k0} będącej elementem uogólnionej pochodnej Clarke'a funkcji g w punkcie 0, układ dynamiczny (4.16) jest lokalnie U-sterowalny wokół zera w przedziale $[k_o,k_1]$, to wówczas również układ dynamiczny (4.11) jest lokalnie U-sterowalny wokół zera w przedziale $[k_o,k_1]$.

W przypadku gdy funkcja $g(k,x)$, $k\geq k_o$ jest lokalnie różniczkowalna wokół zera, wówczas uogólniona pochodna Clarke'a zawiera jedynie jeden element i zamiast rodziny układów dynamicznych (4.16) wystarczy rozpatrywać w twierdzeniu 4.2 jeden konkretny układ tej postaci. Praca [19] zawiera również warunki wystarczające lokalnej U-sterowalności wokół zera w

przedziale $[k_o,k_1]$ nieliniowego układu dynamicznego (4.11) dla przypadku, gdy trajektoria układu jest ograniczona do pewnego z góry zadanego podzbioru przestrzeni R^n.

Przedstawione w rozdziale 3 oraz 4 rezultaty dotyczące lokalnej U-sterowalności nieliniowych układów dynamicznych postaci (2.1) lub (4.11) można uogólnić na szerszą klasę dyskretnych nieliniowych układów dynamicznych, a mianowicie na dyskretne nieliniowe układy dynamiczne z opóźnieniami we współrzędnych stanu oraz sterowaniach. Dynamikę takich układów można opisać następującym różnicowym równaniem stanu [21]:

$$x(k+1)=f(k,x(k),x(k-1),\dots,x(k-M),u(k),u(k-1),\dots,u(k-N)),\quad k\geq k_o \tag{4.17}$$

lub równaniem różnicowym z wyróżnioną częścią liniową postaci [21]:

$$x(k+1)=\sum_{i=0}^{i=M} A_i(k)x(k-i)+\sum_{j=0}^{j=N} B_j(k)u(k-j)+$$
$$+\,g(k,x(k),x(k-1)\dots,x(k-M),u(k),u(k-1),\dots,u(k-N)) \tag{4.18}$$

Dla równań różnicowych (4.17) oraz (4.18) warunki początkowe są postaci następującej:

$$x(k_o-i)=x_{io}\in R^n,\qquad i=0,1,2,\dots,M \tag{4.19}$$

$$u(k_o-j)=u_{jo}\in R^m,\qquad j=0,1,2,\dots,N \tag{4.20}$$

W pracy [21] analizowano warunki lokalnej U-sterowalności wokół zera układów dynamicznych (4.17) oraz (4.18) w oparciu o ich liniowe przybliżenia postaci następującej:

$$x(k+1)=\sum_{i=0}^{i=M} A_i(k)x(k-i)+\sum_{j=0}^{j=N} B_j(k)u(k-j),\quad k\geq k_o \tag{4.21}$$

Między innymi w publikacji [21] dowiedziono, że jeżeli funkcja g w równaniu (4.20) jest ciągła i ograniczona ze względu na zespół zmiennych $x(k),x(k-1),\dots,x(k-M),u(k),u(k-1),\dots,u(k-N)$, to wówczas układ dynamiczny (4.20) jest lokalnie U-sterowalny wokół zera, jeżeli jego przybliżenie liniowe (4.21) jest lokalnie U-sterowalne wokół zera.

Oprócz metod badania lokalnej U-sterowalności układów nieliniowych opartych na analizowaniu liniowych przybliżeń stosuje się także metody bazujące na twierdzeniach o punktach stałych odwzorowań nieliniowych [20]. Metody te są z powodzeniem stosowane w odniesieniu do tzw. quasi-liniowych dyskretnych układów dynamicznych postaci następującej [20]:

$$x(k+1)=A(k,x(k))x(k)+B(k,x(k))u(k)+g(k,x(k),u(k)),\quad k\geq k_o \tag{4.22}$$

gdzie: $A(k,x)$ jest $n\times n$ - wymiarową macierzą ciągłą względem zmiennej x,

$B(k,x)$ jest $n\times m$ - wymiarową macierzą ciągłą względem zmiennej x,

$g : R\times R^n\times R^m\to R^n$ jest dla $x\in D$, $u\in U$, $k\geq k_o$ funkcją ograniczoną.

Przy powyższych założeniach w pracy [20] sformułowano warunki wystarczające lokalnej U-sterowalności wokół zera w przedziale $[k_o,k_1]$ dla nieliniowego układu dyskretnego (4.22).

<u>Twierdzenie 4.3</u> [20]. Jeżeli spełnione są powyższe założenia dotyczące macierzy $A(k,x)$, $B(k,x)$ oraz funkcji $g(k,x,u)$, a ponadto

$$||A(k,x)||\le M \quad \text{oraz} \quad ||B(k,x)||\le N \text{ dla } x\in D \text{ oraz } k\ge k_o \tag{4.23}$$

oraz liniowe dyskretne układy dynamiczne postaci

$$x(k+1) = A(k,z)x(k) + B(k,z)u(k), \quad k\ge k_o \tag{4.24}$$

gdzie $z\in D$ są dowolnymi n - wymiarowymi wektorami,
są wszystkie lokalnie U-sterowalne wokół zera w przedziale $[k_o,k_1]$, wówczas również nieliniowy układ dynamiczny (4.22) jest lokalnie U-sterowalny wokół zera w przedziale $[k_o,k_1]$.

Ponieważ twierdzenie 4.3 wymaga badania lokalnej U-sterowalności wszystkich układów liniowych postaci (4.24) przy parametrze z ze zbioru $D\subset R^n$, więc może być ono efektywnie zastosowane jedynie w przypadku stosunkowo prostych układów (4.24), dla których macierz sterowalności ma nieskomplikowaną strukturę [20].

W pracy [20] podano również kryteria badania lokalnej i globalnej U-sterowalności dla nieco ogólniejszych układów dynamicznych, a mianowicie dla układów z macierzami A(k,x,u) oraz B(k,x,u), tzn. dla układów postaci:

$$x(k+1)=A(k,x(k),u(k))x(k)+B(k,x(k),u(k))u(k)+g(k,x(k),u(k)), \quad k\ge k_o \tag{4.25}$$

<u>Twierdzenie 4.4</u> [20]. Jeżeli macierze A(k,x,u) oraz B(k,x,u) są ograniczone, tzn.

$$||A(k,x,u)||\le M \text{ oraz } ||B(k,x,u)||\le N \text{ dla } k\ge k_o,\ (x,u)\in D\times U \tag{4.26}$$

a funkcja g(k,x,u) spełnia założenia twierdzenia 4.3, to warunkiem wystarczającym lokalnej U-sterowalności wokół zera w przedziale $[k_o,k_1]$ nieliniowego układu (4.25) jest, aby wszystkie układy liniowe postaci następującej

$$x(k+1) = A(k,z,v)x(k) + B(k,z,v)u(k), \quad k\ge k_o \tag{4.27}$$

gdzie $z\in D$ oraz $v\in U$ są ustalonymi parametrami,
były lokalnie U-sterowalne wokół zera w przedziale $[k_o,k_1]$.

W publikacji [20] podano również konkretne postacie macierzy sterowalności dla liniowych układów dynamicznych postaci (4.24) oraz (4.27). Ze względu na bardzo skomplikowaną formę tych macierzy nie będą one prezentowane w niniejszej pracy.

Dowody twierdzeń 4.3 oraz 4.4 są oparte na znanym z literatury twierdzeniu Schaudera o punkcie stałym ciągłych odwzorowań nieliniowych [16]. Metoda punktów stałych była początkowo stosowana do badania sterowalności ciągłych nieliniowych układów dynamicznych (patrz przegląd literatury w monografii [16]), a dopiero później wykorzystana z powodzeniem do analizowania sterowalności dyskretnych układów nieliniowych. Oprócz twierdzenia Schaudera do badania lokalnej sterowalności można również wykorzystać twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

5. Podsumowanie

W pracy przedstawiono w syntetycznej formie zasadnicze rezultaty dotyczące teorii nieliniowych układów dyskretnych ze szczególnym uwzględnieniem zagadnień różnego rodzaju sterowalności. Zaprezentowane

kryteria badania lokalnej U-sterowalności zaczerpnięto głównie z prac [18], [19], [20], [21], [23], [24]. W artykule [25] można znaleźć wyniki związane z zachowaniem własności sterowalności przy dyskretyzacji układu ciągłego. Okazuje się, że sterowalność układu ciągłego nie gwarantuje nam sterowalności odpowiadającego mu układu dyskretnego nawet w przypadku układów liniowych. Stąd zagadnienia badania sterowalności układów dyskretnych muszą być rozpatrywane oddzielnie, chociaż metody badawcze pozostają takie same jak w układach ciągłych.

Specyficzną klasę układów nieliniowych stanowią tzw. układy biliniowe, w których występuje iloczyn zmiennych stanu oraz sterowania [12]. Sterowalność biliniowych układów dyskretnych badana była w licznych publikacjach [1-10, 17], gdzie sformułowano szereg warunków umożliwiających praktyczną weryfikację różnych rodzajów sterowalności [12]. Warunki te wymagają stosowania specyficznego podejścia, odmiennego od metod uzywanych dla innych typów nieliniowych układów dyskretnych. Wynika to bezpośrednio z faktu liniowości tych układów względem współrzędnych stanu przy stałym sterowaniu. Umozliwia to wykorzystanie pewnych twierdzeń z dziedziny algebry liniowej do badania sterowalności biliniowych układów dyskretnych [1], [2], [4], [5], [6], [7], [17].

Przedstawione w niniejszej pracy rezultaty mogą być uogólnione na przypadek nieliniowych, niestacjonarnych układów dyskretnych o wielu zmiennych niezależnych, tzw. układów typu M-D [11], [16]. Szczególnym przypadkiem są tu układy dyskretne o dwu zmiennych niezależnych, tzw. układy typu 2-D. Warunki sterowalności dla liniowych układów dyskretnych typu 2-D oraz ogólnie M-D zostały szeroko omówione w monografiach [11] oraz [16].

LITERATURA

[1] Elliot D.L., Tarn T.J., Goka T.: Controllability of discrete bilinear systems with bounded controls. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-18,no.2,1973, pp.298-301.

[2] Evans M.E.,Murthy D.N.: Controllability of a class of discrete-time bilinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-22, no.1, 1977, pp.78-83.

[3] Evans M.E.,Murthy D.N.: Controllability of discrete-time systems with positive controls. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-22, no.6, 1977, pp.942-945.

[4] Evans M.E.,Murthy D.N.: Controllability of discrete-time inhomogeneous bilinear systems. Automatica, vol.14, no.2, 1978, pp.147-151.

[5] Evans M.E.:Bounded control and discrete-time controllability. International Journal of Systems Science,vol.17,no.6,1986, pp.943-951.

[6] Frazho A.E.: A shift operator approach to bilinear system theory. SIAM Journal on Control and Optimization, vol.18, no.6. 1980, pp.640-658.

[7] Frazho A.E.: Abstract bilinear systems: the forward shift approach. Mathematical System Theory, vol.14, no.1, 1981, pp.83-94.

[8] Goka T.,Tarn T.J.,Zaborsky J.: On the controllability of a class of discrete bilinear systems. Automatica, vol.8, no.4, 1979, pp.615-622.

[9] Grasselli O.M.,Isidori A.,Nicolo P.:Dead-beat control of discrete-time bilinear systems. International Journal of Control, vol.32, no.1, 1980, pp.31-29.

[10] Hollis P.,Murthy D.N.: Study of uncontrollable discrete bilinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-27, no.1, 1982, pp.184-186.

[11] Kaczorek T.: Two-Dimentional Linear Systems. Springer - Verlag, Berlin 1985.

[12] Klamka J.: Sterowalność biliniowych procesów dyskretnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s.Automatyka, z.54, Gliwice 1980, str.99-107.

[13] Klamka J.: Sterowalność dyskretnych układów dynamicznych - przegląd problemów. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s.Automatyka, z.84, Gliwice 1986, str.103-118.

[14] Klamka J.: Sterowalność dyskretnych układów dynamicznych przy ograniczeniach na sterowanie - przegląd problemów. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Automatyka, z.94, Gliwice 1988, str.153-165.

[15] Klamka J.: Sterowalność układów dyskretnych typu 2-D. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s.Automatyka, z.100, Gliwice 1990, str.113-125.

[16] Klamka J.: Sterowalność Układów Dynamicznych. PWN, Warszawa 1990.

[17] Murthy D.N.: Controllability of discrete-time linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-24, no.6, 1979, pp.974-975.

[18] Phat N.V.: Controllability of discrete-time systems with nonconvex restrained controls. Optimization, vol.14, no.2, 1983, pp.371-375.

[19] Phat N.V.: Controllability of nonlinear discrete systems without differentiability assumption. Optimization, vol.19, no.1, 1988, pp. 133-142.

[20] Phat N.V.: Controllability in one quasilinear discrete system. Hanoi Mathematical Colloquium, vol.1, no.2, 1980, pp.18-23.

[21] Phat N.V.: Controllability of nonlinear discrete time delay systems. Acta Mathematica Vietnamica, vol.5, no.2, 1980, pp.63-73.

[22] Tarn T.J.,Elliot D.L.,Goka T.: Controllability of discrete bilinear systems with bounded controls. IEEE Transaction on Automatic Control, vol.Ac-18, no.3, 1973, pp.298-301.

[23] Weiss L.: Controllability, realization and stability of discrete-time systems. SJAM Journal on Control, vol.10, no.2, 1972, pp.230-251.

[24] Yen N.D.: Local controllability for lipschitzian disrete-time systems. Acta Mathematica Vietnamica, vol.11, no.2, 1972, pp.172-179.

[25] Younlong Y.,Laixiang S.,Huisheng Z.: Controllability and observability of discrete systems. Chineese Annales of Mathematic, vol.3, no.3, 1982, pp.273-278.

Recenzent:Prof.dr h.inż. Józef Korbicz

Wpłynęło do Redakcji do 1992-03-30.

Abstract:Controllability theory of dynamical systems is one of the most important concepts of mathematical control theory. The results of controllability theory are effectively used in many different areas of applications, e.g. in optimal control theory, economic systems dynamics, social science, chemical systems, mechanics and in defense problems. Rougly speaking, the concept of controllability means that we can steer a dynamical system from a given initial state to the desired final state using admissible controls. The appearance of many interesting applications problems from the enumerated scientific and technical fields has significantly affected and stimulated the rapid development of controllability theory for various classes of dynamical systems.

Up to the present time, the problems of controllability in continuous dynamical systems has been extensively considered in many publications. However, this is not true for the problems of controllability theory in discrete dynamical systems, for which the number of valuable publications is rather small.

In the present paper we shall present a short review of the fundamental directions and results in controllability theory of nonlinear,

discrete-time dynamical systems. It should be pointed out, that specific difficulties arises in trying to apply the controllability criteria of nonlinear continuous systems to discrete dynamical systems.

Using the general theorems from functional analysis we shall formulate several sufficient conditions for various types of local controllability of different kinds of nonlinear discrete systems. The discrete systems with delays in the state variables and in the control are also investigated. Relationships among various kinds of controllability are discussed. Finally some additional remarks concerning controllability of so called bilinear discrete systems are given.

All results presented in this paper are taken from the recent publications on controllability of nonlinear discrete time dynamical systems.