ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992
Seria: AUTOMATYKA z. 109 Nr kol. 1175

Krzysztof Pieńkosz
Eugeniusz Toczyłowski
Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej

REGULARYZACJE METOD AGREGACJI ZADAŃ HARMONOGRAMOWANIA W JEDNOSTOPNIOWYCH SYSTEMACH PRODUKCYJNYCH

REGULARIZATION OF AGGREGATION METHODS FOR LOT-SIZE SCHEDULING IN SINGLE-STAGE SYSTEMS

REGULARISATION DER AGGREGATIONSMETHODEN FÜR PROBLEME DER HARMONOGRAMMBILDUNG IN EINSTUFIGEN PRODUKTIONSYSTEMEN

Streszczenie: W pracy przedstawiono metodologię wykorzystania metod agregacji wyrobów i zasobów do rozwiązywania zagadnienia harmonogramowania produkcji porcjami w systemie składającym się z kilku równolegle pracujących jednostek wytwórczych. Zaprezentowano zunifikowane podejście do konstrukcji *regularnych* modeli zagregowanych, których rozwiązania można zawsze zdezagregować w dopuszczalne harmonogramy szczegółowe.

Summary. The paper presents a methodology of regular aggregation of items and resources for solving lot-size scheduling problems in single-stage systems with parallel production units. A unified approach for construction of the *regular* aggregated models, solutions of which can be always disaggregated into detailed feasible schedules, is given.

Zusammenfassung: Im Beitrag wird die Methodologie der Ausnutzung der Methoden Aggregation der Produkten und Ressourcen zum Lösung des Problems Harmonogrammbildung für die Produktion im Partien vorgestellt. Das System besteht aus einigen parallel arbeitenden Erzeugungseinheiten. Es wird die vereinheitliche Einstellung zu der Konstruktion der regulären aggregierten Modellen dargestellt. Diese Modelle kann man stets zum zulässigen ausführlichen Harmonogrammen reduzieren.

1. Wprowadzenie

Sterowanie produkcji w złożonych systemach wytwarzania wymaga podejmowania różnego rodzaju decyzji, które w ogólnym ujęciu można podzielić na trzy kategorie (por. np. [3, 12]):

- Planowanie strategiczne (długoterminowe) - długofalowe decyzje o inwestycjach, asortymencie produkcji i wyposażeniu zakładu ,
- Planowanie taktyczne (średnioterminowe) - decyzje dotyczące wielkości produkcji, terminów jej realizacji, rozdziału zasobów ,
- Planowanie operacyjne (krótkoterminowe) - szczegółowe decyzje związane z bieżącym funkcjonowaniem systemu, np. szeregowanie zadań, wybór marszrut, korygowanie zakłóceń .

Niniejsza praca dotyczy zagadnień związanych z planowaniem taktycznym. Ogromny rozmiar zadań, jakie pojawiają się na tym szczeblu decyzyjnym, zmusza do posługiwania się modelami zagregowanymi. Agregacja pozwala zmniejszyć wymiary analizowanych problemów i uśrednić błędy wynikające z niedokładności identyfikacji parametrów zadania. Metody agregacji stanowią jedno z bardziej efektywnych podejść do rozwiązywania praktycznych zadań harmonogramowania produkcji (patrz np. [4, 12]) oraz wielu innych pokrewnych zadań optymalizacji (patrz [9]). Należy jednak pamiętać, że agregacja często wiąże się z utratą pewnej części informacji o problemie i może prowadzić do zbyt dużych uproszczeń. Typowy schemat agregacji prowadzi do relaksacji problemu, co oznacza, że mogą pojawiać się rozwiązania zagregowane, których nie udaje się zdezagregować, w dopuszczalne rozwiązania problemu pierwotnego. Z praktycznego punktu widzenia interesujące są raczej te metody, które zawsze generują rozwiązania dopuszczalne nawet kosztem pewnej utraty optymalności. W literaturze problem dopuszczalności dezagregacji był rozpatrywany dla różnych szczegółowych zagadnień między innymi w pracach [1, 2, 5, 7, 8, 10, 11]. W niniejszej pracy jest proponowana bardziej uniwersalna metodologia konstrukcji modeli zagregowanych. Pozwala ona w jednolity sposób traktować różne rodzaje zadań harmonogramowania produkcji w systemach jednostopniowych, które dotychczas były rozpatrywane niezależnie.

2. Sformułowanie zadania harmonogramowania

Rozważany jest system produkcyjny zawierający zbiór L jednostek wytwórczych, na których wytwarzane są wyroby ze zbioru $N = \{1, \ldots, n\}$. Jest to system jednostopniowy, tzn. każdy z wyrobów wymaga obróbki tylko na jednej jednostce $l \in L$, przy czym zwykle istnieje możliwość wyboru jednostki do realizacji zadania. W zależności od rodzaju jednostek wytwórczych różny jest czas obróbki wyrobów. Czas dostępności poszczególnych jednostek wytwórczych jest ograniczony.

Opracowanie harmonogramu produkcji na najbliższe T okresów czasowych wymaga ustalenia terminów produkcji poszczególnych wyrobów, określenia wielkości porcji produkcyjnych oraz przydziału porcji wyrobów do jednostek wytwórczych w celu zaspokojenia zapotrzebowań na wyroby w każdym okresie oraz minimalizacji łącznych kosztów. Zadanie programowania matematycznego będące uproszczonym modelem powyższego problemu harmonogramowania jest postaci

Problem P

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{l \in L} f_{ilt}(x_{il}(t)) + h_{it} I_i(t) \right] \tag{1}$$

przy ograniczeniach

$$I_i(t-1) + \sum_{l \in L} x_{il}(t) - I_i(t) = d_{it} \qquad i \in N; t = 1, \ldots, T \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{il} x_{il}(t) \le Q_{lt} \qquad l \in L; t = 1, \ldots, T \tag{3}$$

$$0 \le x_{il}(t) \qquad i \in N; l \in L; t = 1, \ldots, T \tag{4}$$

$$0 \le I_i(t) \le \bar{I}_{it} \qquad i \in N; t = 1, \ldots, T-1 \tag{5}$$

$$I_i(0) = 0, \quad I_i(T) = 0 \qquad i \in N \tag{6}$$

przy czym zmiennymi decyzyjnymi są: $x_{il}(t)$ - wielkość produkcji wyrobu i w jednostce wytwórczej l w okresie t; $I_i(t)$ - stan zapasu wyrobu i na koniec okresu t. Parametrami zadania są: h_{it} - koszt magazynowania jednostki wyrobu i w okresie t; d_{it} - zapotrzebowanie na wyrób i w okresie t; $\bar{I}_{it}$ - maksymalny dopuszczalny poziom zapasów wyrobu i na koniec okresu t; Q_{lt} - czas dostępności jednostki wytwórczej l w okresie t; p_{il} - czas produkcji jednostki wyrobu i w jednostce wytwórczej l w okresie t (będziemy używać oznaczenia $p_{il} = \infty$ w sytuacji, gdy na jednostce wytwórczej l nie może być wytwarzany wyrób i). Funkcja f_{ilt} opisuje koszty produkcji wyrobów i w jednostce wytwórczej l w okresie t. Jako f_{ilt} zazwyczaj przyjmowana jest funkcja nieciągła postaci

$$f_{ilt}(x_{il}(t)) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x_{il}(t) = 0, \\ s_{ilt} + c_{ilt} x_{il}(t) & \text{gdy } x_{il}(t) > 0 \end{cases}$$

gdzie s_{ilt} jest kosztem wznowienia produkcji, a c_{ilt} jest jednostkowym kosztem produkcji. Warto zaznaczyć, że do powyższej postaci sformułowania można sprowadzić także zadania harmonogramowania, w których dolne ograniczenia na poziom zapasów (tzw. zapasy bezpieczeństwa) w nierównościach (5) są większe od zera. W tym celu należy przeprowadzić regularyzację modelu opisaną w pracy [10].

Problem P jest problemem $\mathcal{NP}$-trudnym nawet w szczególnych, stosunkowo prostych przypadkach (patrz [3]) i osiąga zwykle duże wymiary. Posługiwanie się szczegółowymi modelami jest ze względów obliczeniowych praktycznie niemożliwe, zaś z metodologicznego punktu widzenia niecelowe, skoro problem P jest elementem planowania taktycznego, a uszczegółowienie harmonogramów następuje na poziomie planowania operacyjnego. Stosowane są więc modele zagregowane konstruowane najczęściej w oparciu o podobieństwo technologiczne wyrobów oraz podobieństwo jednostek wytwórczych.

3. Agregacja wyrobów podobnych

W praktyce przemysłowej wiele wyrobów charakteryzuje się bardzo dużym podobieństwem, różniąc się między sobą jedynie drobnymi detalami, np. wykończeniem, wyposażeniem, kolorem itp., decydującymi o wersji danego wyrobu. Podobieństwo to wyraża się zarówno w strukturze wyrobów, jak również w kosztach produkcji i magazynowania oraz czasach produkcji na poszczególnych jednostkach wytwórczych. Przyjmijmy, że zbiór wszystkich wyrobów N można podzielić na rozłączne grupy (rodziny) wyrobów N_k, $k \in K$, które charakteryzują się następującymi właściwościami

$$h_{it} = H_{kt},\ p_{il} = P_{kl} \qquad \forall\, i \in N_k; \tag{7}$$

Powyższy warunek oznacza, że wyroby danej rodziny N_k mają jednakowe koszty magazynowania równe H_{kt} oraz jednakowe czasy produkcji równe P_{kl}. Traktując wyroby podobne w sposób łączny, tzn. wprowadzając zmienne zagregowane

$$X_{kl}(t) = \sum_{i\in N_k} x_{il}(t),\ F_k(t) = \sum_{i\in N_k} I_i(t) \qquad k \in K; l \in L; t = 1,\ldots,T \tag{8}$$

można przy założeniu (7) zaproponować model zagregowany postaci

Problem $A1$

$$\min \sum_{t=1}^{T}\sum_{k\in K}\left[\sum_{l\in L} g_{klt}(X_{kl}(t)) + H_{kt}F_k(t)\right] \tag{9}$$

przy ograniczeniach

$$F_k(t-1) + \sum_{l\in L} X_{kl}(t) - F_k(t) = D_{kt} \qquad k \in K; t = 1,\ldots,T \tag{10}$$

$$\sum_{k\in K} P_{kl}X_{kl}(t) \le Q_{lt} \qquad l \in L; t = 1,\ldots,T \tag{11}$$

$$0 \le X_{kl}(t) \qquad k \in K; l \in L; t = 1,\ldots,T \tag{12}$$

$$0 \le F_k(t) \le \overline{F}_{kt} \qquad k \in K; t = 1,\ldots,T-1 \tag{13}$$

$$F_k(0) = 0,\quad F_k(T) = 0 \qquad k \in K \tag{14}$$

przy czym $D_{kt} = \sum_{i\in N_k} d_{it}$, $\overline{F}_k(t) = \sum_{i\in N_k} \overline{I}_{it}$, a funkcja $g_{klt}(X_{kl}(t))$ reprezentuje koszty zagregowane $\sum_{i\in N_k} f_{ilt}(x_{il}(t))$.

Ograniczenia modelu $A1$ uzyskano w wyniku zsumowania ograniczeń modelu P dla każdej grupy N_k i wprowadzenia zmiennych zagregowanych zdefiniowanych zależnością (8). Stąd wynika, że jeżeli $(x_{il}(t), I_i(t))$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemu P, to $X_{kl}(t) = \sum_{i\in N_k} x_{il}(t)$, $F_k(t) = \sum_{i\in N_k} I_i(t)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym problemu $A1$. Z praktycznego punktu widzenia interesujące jest pytanie, czy zachodzi odwrotna właściwość, czyli czy każde rozwiązanie zagregowane można zdezagregować.

Aby zdezagregować dopuszczalne rozwiązanie $(X_{kl}(t), F_k(t))$ problemu $A1$, należy znaleźć rozwiązanie spełniające (2), (4), (5), (6) i (8), tzn. dla każdego $k \in K$ rozwiązać problem

Problem $D1_k$, $k \in K$

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in N_k} \left[\sum_{l \in L} f_{ilt}(x_{il}(t)) + h_{it} I_i(t) \right] \tag{15}$$

przy ograniczeniach

$$I_i(t-1) + \sum_{l \in L} x_{il}(t) - I_i(t) = d_{it} \qquad i \in N_k; t = 1, \ldots, T \tag{16}$$

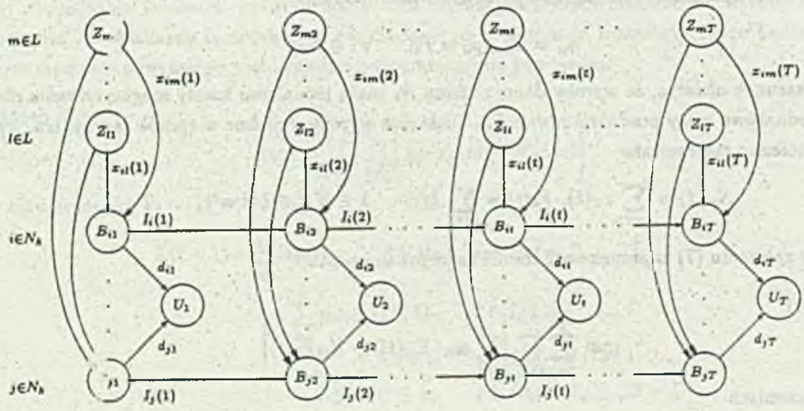
$$0 \le x_{il}(t) \qquad i \in N_k; l \in L; t = 1, \ldots, T \tag{17}$$

$$0 \le I_i(t) \le \overline{I}_{it} \qquad i \in N_k; t = 1, \ldots, T-1 \tag{18}$$

$$I_i(0) = 0, \quad I_i(T) = 0 \qquad i \in N_k \tag{19}$$

$$\sum_{i \in N_k} x_{il}(t) = X_{kl}(t) \qquad i \in N_k; l \in L; t = 1, \ldots, T \tag{20}$$

Odpowiada to znalezieniu najtańszego przepływu w sieci przedstawionej na rys.1. W sieci tej luki (Z_{lt}, B_{it}),



Rys. 1. Sieć dezagregacji $SD1_k$ dla podproblemu $D1_k$
Fig. 1. The disaggregation network $SD1_k$ for the subproblem $D1_k$

$(B_{it}, B_{i,t+1})$, (B_{it}, U_t) odpowiadają odpowiednio zmiennym $x_{il}(t), I_i(t)$ ograniczonym zgodnie z (17), (18) oraz zapotrzebowaniom d_{it}. Wierzchołki B_{it} reprezentują ograniczenia (16). Wierzchołki Z_{lt} są źródłami o zadanych wypływach $X_{kl}(t)$ i reprezentują ograniczenia (20). Będziemy mówili, że rozwiązanie problemu $A1$ można zdezagregować, jeżeli dla każdego $k \in K$ problem $D1_k$ ma rozwiązanie dopuszczalne. Okazuje się, że w ogólnym przypadku mogą istnieć rozwiązania problemu $A1$, których nie można zdezagregować. Pokazuje to poniższy przykład. W rozdziale 5 pokażemy, że można sformułować warunki konieczne i dostateczne istnienia dopuszczalnej dezagregacji dla tego i podobnych problemów.

Przykład 1. Rozważmy przykład problemu P, w którym: $T = 3$, $N = N_1 = \{1, 2\}$, $L = 1$, $Q_{1t} = \infty$ dla każdego $i = 1, 2$; $t = 1, 2, 3$ oraz $\overline{I}_{11} = \overline{I}_{12} = \overline{I}_{21} = \overline{I}_{22} = 4$ i $d_{11} = d_{21} = d_{13} = d_{23} = 2$, $d_{12} = 7$, $d_{22} = 1$. Po agregacji wyrobów 1 i 2 otrzymujemy zadanie, w którym $\overline{F}_{1t} = 8$ dla $t = 1, 2$ oraz $D_{11} = 4$,

$D_{13} = 4$, $D_{12} = 8$. Zauważmy, że rozwiązanie $X_{11}(1) = 12$, $X_{11}(2) = 0$, $X_{11}(3) = 4$ jest dopuszczalne dla zadania zagregowanego, ale nie da się go zdezagregować (nie ma możliwości zaspokojenia zapotrzebowania $d_{12} = 7$).

4. Agregacja jednostek produkcyjnie jednorodnych

Po przeprowadzeniu agregacji wyrobów dalsze uproszczenie modelu zadania jest często możliwe poprzez agregację jednostek wytwórczych. W tym celu wsród zbioru jednostek wytwórczych L wyróżnimy jednostki podobne, charakteryzujące się produkcyjną jednorodnością.

Definicja 1. *Jednostki wytwórcze l, m są produkcyjnie jednorodne, jeżeli współczynniki p_{il} i p_{im} są wzajemnie proporcjonalne, tzn. istnieje współczynnik proporcjonalności $\beta_{l,m}$ taki, że dla każdego $i \in N$ zachodzi $p_{il} = \beta_{lm} p_{im}$ albo też $p_{il} = \infty$ lub $p_{im} = \infty$.*

Dokonajmy podziału zbioru jednostek wytwórczych L na podzbiory L^r, $r \in R$ jednostek produkcyjnie jednorodnych. Dla uproszczenia przyjmiemy, że współczynniki β są równe 1, tzn. dla każdej grupy L^r, $r \in R$ zachodzi

$$\text{jeżeli } p_{il} < \infty \text{ , to } p_{il} = P_{kl} = P_k^r \qquad \forall i \in N_k; l \in L^r \tag{21}$$

co można zawsze uzyskać odpowiednio skalując ograniczenia (11). Ponieważ $X_{kl}(t) = 0$ gdy $P_{kl} = \infty$, więc sumując ograniczenia (11) dla każdej z grup jednostek produkcyjnie jednorodnych L^r i wprowadzając zmienne

$$X_k^r(t) = \sum_{l \in L^r} X_{kl}(t) \qquad k \in K; r \in R; t = 1, \dots, T \tag{22}$$

uzyskujemy z $A1$ model bardziej zagregowany

Problem $A2$

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{k \in K} \left[\sum_{r \in R} G_{kt}^r(X_k^r(t)) + H_{kt} F_k(t) \right] \tag{23}$$

przy ograniczeniach

$$F_k(t-1) + \sum_{r \in R} X_k^r(t) - F_k(t) = D_{kt} \qquad k \in K; t = 1, \dots, T \tag{24}$$

$$\sum_{k \in K} P_k^r X_k^r(t) \le \sum_{l \in L^r} Q_{lt} \qquad r \in R; t = 1, \dots, T \tag{25}$$

$$0 \le X_k^r(t) \qquad k \in K; t = 1, \dots, T \tag{26}$$

$$0 \le F_k(t) \le \overline{F}_{kt} \qquad k \in K; t = 1, \dots, T-1 \tag{27}$$

$$F_k(0) = 0, \quad F_k(T) = 0 \qquad k \in K \tag{28}$$

gdzie G_{kt}^r jest pewną zagregowaną funkcją reprezentującą koszty $\sum_{l \in L^r} g_{klt}(X_{kl}(t))$. Ze sposobu konstrukcji modelu $A2$ wynika, że każde rozwiązanie dopuszczalne problemu $A1$ jest przekształcane przez (22) w dopuszczalne rozwiązanie problemu $A2$. Pojawia się znowu pytanie o możliwość dezagregacji rozwiązania problemu $A2$. Dezagregacja wymaga, aby były spełnione ograniczenia (11), (12) i (22). Zdefiniujmy

$$L_k^r = \{l \mid l \in L^r, P_{kl} < \infty\} \text{ oraz } K_l = \{k \mid k \in K, P_{kl} < \infty\} \tag{29}$$

i wprowadźmy zmienne $y_{kl}(t) = P_{kl} X_{kl}(t)$ dla $k \in K, l \in L_k^r$. Zadanie dezagregacji można wtedy sformułować następująco (patrz [11]):

Problem $D2_{rt}, r \in R; t = 1, \ldots, T$

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{l \in L^r} g_{klt}(y_{kl}(t)/P_{kl}) \tag{30}$$

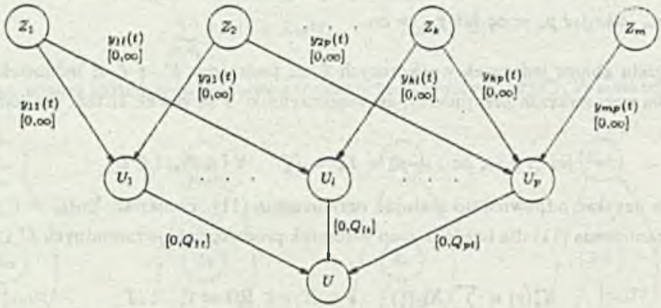
przy ograniczeniach

$$\sum_{k \in K_l} y_{kl}(t) \le Q_{lt} \qquad l \in L^r; \tag{31}$$

$$0 \le y_{kl}(t) \qquad k \in K; l \in L^r \tag{32}$$

$$\sum_{l \in L_k^r} y_{kl}(t) = P_{kl} X_k^r(t) \qquad k \in K \tag{33}$$

Sieć dezagregacji dla problemu $D2_{rt}$ jest przedstawiona na rys. 2. W sieci tej łuki (Z_k, U_l), $k \in K, l \in L^r$ odpowiadają zmiennym $y_{kl}(t)$, natomiast wierzchołki Z_k, $k \in K$ i U_l, $l \in L^r$ reprezentują odpowiednio ograniczenia (33) i (31). Wypływ z wierzchołka źródłowego Z_k jest równy $P_k^r X_k^r(t)$.



Rys. 2. Sieć dezagregacji $SD2_{rt}$ dla podproblemu $D2_{rt}$. W nawiasach kwadratowych podano dolne i górne ograniczenia przepływów łukowych

Fig. 2. The disaggregation network $SD2_{rt}$ for the subproblem $D2_{rt}$. The lower and upper bounds on the arc flows are given in the square brackets

Poniższy przykład pokazuje, że mogą istnieć rozwiązania problemu $A2$, których nie można zdezagregować w rozwiązania problemu $A1$. Warunki konieczne i dostateczne zapewniające możliwość dezagregacji są formułowane w rozdziale 5.

Przykład 2. Rozważmy przykład zadania $A1$, w którym w danym okresie t produkowane są 2 wyroby na 2 jednostkach wytwórczych o dostępnym czasie produkcji $Q_{1t} = 2$, $Q_{2t} = 3$. Czasy wytwarzania wyrobów są następujące $P_{11} = P_{21} = P_{12} = 1$ oraz $P_{22} = \infty$. Zatem ograniczenia (11) mają postać

$X_{11}(t) + X_{21}(t) \le 2$, $\qquad X_{12}(t) \le 3$.

Po agregacji i wprowadzeniu zmiennych $X_1(t) = X_{11}(t) + X_{12}(t)$, $X_2(t) = X_{21}(t)$ otrzymujemy zadanie $A2$ z ograniczeniami (25) postaci

$X_1(t) + X_2(t) \le 5$

Zauważmy, że rozwiązanie $X_1(t) = 0$, $X_2(t) = 5$ spełnia to ograniczenie, ale nie można go zdezagregować.

5. Konstrukcja regularnych modeli zagregowanych

W tym rozdziale zajmiemy się określaniem zunifikowanych warunków gwarantujących dopuszczalność dezagregacji dla problemów $A1$ i $A2$. Przedstawiona metodologia może być wykorzystywana przy formułowaniu takich warunków także dla innych podobnych problemów, w których dezagregacja sprowadza się do rozwiązania zadania znalezienia najtańszego przepływu w pewnej sieci.

Niech dana będzie sieć dezagregacji SD składająca się ze zbioru wierzchołków V i zbioru łuków E, w których przepływ jest ograniczony od dołu i od góry wartościami $l(e)$ i $c(e), e \in E$. Dla uproszczenia będziemy zakładać, że $l(e) = 0$ dla każdego $e \in E$. Wśród wierzchołków sieci będziemy wyróżniać źródła $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ i ujścia $U_1, U_2, \ldots, U_p$. Z każdego źródła Z_i zadana jest wielkość wypływu X_i, przy czym wielkości X_i odpowiadają wartościom zmiennych zagregowanych otrzymanych w wyniku rozwiązania zadania zagregowanego. Takimi sieciami są np. sieci $SD1_k$ i $SD2_{rt}$ przedstawione na rys. 1 i 2. Aby sformułować warunki gwarantujące dopuszczalność dezagregacji, należy odpowiedzieć na pytanie, jakie warunki muszą spełniać zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_m$, aby istniał przepływ dopuszczalny w sieci SD. W tym celu wprowadźmy do sieci SD dodatkowy wierzchołek Z oraz łuki łączące ten wierzchołek ze wszystkimi źródłami Z_i. Ustalmy dolne ograniczenia przepływu w tych łukach zerowe, natomiast górne równe: $c(Z, Z_i) = X_i$, $i = 1, \ldots, m$. Podobnie wprowadźmy też wierzchołek U, jeżeli w sieci SD występuje więcej niż jedno ujście. Dla łuków łączących poszczególne ujścia U_l z wierzchołkiem U przyjmijmy nieograniczone przepustowości. Tak zmodyfikowaną sieć oznaczymy przez SD^*. Zauważmy teraz, że dezagregacja jest możliwa wtedy i tylko wtedy, gdy maksymalny przepływ z wierzchołka Z do U jest równy $\sum_{i=1}^{m} X_i$. Z kolei ze znanych właściwości zadań sieciowych wynika, że wielkość ta musi być nie większa niż przepustowość każdego przekroju w sieci SD^*. Fakt ten zapiszemy w postaci twierdzenia 1.

Niech S oznacza taki podzbiór wierzchołków V^* sieci SD^*, że $Z \in S$ i $U \notin S$ oraz niech $\overline{S}$ będzie dopełnieniem zbioru S, tzn. $\overline{S} = V^* \setminus S$. Ponadto niech $(S, \overline{S})$ oznacza przekrój generowany przez S w sieci SD^*, czyli zbiór łuków łączących wierzchołki ze zbioru S z wierzchołkami ze zbioru $\overline{S}$. Oznaczmy $c(S, \overline{S}) = \sum_{e \in (S, \overline{S})} c(e)$. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Rozwiązanie dopuszczalne (X_i) problemu zagregowanego można zdezagregować wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego przekroju $(S, \overline{S})$ w sieci SD^* zachodzi $\sum_{i=1}^{m} X_i \leq c(S, \overline{S})$.*

Dowód. Twierdzenie wynika bezpośrednio z faktu, że problem dezagregacji sprowadza się do zadania znalezienia maksymalnego przepływu w sieci SD^* oraz ze znanego twierdzenia stanowiącego, że wartość maksymalnego przepływu jest równa przepustowości minimalnego przekroju (patrz np. [6] na s. 22). □

Zauważmy, że w twierdzeniu 1 wystarczy rozpatrywać tylko przekroje $(S, \overline{S})$, które są wyznaczane przez zbiory S i $\overline{S}$ generujące spójne podgrafy w sieci SD^*. Takie przekroje będziemy nazywać spójnymi. Inne przekroje będą zawsze dawały większe wartości wielkości $c(S, \overline{S})$. Precyzyjne sformułowanie warunków dopuszczalnej dezagregacji wymaga więc analizy wszystkich spójnych przekrojów w sieci SD^*, co dla złożonych sieci może być praktycznie nierealne. W przypadku sieci o regularnej strukturze lub takiej, w której większość łuków ma nieograniczone górne przepustowości, liczba istotnych przekrojów często bywa umiarkowana i udaje się dla tych przypadków sformułować warunki dopuszczalnej dezagregacji. Takimi przykładami są sieci $SD1_k$ i $SD2_{rt}$.

Rozpatrzymy najpierw przypadek sieci $SD2_{rt}$ z rys. 2. Dodajmy do niej wierzchołek Z i łuki łączące go z wierzchołkami $Z_1, \ldots, Z_m$ tworząc w ten sposób rozszerzoną sieć $SD2^*_{rt}$. Przepustowości łuków (Z, Z_k), $k = 1, \ldots, m$ przyjmijmy jako równe $P^r_k X^r_k(t)$. W sieci $SD2^*_{rt}$ zachodzi $c(S, \overline{S}) < \infty$ tylko wtedy, gdy przekrój $(S, \overline{S})$ zawiera jedynie łuki (Z, Z_k) lub (U_l, U). Spróbujemy teraz określić wszystkie spójne przekroje sieci $SD2^*_{rt}$ o ograniczonych przepustowościach. Niech $(S, \overline{S})$ będzie dowolnym spójnym przekrojem sieci $SD2^*_{rt}$ takim, że $c(S, \overline{S}) < \infty$. Dla tego przekroju zdefiniujmy zbiór $J = \{l \mid (U_l, U) \in (S, \overline{S}), l \in L^r\}$. Ponadto niech K_J będzie zbiorem tych rodzin wyrobów, które mogą być produkowane wyłącznie przez jednostki wytwórcze ze zbioru J. Z powyższych definicji zbiorów J i K_J wynika, że skoro przekrój $(S,\overline{S})$ jest spójny, to luki (Z,Z_k) dla $k \in K_J$ nie mogą do niego należeć. Natomiast musi zachodzić $(Z,Z_k) \in (S,\overline{S})$ dla każdego $k \in K \setminus K_J$, gdyż $Z \in S$, a ponieważ z definicji zbiorów J i K_J wszystkie wierzchołki U_l, z którymi jest połączony wierzchołek Z_k, $k \in K \setminus K_J$ należą do $\overline{S}$, więc również musi być $Z_k \in \overline{S}$ (przy założeniu, że $c(S,\overline{S}) < \infty$).

Zatem na podstawie twierdzenia 1 oraz faktu, że $K = \{1,...,m\}$, wnioskujemy, że rozwiązanie $X_k^r(t)$, $k \in K$ można zdezagregować, jeżeli

$$\sum_{k\in K} P_k^r X_k^r(t) \leq \sum_{l\in J} Q_{lt} + \sum_{k\in K\setminus K_J} P_k^r X_k^r(t) \qquad J \subseteq L^r \tag{34}$$

Wniosek 1. *Rozwiązanie dopuszczalne $(X_k^r(t))_{k\in K, r\in R, t=1,...,T}$ problemu A2 można zdezagregować w dopuszczalne rozwiązanie problemu A1 wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek*

$$\sum_{k\in K_J} P_k^r X_k^r(t) \leq \sum_{l\in J} Q_{lt} \qquad \forall\, J \subseteq L^r,\ r \in R,\ t = 1,...,T \tag{35}$$

Wniosek ten dokładnie odpowiada rezultatowi uzyskanemu w pracy [11] przy zastosowaniu innej techniki dowodzenia.

W analogiczny sposób można sformułować warunki gwarantujące dopuszczalność dezagregacji rozwiązań problemu $A1$. W celu konstrukcji sieci SD^* dla tego przypadku modyfikujemy sieć $SD1_k$ z rys. 1 wprowadzając wierzchołki Z i U oraz łuki (Z,Z_{lt}) i (U_t,U), $l \in L; t = 1,...,T$ z przepustowościami odpowiednio $[0, X_{kl}(t)]$ i $[0,\infty]$. Ponadto przyjmujemy, że przepustowości pozostałych łuków (Z_{lt}, B_{it}), $(B_{it}, B_{i,t+1})$, (B_{it}, U_t) są równe odpowiednio $[0,\infty]$, $[0,\overline{I}_{it}]$, $[0,d_{it}]$. W sieci tej można ograniczyć liczbę istotnych spójnych przekrojów, jeżeli zauważy się, że

(a) jeżeli $Z_{lt} \in S$ i $B_{it} \in \overline{S}$, to $c(S,\overline{S}) = \infty$,

(b) jeżeli istnieją $l, m \in L$ takie, że $Z_{lt} \in S$ i $Z_{mt} \in \overline{S}$, to $c(S,\overline{S}) = \infty$.

Punkt (b) wynika z faktu, że skoro $Z_{mt} \in \overline{S}$ i przekrój $(S,\overline{S})$ ma być spójny, to istnieje takie $i \in N_k$, że $B_{it} \in \overline{S}$, a ponieważ $Z_{lt} \in S$, więc na podstawie (a) mamy $c(S,\overline{S}) = \infty$. Przekroje sieci $SD1_k^*$, które są spójne i ograniczone, będą więc się składały z łuków (B_{it}, U_t), $(B_{it}, B_{i,t+1})$ i (Z, Z_{lt}), przy czym w każdym takim przekroju $(S,\overline{S})$ zachodzą następujące relacje:

(c) jeżeli $(B_{it}, U_t) \in (S,\overline{S})$ i $(B_{i,t+1}, U_{t+1}) \notin (S,\overline{S})$, to $(B_{it}, B_{i,t+1}) \in (S,\overline{S})$,

(d) jeżeli $(Z, Z_{mt}) \notin (S,\overline{S})$ dla pewnego $m \in L$, to z (b) wynika, że $(Z, Z_{lt}) \notin (S,\overline{S})$ dla każdego $l \in L$ oraz $(B_{it}, U_t) \in (S,\overline{S})$ dla każdego $i \in N_k$.

Na podstawie powyższych właściwości oraz twierdzenia 1 można więc podać następujące warunki dopuszczalnej dezagregacji

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{l\in L} X_{kl}(t) \leq A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + \ldots + A_u + B_u + A_{u+1} \tag{36}$$

gdzie

$$A_j = \sum_{i\in N_k} \Big(\sum_{t=v_j}^{w_j} d_{it} + \overline{I}_{i,w_j} \Big) \quad , \ j = 1,\ldots,u+1 \tag{37}$$

$$B_j = \sum_{t=\tau_j}^{\sigma_j} \sum_{l\in L} X_{kl}(t) \quad , \ j = 1,\ldots,u \tag{38}$$

przy czym ograniczeń (36) jest tyle, ile jest różnych kombinacji parametrów $u, v_{ij}, w_{ij}, r_j, s_j$ spełniających warunki

$$1 \le u \le T, \quad v_{i1} = 1,\ w_{i,u+1} = T, \quad r_j \le s_j \quad \text{oraz}$$
$$0 \le r_1 - 1 \le w_{i1} < v_{i2} \le s_1 + 1 \le r_2 - 1 \le w_{i2} < \ldots < v_{i,u+1} \le s_u + 1 \le T + 1.$$

Gdy $r_1 = 1$, to przyjmujemy $A_1 = 0$, podobnie gdy $s_u = T$ to $A_{u+1} = 0$.

Okazuje się, że w rzeczywistości znaczna część ograniczeń (36) jest redundancyjna. Można pokazać, że do pełnego opisu warunków dopuszczalnej dezagregacji wystarczą tylko ograniczenia, w których $u = 1$, czyli ograniczenia postaci

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{l\in L} X_{kl}(t) \le \sum_{i\in N_k}\left(\sum_{t=1}^{w_i} d_{it} + \overline{I}_{w_i}\right) + \sum_{t=r}^{s}\sum_{l\in L} X_{kl}(t) + \sum_{i\in N_k}\sum_{t=v_i}^{T} d_{it} \tag{39}$$

gdzie $k \in K$, $r \le s$ oraz $0 \le r - 1 \le w_i < v_i \le s + 1 \le T + 1$. Ograniczenia (36) dla $u > 1$ i zadanych parametrów $\widehat{v}_{ij}, \widehat{w}_{ij}, \widehat{r}_j, \widehat{s}_j$, $i \in N_k, j = 1, \ldots, u$ uzyskujemy bowiem w wyniku zsumowania stronami ograniczeń (39) kolejno dla $r = \widehat{r}_1$, $s = \widehat{s}_1$, $w_i = \widehat{w}_{i1}$, $v_i = \widehat{v}_{i2}$, potem $r = \widehat{r}_2$, $s = \widehat{s}_2$, $w_i = \widehat{w}_{i2}$, $v_i = \widehat{v}_{i3}$ itd., aż do $r = \widehat{r}_u$, $s = \widehat{s}_u$, $w_i = \widehat{w}_{iu}$, $v_i = \widehat{v}_{i,u+1}$, a następnie odjęcia stronami $u - 1$ razy równania $\sum_{t=1}^{T}\sum_{l\in L} X_{kl}(t) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in N_k} d_{it}$.

Wykorzystując fakt, że $\sum_{t=1}^{T}\sum_{l\in L} X_{kl}(t) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in N_k} d_{it}$, warunek (39) można zapisać w równoważnej postaci podanej we wniosku 2 (por. [7]).

Wniosek 2. *Rozwiązanie dopuszczalne $(X_{kl}(t))_{k\in K, l\in L, t=1,\ldots,T}$ problemu A1 można zdezagregować w dopuszczalne rozwiązanie problemu P wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek*

$$\sum_{t=r}^{s}\sum_{l\in L} X_{kl}(t) \ge \sum_{i\in N_k} \max_{r-1\le w<v\le s+1} \left(0, \sum_{t=w+1}^{v-1} d_{it} - \overline{I}_{iw}\right) \tag{40}$$

dla każdego $k \in K$ oraz r, s, $1 \le r \le s \le T$.

Będziemy mówili, że model zagregowany jest *regularny*, jeżeli każde jego rozwiązanie dopuszczalne można zdezagregować. Aby więc zregularyzować modele A1 i A2, należy do pierwszego z nich dołączyć ograniczenia (40), a do drugiego ograniczenia (35). W podobny sposób można wyprowadzić warunki regularnej agregacji dla bardziej złożonych przypadków zadań, np. uwzględniających ograniczenia na maksymalne wielkości porcji produkcyjnych [8].

Przy formułowaniu twierdzenia 1 zakładaliśmy, że dolne ograniczenia na przepływ w łukach sieci SD są zerowe. Gdy $l(e) > 0$ dla pewnych $e \in E$ w sieci SD, to problem znalezienia w niej dopuszczalnego przepływu można również sprowadzić do zadania znalezienia maksymalnego przepływu w pewnej rozszerzonej sieci SD', w której $l'(e) = 0$ dla każdego $e \in E'$ (patrz [6]). Warunki gwarantujące dopuszczalność dezagregacji uzyskujemy wówczas na podstawie analizy przekrojów sieci SD'.

6. Podsumowanie

W pracy pokazano, że typowy schemat agregacji w ogólnym przypadku prowadzi do modeli relaksacyjnych. Nie ma wtedy gwarancji, że rozwiązanie problemu zagregowanego będzie można zdezagregować. W przypadku gdy dezagregacja przeprowadzana jest w oparciu o proste modele sieciowe, to analizując przekroje sieci można sformułować warunki gwarantujące dopuszczalność dezagregacji, a na tej podstawie zaproponować regularny model zagregowany. Podstawową zaletą regularnych modeli zagregowanych jest fakt, że każde ich rozwiązanie można zdezagregować. Główna wada to konieczność uwzględnienia dodatkowych ograniczeń, których liczba w ogólnym przypadku zależy w sposób wykładniczy od liczby zmiennych zagregowanych. Tylko w niewielu przypadkach regularyzacja modelu nie powoduje wzrostu jego wymiarowości (patrz [10]). Konieczność uwzględnienia dodatkowych ograniczeń powoduje, że w praktyce regularne modele często nie mogą być w sposób bezpośredni stosowane. Są one jednak źródłem wielu cennych informacji, które mogą być wykorzystywane do formułowania prostszych modeli zagregowanych, np. modeli restrykcyjnych [7, 12] lub do konstrukcji iteracyjnych schematów agregacji [8, 11, 12].

Literatura

[1] Ari E.A., Axsäter S.: Disaggregation Under Uncertainty in Hierarchical Production Planning. *European Journal of Operational Research* 35, 182-186, 1988.

[2] Axsäter S.: On the Feasibility of Aggregate Production Plans. *Operations Research* 34, 796-800, 1986.

[3] Bahl H.C., Ritzman L.P., Gupta J.N.D.: Determining Lot Sizes and Resource Requirements: A Review. *Operations Research* 35, 329-345, 1987.

[4] Bitran G.R., Haas E.A., Hax A.C.: Hierarchical Production Planning: A Single Stage System. *Operations Research* 29, 717-743, 1981.

[5] Erschler J., Fontan G., Merce C.: Consistency of the Disaggregation Process in Hierarchical Planning. *Operations Research* 34, 464-469, 1986.

[6] Ford L.R., Fulkerson D.R.: *Przepływy w sieciach*. PWN, Warszawa, 1969.

[7] Pieńkosz K., Toczyłowski E.: Warunki idealnej dezagregacji wyrobów w systemach jednostopniowych z ograniczonymi magazynami. *Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Automatyka* 100, 223-231, 1990.

[8] Pieńkosz K.: Agregacja zadań harmonogramowania przy występowaniu ograniczeń na wielkość porcji produkcyjnych. *Materiały z II Krajowej Konferencji Badań Operacyjnych i Systemowych, tom Optymalizacja*, 63-70, Warszawa, 1991.

[9] Rogers D.F., Plante R.D., Wong R.T., Evans J.R.: Aggregation and Disaggregation Techniques and Methodology in Optimization. *Operations Research* 39, 553-582, 1991.

[10] Toczyłowski E.: On Aggregation of Items in the Single-Stage Lot Size Scheduling Problem. *Large Scale Systems* 10, 157-164, 1986.

[11] Toczyłowski E.: Aggregation of Resource Constraints for Groups of Similar Components in Manufacturing Systems. *IMA Journal of Mathematics Applied in Business & Industry* 2, 1-15, 1989.

[12] Toczyłowski E.: *Niektóre metody strukturalne optymalizacji do sterowania w dyskretnych systemach wytwarzania*. WNT, Warszawa, 1989.

Recenzent: Prof.dr h.inż. Andrzej Świerniak

Wpłynęło do Redakcji do 30.04.1992 r.

Abstract:

The paper presents a methodology of regular aggregation of items and resources for solving lot-size scheduling problems in single-stage systems with parallel production units. In the system there is a set of parallel uniform production units which may produce groups of similar items in lots. Given demand for items and resource limitations, the scheduling problem is to find the production lots of items on parallel units over T periods so that the sum of the production, setup and inventory holding costs is minimized.

A unified approach for construction of the *regular* aggregated models, solutions of which can be always disaggregated into detailed feasible schedules, is given. In comparison to the typical aggregation models, the regular models must contain some additional constraints, which can be obtained from the disaggregation network.