ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992
Seria: AUTOMATYKA z. 109 Nr kol. 1175

Jarosław Sikorski
Instytut Badań Systemowych PAN

METODA PODZIAŁU I OSZACOWAŃ DLA WIELOWYMIAROWYCH ZADAŃ ZAŁADUNKU

A BRANCH AND BOUND METHOD FOR MULTIDIMENSIONAL KNAPSACK PROBLEMS

МЕТОД РАЗДЕЛА И ОГРАНИЧЕНИЙ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЗАГРУЗКИ РЮКЗАКА

Streszczenie: W pracy przedstawiono algorytm realizujący metodę podziału i oszacowań przeznaczony do rozwiązywania binarnych zadań załadunku z wieloma ograniczeniami (tzw. wielowymiarowych zadań załadunku). W algorytmie wykorzytywana jest szeroko relaksacja ograniczenia zastępczego, zarówno do uzyskiwania oszacowań w podproblemach, jak i do wyznaczenia pierwszego rozwiązania przybliżonego. Praca zawiera także omówienie wyników eksperymentu obliczeniowego.

Summary: An algorithm of branch and bound type for the solution of the 0-1 knapsack problem with multiple constraints (multidimensional knapsack problem) is presented in the paper. The surrogate constraint relaxation is intensively exploited for both calculating bounds in subproblems and finding an initial aproximate solution. The results of numerical experiment are also reported.

Резюме: В работе представлен алгоритм реализирующий метод раздела и ограничений, которой предназначен для решения бинарных задач загрузки рюкзака с многими ограничениями (т.н. многомерных задач загрузки). Алгоритм широко использует релаксацию заменяющего ограничения, как для получения оценок в подпроблемах, так и для определения первого приближенного решения.

1. Wprowadzenie

Metoda podziału i oszacowań jest uniwersalnym i powszechnie stosowanym schematem postępowania w algorytmach rozwiązywania zadań programowania całkowitoliczbowego. Koncepcja metody polega na stopniowym podziale pierwotnego zbioru rozwiązań dopuszczalnych na podzbiory, w obszarze których definiowane są tzw. podproblemy. Kolejne etapy podziału dokonywane są w taki sposób, że powstaje struktura zwana drzewem podproblemów; podproblem reprezentowany jest przez wierzchołek tego drzewa. Metoda jest tym efektywniejsza, im mniejsze drzewo wystarcza do znalezienia pierwotnego rozwiązania optymalnego. Rozwój drzewa podziału powstrzymywany jest poprzez tzw. kryteria zamykania wierzchołków. Zatem to ich siła w znacznym stopniu decyduje o skuteczności całej metody. Główne kryteria oparte są na rozwiązywaniu relaksacji podproblemów i uzyskiwaniu tą drogą oszacowań dla wartości optymalnych w podproblemach. W zasadzie im lepsze jest to oszacowanie i im częściej rozwiązanie relaksacji jest pierwotnie dopuszczalne, tym szybciej zatrzymywany jest rozwój drzewa podproblemów.

Wiele praktycznych problemów optymalizacji rozdziału zasobów (funduszy) rozkroju materiału lub pakowania towarów jest przedstawianych w postaci wielowymiarowego zadania załadunku. Od klasycznego zadania załadunku tzw. plecakowego różni się ono występowaniem więcej niż jednego ograniczenia.

Jak wykazano w wielu pracach (np.[2],[4],[5],[9],[12]), wykorzystanie relaksacji z ograniczeniem zastępczym prowadzi do oszacowań dla wartości optymalnych, które są ściślejsze od uzyskanych na podstawie innych zna-

nych relaksacji zadań całkowitoliczbowych. Relaksacja ta jest szczególnie przydatna w przypadku rozwiązywania metodą podziału i oszacowań zadań załadunku z wieloma ograniczeniami [4],[8], [10]. Zadanie zastępcze jest wtedy klasycznym zadaniem załadunku, dla którego opracowano efektywne w praktyce algorytmy rozwiązywania [3],[6],[11]. Poszukiwane oszacowanie wartości optymalnej w podproblemie wyznaczane jest poprzez rozwiązywanie dokładne lub przybliżone odpowiedniego zadania dualnego [2],[8],[10],[12].

2. Podstawowe sformułowania

Rozważmy binarne zadanie liniowe z wieloma ograniczeniami zwane dalej wielowymiarowym zadaniem załadunku:

$$v(P_0) = \max \left\{ cx \ : \ x \in F_0 \right\}, \qquad (P_0)$$

$$F_0 = \left\{ x \in Z^n \ : \ Ax \le b, \ x_i \in \langle 0,1 \rangle \text{ dla } i=1,\dots,n \right\},$$

gdzie $c \in Z_+^n$, A jest macierzą mxn o elementach $a_{ji} \in Z_+$ i $b \in Z_+^m$ (Z_+ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych).

Metoda podziału i oszacowań stosowana dla zadań binarnych oparta jest na podziale pierwotnego zbioru rozwiązań dopuszczalnych na podzbiory $F_j \subset F_0$ według schematu odpowiadającego drzewu binarnemu:

$$F_j = \left\{ x \ : \ Ax \le b, \ x_i = 0 \text{ dla } i \in I(0), \ x_i = 1 \text{ dla } i \in I(1), \ x_i \in \langle 0,1 \rangle \text{ dla } i \in I(-) \right\}.$$

Zbiory I(0) i I(1) zawierają indeksy zmiennych o ustalonej wartości (odpowiednio 0 i 1), a zbiór I(-) - indeksy tzw. zmiennych swobodnych.

Z każdym podzbiorem F_j związane jest zadanie

$$v(P_j) = \max \left\{ cx \ : \ x \in F_j \right\}, \qquad (P_j)$$

reprezentowane przez wierzchołek binarnego drzewa podziałów. Korzeniem drzewa jest zadanie pierwotne (P_0) ze zbiorem rozwiązań F_0. Na każdym etapie budowy drzewa zbiór F_j dzielony jest na <u>dwa</u> podzbiory poprzez wybranie jednej ze zmiennych swobodnych i ustalenie jej wartości na 0 dla jednego z tych podzbiorów i na 1 dla drugiego. Proces ten, który prowadzi do utworzenia dwóch wierzchołków potomnych, zwany jest rozgałęzianiem. Taki sposób budowania drzewa podproblemów (P_j) zapewnia spełnienie podstawowego dla całej metody warunku: na każdym etapie rozwoju drzewa suma zbiorów rozwiązań dopuszczalnych w liściach (tzn. wierzchołkach bez potomków) jest równa F_0. Dzięki temu zadanie maksymalizacji kryterium cx może być rozwiązywane oddzielnie na każdym z takich podzbiorów i porównanie uzyskanych rozwiązań prowadzi do wskazania rozwiązania optymalnego dla zadania pierwotnego (P_0).

Oznaczmy przez $s = |I(-)|$ moc zbioru zmiennych swobodnych. Przyjmijmy, że a^i oznacza i-tą kolumnę macierzy ograniczeń pierwotnych A ($a^i \in Z_+^m$). Ze zmiennymi, które zostały wskazane w zbiorze I(1), związany jest zmodyfikowany wektor prawych stron ograniczeń oraz wartość stałego kosztu:

$$\tilde{b} = b - \sum_{i \in I(1)} a^i \in Z^m_+, \qquad c(1) = \sum_{i \in I(1)} c_i.$$

Oznaczmy przez $\tilde{A}$ podmacierz złożoną z kolumn a^i o indeksach $i \in I(-)$, przez $\tilde{c}$ wektor złożony z odpowiadających im współczynników wektora pierwotnej funkcji celu oraz przez $\tilde{x}$ wektor utworzony przez zmienne swobodne. Przy przyjętych oznaczeniach zadanie (P_j) rozważane na pewnym etapie metody podziału i oszacowań jest wielowymiarowym zadaniem załadunku o postaci

$$v(P_j) = c(1) + \max \left\{ \tilde{c}\,\tilde{x} : \tilde{x} \in \tilde{F}_j \right\}, \qquad (P_j)$$

$$\text{gdzie } \tilde{F}_j = \left\{ \tilde{x} \in Z^s : \tilde{A}\,\tilde{x} \le \tilde{b},\ \tilde{x}_i \in \langle 0,1 \rangle \text{ dla } i \in I(-) \right\}.$$

Zawiera ono mniej zmiennych niż zadanie pierwotne ($s<n$ dla $j \ge 1$). Aby zdecydować o sposobie dalszego postępowania z analizowanym wierzchołkiem, wystarczy wyznaczyć górne oszacowanie dla wartości $v(P_j)$ i ewentualnie jedno z rozwiązań dopuszczalnych $\tilde{x} \in \tilde{F}_j$ (oczywiście przy założeniu, że $\tilde{F}_j \ne \emptyset$). Jeśli uda się takie rozwiązanie wyznaczyć, to po jego uzupełnieniu uzyskuje się dodatkowe rozwiązanie dopuszczalne dla zadania pierwotnego (P_0), które może okazać się lepsze od znalezionych poprzednio.

Drzewo podziału rozrasta się tylko poprzez takie wierzchołki, w których zbiór dopuszczalny F_j może zawierać rozwiązanie optymalne dla zadania (P_0). Wierzchołki, które nie mają tej cechy, są usuwane z listy wierzchołków do zbadania. Na każdym etapie rozwoju drzewa suma zbiorów dopuszczalnych dla wierzchołków z listy pokrywa ten fragment pierwotnego zbioru dopuszczalnego F_0 który zawiera pierwotne rozwiązanie optymalne. Aby analiza kolejnego wierzchołka z listy była możliwa od samego początku działania metody, należy wstępnie wyznaczyć przynajmniej jedno rozwiązanie dopuszczalne dla zadania pierwotnego. Oznaczmy odpowiadającą mu wartość funkcji celu przez $\underline{v}(P_0) = cx$, dla pewnego $x \in F_0$. Górne oszacowanie wartości optymalnej dla podproblemu w wierzchołku oznaczmy przez $\overline{v}(P_j)$. Jeżeli $\overline{v}(P_j) < \underline{v}(P_0)$, to dla wszystkich rozwiązań $x \in F_j$ zachodzi relacja

$$cx \le v(P_j) \le \overline{v}(P_j) < \underline{v}(P_0) \le v(P_0).$$

Zatem zbiór F_j nie zawiera pierwotnego rozwiązania optymalnego i może być wyłączony z dalszych poszukiwań. Odpowiadający mu wierzchołek usuwany jest z listy i nazywany jest zamkniętym - nie będzie już rozgałęziany i rozwój drzewa podziału na nim się kończy. Jeżeli relacja jest przeciwna, tzn. $\overline{v}(P_j) \ge \underline{v}(P_0)$, to zadanie (P_j) musi być dalej analizowane. Jeżeli przy okazji wyznaczania oszacowania górnego wskazano takie rozwiązanie dopuszczalne dla zadania (P_j), dla którego wartość $cx > \underline{v}(P_0)$, to należy je zapamiętać jako najlepsze ze znalezionych rozwiązań dla zadania (P_0) (bowiem $F_j \subset F_0$). Wartość funkcji celu dla tego rozwiązania staje się nowym poprawionym oszacowaniem dolnym dla $v(P_0)$. Zwiększane w ten sposób oszacowanie $\underline{v}(P_0)$ nazywane jest wartością odcinającą, gdyż wykorzystywane jest w podstawowych

kryteriach zamykania rozwoju drzewa podziału. Jeżeli w dodatku wyznaczone rozwiązanie jest optymalne dla (P_j), to taki wierzchołek także można zamknąć - zbiór F_j nie zawiera rozwiązań dla (P_o), które są lepsze od aktualnie znanego.

W przypadku gdy analiza wierzchołka nie umożliwiła jego zamknięcia, z aktualnego zbioru $I(-)$ wybierana jest zmienna rozgałęziająca. Za jej pomocą tworzone są dwa wierzchołki potomne według podanego wcześniej schematu. Dokonywany jest zatem drobniejszy podział i drzewo się rozrasta. Oba nowoutworzone wierzchołki umieszczane są na liście oczekujących do zbadania.

Kolejny krok metody rozpoczyna się od wybrania następnego wierzchołka z listy. Potem następuje jego analiza. Zamykanie i podział wierzchołków kontynuowane są, dopóki lista wierzchołków oczekujących na zbadanie nie stanie się pusta. Jej wyczerpanie oznacza, że wszystkie podzbiory, na które podzielono F_o, zostały zbadane i najlepsze ze znalezionych rozwiązań dopuszczalnych jest optymalne dla zadania pierwotnego (P_o). Zatem ostatnia z wyznaczonych wartości odcinających $\underline{v}(P_o) = v(P_o)$

3. Oszacowanie górne dla podproblemu

W metodach podziału i oszacowań stosowanych dla zadań dyskretnych oszacowania górne dla wartości optymalnych w wierzchołkach drzewa są wyznaczane poprzez rozwiązywanie różnych relaksacji podproblemów. Ścisłością oszacowań wyróżnia się wśród nich relaksacja z ograniczeniem zastępczym [2],[4],[9].

Dla danego mnożnika $\omega \in \mathbb{R}^m_+$ można zdefiniować relaksację zadania (P_j), która jest klasycznym zadaniem załadunku z jednym ograniczeniem:

$$h(\omega) = c(1) + \max \left\{ \tilde{c}\,\tilde{x} : \omega(\tilde{A}\,\tilde{x} - \tilde{b}) \le 0,\ \tilde{x} \text{ jak w } (P_j) \right\} \qquad (Z_j)$$

W ten sposób określona zostaje funkcja dualna $h: \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$. Pojedyncze ograniczenie w powyższym zadaniu nazywane jest zastępczym. Ze sposobu wprowadzenia relaksacji (Z_j) wynika, że $h(\omega) \ge v(P_j)$ dla każdego $\omega \in \mathbb{R}^m_+$. Zatem każda wartość funkcji dualnej może być używana jako górne oszacowanie wartości optymalnej w podproblemie.

Zadanie dualne ograniczenia zastępczego ma postać:

$$v(D_j) = \min \left\{ h(\omega) : \omega \in \mathbb{R}^m_+ \right\} \qquad (D_j)$$

Dla wartości optymalnych w zadaniach (P_j) i (D_j) zachodzi:

$$v(D_j) \ge v(P_j).$$

Zatem rozwiązanie zadania dualnego ograniczenia zastępczego najściślej oszacowuje od góry wartość optymalną w podproblemie. Równość $v(D_j) = v(P_j)$ może wystąpić wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^m_+$ i takie $\hat{x}$ dopuszczalne dla (P_j), że $h(\hat{\omega}) = c(1) + \tilde{c}\,\hat{x}$. W takim przypadku $\hat{x}$ jest rozwiązaniem optymalnym dla (P_j), a $\hat{\omega}$ - dla (D_j). Oznacza to wtedy, że wyzna-

czanie górnego oszacowania w wierzchołku pozwala na uzyskanie rozwiązania pierwotnie dopuszczalnego. Jeśli w dodatku odpowiadająca mu wartość funkcji celu jest większa od $\underline{v}(P_0)$, to może stać się ona nową, poprawioną wartością odcinającą.

Zarówno rezultaty teoretyczne [2],[5],[9], jak i wyniki badań eksperymentalnych [4],[8],[10] wskazują, że oszacowania uzyskiwane poprzez rozwiązywanie dualnego zadania ograniczenia zastępczego są ściślejsze od oszacowań wykorzystujących relaksacje ze zmiennymi ciągłymi i relaksacje Lagrange'a.

W realizacji prezentowanej metody podziału i oszacowań zastosowano relaksację ograniczenia zastępczego i algorytm quasi-subgradientowy [10] do wyznaczania oszacowania $\bar{v}(P_j)$ poprzez rozwiązywanie zadania dualnego (D_j). W trakcie działania tego iteracyjnego algorytmu wyznaczany jest nierosnący ciąg $\{q^t\}$, zbiegający do $v(D_j)$. Zatem każdy z jego wyrazów jest górnym oszacowaniem dla $v(P_j)$. Prostym następstwem tego faktu jest reguła, która pozwala przerwać obliczenia w algorytmie quasi-subgradientowym i zamknąć wierzchołek, gdy pewien wyraz $q^t < \underline{v}(P_0)$.

4. Elementy algorytmu

Aby schemat postępowania przy rozwiązywaniu wielowymiarowego zadania załadunku metodą podziału i oszacowań przybrał formę implementowalnego algorytmu, należy określić sposoby realizowania podstawowych jego elementów. Należą do nich: algorytm wyznaczania pierwszego rozwiązania dopuszczalnego dla (P_0), kryteria zamykania wierzchołków, algorytm wyboru kolejnego wierzchołka z listy oczekujących na zbadanie i sposób rozgałęziania wierzchołka.

4.1. Oszacowanie dolne dla zadania pierwotnego

Pierwszym wierzchołkiem drzewa podziału, który podlega analizie jest korzeń reprezentujący zadanie pierwotne. Zatem już na samym początku metody wymagana jest znajomość dolnego oszacowania $\underline{v}(P_0)$ i odpowiadającego mu rozwiązania pierwotnie dopuszczalnego. Od jakości tego oszacowania zależy skuteczność kryteriów zamykania wierzchołków w początkowych etapach algorytmu. Z tego powodu wskazane jest wyznaczanie rozwiązań przybliżonych możliwie bliskich optymalnym. W [13] przedstawiono trzy algorytmy, które mogą być zastosowane w przedstawionej realizacji. Wszystkie one oparte są na idei algorytmu zachłannego i nadają się szczególnie dobrze do implementacji mikrokomputerowych. Dotychczasowe doświadczenia wskazują, że najskuteczniejszy z nich jest algorytm z ograniczeniem zastępczym.

Wszystkie trzy algorytmy prócz wskazania rozwiązania przybliżonego szeregują także wszystkie zmienne pierwotne według ich "efektywności". Efektywność zmiennej ma istotne znaczenie w algorytmach rozwiązywania klasycznego zadania załadunku [3],[6]. Dla zadań z wieloma ograniczeniami trudno jest jednoznacznie zdefiniować jej odpowiednik. Jednak w każdym z wymienionych algorytmów przypisywane są zmiennym pewne wskaźniki pełniące

podobną do efektywności rolę. Przez ich porównanie zmienne są szeregowane od najbardziej do najmniej "efektywnych". Ta kolejność może być wykorzystana w innych elementach prezentowanego schematu.

4.2. Zamykanie wierzchołków

Analizowane wierzchołki wybierane są kolejno z listy oczekujących. Formalnie rzecz biorąc, pierwsza lista składa się wyłącznie z jednego wierzchołka-korzenia, czyli zadania pierwotnego. Jego analiza rozpoczyna się od wyznaczenia pierwszej wartości odcinającej za pomocą jednego z proponowanych w p.4.1 algorytmów (przy założeniu że $F_0 \neq \emptyset$). Następnym krokiem jest rozwiązanie zadania dualnego (D_0). Jeżeli zachodzi warunek $\underline{v}(P_0)=v(D_0)$, to wyznaczone rozwiązanie przybliżone jest optymalne i proces rozgałęziania drzewa podziału jest zbędny. W przeciwnym (znacznie częstszym w praktyce) przypadku tworzona jest faktycznie początkowa lista wierzchołków. Umieszczane są na niej oba potomki korzenia, które utworzono po wybraniu pierwszej zmiennej rozgałęziającej. Od tego momentu każdy wierzchołek wzięty z listy analizowany jest z użyciem kryteriów, które stosowane są w kolejności niżej podanej.

Kryterium I . Czy w danym wierzchołku oszacowanie górne dla wierzchołka-przodka jest mniejsze lub równe aktualnej wartości odcinającej?

Ze schematu dokonywania podziału zbioru F_0 wynika, że oszacowanie górne wyznaczone dla wierzchołka jest także oszacowaniem dla wszystkich wierzchołków, które tworzą poddrzewo o korzeniu w tym wierzchołku. Zatem, jeśli górne oszacowanie dla wierzchołka-przodka $\overline{v}(P_{j-p}) \leq \underline{v}(P_0)$, to wierzchołek ($P_j$) może zostać zamknięty.

Kryterium II . Czy wierzchołek jest absolutnym liściem drzewa podziału?

W pewnym momencie rozwoju drzewa podziału jego liśćmi są wierzchołki już zamknięte oraz te, które oczekują na analizę (z definicji liściem nazywamy wierzchołek bez potomków). Wierzchołki z listy mogą być rozgałęzione w trakcie dalszego postępowania pod warunkiem, że $s \geq 1$. Wierzchołek, dla którego zbiór $I(-)=\emptyset$ nie może już być rozgałęziany - jest liściem absolutnym. Do tego samego rodzaju można także zaliczyć wierzchołki, dla których $I(-)$ ma moc $s=1$. Takie podproblemy mają trywialne rozwiązania optymalne i ich wyznaczenie zastępuje analizę wykorzystującą górne oszacowanie. Tak więc kryterium ma w algorytmie postać: czy $s \leq 1$? Jeśli tak, to wierzchołek jest zamykany. Dodatkowo sprawdzana jest możliwość poprawienia aktualnej wartości odcinającej. Jeśli wartość $v(P_j)$ ($=c(1)$ lub $=c(1)+c_k$ dla $I(-)=\{k\}$) jest większa od $\underline{v}(P_0)$, to wartość ta staje się nową wartością odcinająca.

Kryterium III . Czy dla danego wierzchołka $h(\omega) \leq \underline{v}(P_0)$?

Jest to pierwsze z dwóch podstawowych kryteriów, które wykorzystują górne oszacowanie dla wartości optymalnej w podproblemie. Tym oszacowaniem jest wartość funkcji dualnej ograniczenia zastępczego dla pewnego mnożnika. Wyznaczana jest ona poprzez rozwiązanie relaksacji (Z_j). To zadanie jest klasycznym zadaniem załadunku z jednym ograniczeniem. Zatem do jego

rozwiązania można wykorzystać efektywny w praktyce algorytm, opisany w [6] i opracowany w formie procedury w [11]. Ograniczenie zastępcze budowane jest w oparciu o mnożnik wyznaczony podczas analizy wierzchołka-przodka. Jeśli relacja badana w kryterium zachodzi, to wierzchołek jest zamykany, gdyż zbiór F_j nie może zawierać rozwiązań lepszych od poprzednio znalezionego. W przeciwnym przypadku należy zbadać, czy rozwiązanie zadania (Z_j) jest dopuszczalne w zadaniu (P_j). Jeśli tak jest, to wartość $h(\omega)=v(P_j)$ staje się nową wartością odcinającą i wyznaczone rozwiązanie zapamiętywane jest jako najlepsze z dotychczas znalezionych. Taki wierzchołek jest także zamykany, gdyż wyznaczono w nim rozwiązanie optymalne dla zadania (P_j).

Kryterium IV. Czy dla danego wierzchołka $v(D_j) \leq \underline{v}(P_0)$?
Jeśli kryterium III nie pozwoliło na zamknięcie wierzchołka, to należy podjąć próbę poprawienia oszacowania $h(\omega)$. Służy temu rozwiązywanie zadania (D_j) za pomocą algorytmu quasi-subgradientowego [10]. W trakcie jego działania budowany jest iteracyjnie nierosnący ciąg $\{q^t\}$, który zbiega do $v(D_j)$. Zatem kryterium implementowane jest jako sprawdzanie warunku $q^t \leq \underline{v}(P_0)$ już w trakcie wykonywania iteracji wewnątrz tego algorytmu. Pojawienie się wartości q^t, która spełnia powyższy warunek, powoduje zatrzymanie algorytmu rozwiązywania (D_j) i zamknięcie wierzchołka. Jeśli algorytm zakończył działanie i wyznaczone oszacowanie pozostało większe od wartości odcinającej, to sprawdzany jest odstęp dualności, czyli wartość $v(D_j)-v(P_j)$. W przypadku zerowego odstępu wierzchołek jest zamykany, wartość odcinająca poprawiana i zapamiętywane jest wyznaczone rozwiązanie dopuszczalne dla (P_j).

Jeśli żadne z kryteriów nie pozwoliło na zamknięcie badanego wierzchołka, to jest on rozgałęziany. Po wybraniu zmiennej rozgałęziającej tworzone są dwa wierzchołki potomne, które umieszczane są na liście oczekujących na analizę. Wierzchołek rozgałęziony, tak jak i zamknięty, jest usuwany z listy.

4.3. Wybór analizowanego wierzchołka

Na każdym etapie rozwoju drzewa podziałów wyróżniony jest ten podzbiór w F_0, który nie został jeszcze sprawdzony. Jest on sumą wszystkich podzbiorów F_j, dla tych wierzchołków, które oczekują na analizę z użyciem kryteriów zamykania. Wierzchołki analizowane są pojedynczo i na skuteczność całej metody ma wpływ strategia wyboru kolejnego wierzchołka.

W algorytmie użyto jednokierunkowej listy z wartownikiem [1] jako struktury danych, która służy do przechowywania aktualnego zbioru wierzchołków oczekujących na analizę. Na tej liście tylko dwa wierzchołki są dostępne bezpośrednio: pierwszy i ostatni. Do pozostałych można dotrzeć tylko poprzez przesuwanie się wzdłuż listy (w tym przypadku możliwe jest to tylko w jednym kierunku).

Zastosowanie jednokierunkowej listy narzuca wybieranie do analizy wierzchołka początkowego. Strategie wyboru polegają na różnych sposobach

budowania listy przez dołączanie nowych wierzchołków. W algorytmie wprowadzono trzy sposoby budowania listy:

LIFO - nowe wierzchołki umieszczane są na początku listy,

FIFO - nowe wierzchołki umieszczane są na końcu listy,

MIN - nowe wierzchołki umieszczane są w takim miejscu, że zgodnie z kierunkiem listy wzrastają górne oszacowania $\bar{v}(P_j)$ odziedziczone po wierzchołkach-przodkach.

W każdym z trzech sposobów budowania listy inny wierzchołek jest początkowym i w związku tym inny wierzchołek jest wybierany w danym kroku metody do analizy zamykającej:

LIFO - wierzchołkiem początkowym jest ostatnio wprowadzony na listę.

FIFO - wierzchołkiem początkowym jest pierwszy wprowadzony na listę.

MIN - wierzchołkiem początkowym jest wierzchołek reprezentujący podzadanie o najmniejszym górnym oszacowaniu $\bar{v}(P_j)$ odziedziczonym po wierzchołku-przodku.

4.4 Wybór zmiennej rozgałęziającej

W przypadku gdy żadne z kryteriów zamykania nie było dostatecznie silne, wierzchołek jest rozgałęziany i zastępowany dwoma potomkami. Przeprowadzenie tej operacji wymaga wybrania jednej zmiennej swobodnej ze zbioru $I(-)$. Aby uniknąć tworzenia podzadań niedopuszczalnych ($\tilde{F}_j=\emptyset$), należy przez pojęcie zmiennej swobodnej rozumieć taką zmienną, która może przyjąć wartość 1 bez naruszania aktualnych ograniczeń, tzn. spełnia warunek $\tilde{a}_{ij} \le \tilde{b}_i$ dla wszystkich j. Wszystkie zmienne, których wartość nie została ustalona w trakcie poprzednich operacji rozgałęziania, ale dla których powyższy warunek nie jest spełniony, są przenoszone do zbioru $I(0)$. W ten sposób można wybrać dowolną zmienną ze zbioru $I(-)$ i utworzyć dwa dopuszczalne podzadania.

Procedura wyznaczająca początkowe rozwiązanie dopuszczalne dla zadania (P_0) podaje, prócz wartości odcinającej $\underline{v}(P_0)$, także kolejność zmiennych pierwotnych uporządkowanych według nierosnących efektywności. Ta wstępnie ustalona kolejność zmiennych jest wykorzystywana w trakcie procesu podziału do wybrania zmiennej rozgałęziającej. Sposób stosowany w algorytmie polega na wybieraniu ze zbioru $I(-)$ tej zmiennej, która jest pierwsza według podanej kolejności. Istotną cechą tego postępowania jest używanie stałej, wstępnie ustalonej, kolejności przez cały czas trwania procesu rozgałęziania. Pozwala to dokonywać bardzo szybko wyboru zmiennej.

5. Eksperyment obliczeniowy

Obliczenia wykonane dla zadań testowych wybranych z literatury miały na celu sprawdzenie praktycznej przydatności przedstawionego algorytmu wyznaczania rozwiązań optymalnych dla zadań załadunku z wieloma ograniczeniami. Chodziło także o porównanie trzech sposobów wyboru wierzchołka z listy oczekujących na analizę: LIFO, FIFO i MIN.

Zadania testowe o postaci (P_0) zostały zaczerpnięte z pracy [7], w której zebrano 50 zadań pochodzących z literatury (oznaczono je od nazwisk autorów prac: FLEIS, PETE1÷PETE7, PLAT1 i PLAT2, SET01 i SET02, SHI01÷SHI30 oraz WEIN1÷8). Dodatkowo wykorzystano w eksperymencie zadania o danych generowanych losowo. Dla 20 zadań całkowite wartości liczbowe wybrano pseudolosowo z rozkładem jednostajnym z następujących przedziałów: dla 10 zadań $c_i \in [1;1000]$, $a_{ji} \in [0;500]$, $b_j \in [2500;3750]$ (oznaczono je LIT01÷LIT10) oraz dla 10 zadań $c_i \in [1;10000]$, $a_{ji} \in [0;1000]$, $b_j \in [7500;10000]$ (oznaczono je SMA01÷SMA10). Niżej podano rozmiary zadań: liczbę zmiennych n oraz liczbę ograniczeń m.

Nazwa	n	m
FLEIS	20	10
PETE1	6	10
PETE2	10	10
PETE3	15	10
PETE4	20	10
PETE5	28	10
PETE6	39	5
PETE7	50	5

Nazwa	n	m
PLAT1	28	4
PLAT2	35	4
WEIN1÷6	28	2
WEIN7,8	105	2
SHI01÷05	30	5
SHI06÷09	40	5
SHI10÷13	50	5

Nazwa	n	m
SHI14÷17	60	5
SHI18÷21	70	5
SHI22÷25	80	5
SHI26÷30	90	5
SET01,2	60	30
LIT01÷10	50	10
SMA01÷10	50	10

Tab. 1

W trakcie eksperymentu użyto opisanego algorytmu typu podziału i oszacowań w jednej z możliwych wersji. Dla wyznaczania wartości $\bar{v}(P_0)$ oraz oszacowań w wierzchołkach $\bar{v}(P_j)$ wybrano algorytm quasi-subgradientowy [10] z parametrami sterującymi: krok startowy = 2.0 dla zadania (P_0) i = 0.5 dla zadań w wierzchołkach (P_j), współczynnik zmniejszania kroku = 0.86 i ograniczenie liczby iteracji do 20. Początkową wartość odcinającą oraz pierwsze rozwiązanie dopuszczalne wyznaczano prostym algorytmem zachłannym z ograniczeniem zastępczym [13]. Porównano zachowanie się takiej wersji algorytmu dla trzech wariantów wyboru wierzchołka z listy oczekujących na analizę. Dla każdego z zadań testowych wyznaczano rozwiązanie optymalne trzykrotnie, stosując listy LIFO, FIFO i MIN.

Wszystkie obliczenia testowe przeprowadzono na mikrokomputerze typu PC zgodnym z IBM AT286, pracującym z zegarem 16 MHz i wyposażonym w procesor numeryczny 287. Programy napisano w języku Pascal, a kody binarne uzyskano przy użyciu kompilatora Turbo Pascal v.5.5.

Wyniki eksperymentu podsumowano w poniższych tabelach podając wartości średnie w grupie 50 zadań z literatury i w grupie 20 zadań losowych dla następujących parametrów:

$$z = \frac{\bar{v}(P_0)-\underline{v}(P_0)}{\bar{v}(P_0)} \cdot 100\%$$ – odstęp pomiędzy górnym i dolnym oszacowaniem pierwotnej wartości optymalnej w korzeniu drzewa,

pw – liczba wszystkich wierzchołków przejrzanych w trakcie budowy drzewa podziału,

rw – liczba wierzchołków rozgałęzionych.

k1 - liczba wierzchołków zamkniętych przez kryterium I,

k2 - liczba wierzchołków zamkniętych przez kryterium II,

k3 - liczba wierzchołków zamkniętych przez kryterium III,

d3 - liczba wierzchołków zamkniętych przez znalezienie rozwiązania dopuszczalnego po sprawdzeniu kryterium III,

k4 - liczba wierzchołków zamkniętych przez kryterium IV,

d4 - liczba wierzchołków zamkniętych przez znalezienie rozwiązania dopuszczalnego po sprawdzeniu kryterium IV,

dl - maksymalna długość listy wierzchołków oczekujących na analizę,

cc - całkowity czas obliczeń, obejmujący zarówno wyznaczanie oszacowań dla zadania pierwotnego, jak i proces podziału.

Tabela 2 zawiera wyniki uzyskane z użyciem listy typu LIFO.

Typ zad.	z[%]	pw	rw	k1	k2	k3+d3	k4+d4	dl	cc[sek]
z liter.	2.64	979	488	0	3	365+2	120+1	19	177.8
losowe	5.33	271	135	0	18	64+1	52+1	15	92.6

Tab. 2

Tabela 3 zawiera wyniki uzyskane z użyciem listy typu FIFO.

Typ zad.	z[%]	pw	rw	k1	k2	k3+d3	k4+d4	dl	cc[sek]
z liter.	2.64	2896	1447	66	7	988+2	385+1	84	552.0
losowe	5.33	1159	579	236	26	177+1	139+2	232	374.9

Tab. 3

Tabela 4 zawiera wyniki uzyskane z użyciem listy typu MIN.

Typ zad.	z[%]	pw	rw	k1	k2	k3+d3	k4+d4	dl	cc[sek]
z liter.	2.64	979	488	0	3	365+2	120+1	19	179.8
losowe	5.33	271	135	0	18	64+1	52+1	15	92.7

Tab. 4

6. Podsumowanie

Wyniki eksperymentu obliczeniowego wskazują na praktyczną przydatność opisanego algorytmu do rozwiązywania wielowymiarowych zadań załadunku. Dla większości zadań pochodzących z literatury i dla wszystkich losowych pozwalał on na wyznaczenie rozwiązania optymalnego po analizie niewielkiego drzewa podziału. W znaczącej liczbie przypadków podział nie był w ogóle dokonywany (dla 12 zadań z literatury). Potwierdza to siłę stosowanego oszacowania górnego, które oparte jest na relaksacji z ograniczeniem zastępczym. Lista typu FIFO okazała się najmniej skuteczna. Jej stosowanie dawało rezultaty porównywalne z innymi listami tylko dla tych zadań, dla których odstęp oszacowań dla zadania pierwotnego był wyjątkowo mały. Listy typu LIFO i MIN prowadziły do identycznych drzew podziału i algorytm działał dla nich jednakowo dobrze. Wersja algorytmu z listą MIN działała nieznacznie wolniej.

LITERATURA

[1] Aho A.V., Hopcroft J.E., Ullman J.D.: Data Structures and Algorithms. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1983.

[2] Dyer M.E.: Calculating surrogate constraints. Mathematical Programming 19 (1980) 255-278.

[3] Fayard D., Plateau G.: An algorithm for the solution of the 0-1 knapsack problem. Computing 28 (1982) 269-287.

[4] Gavish B., Pirkul H.: Efficient algorithms for solving multiconstraint zero-one knapsack problems to optimality. Mathematical Programming 31 (1985) 78-105.

[5] Greenberg H.J., Pierskalla W.P.: Surrogate mathematical programs. Operations Research 18 (1970) 924-939.

[6] Martello S., Toth P.: Algorithm for the solution of the 0-1 single knapsack problem. Computing 21 (1978) 81-86.

[7] Plateau G.: Reduction de la taille des problemes lineaires en variables 0-1. Research Report 71 (1976) UST Lille 1.

[8] Sarin S.: Surrogate dual multiplier search procedures in integer programming. Ph.D. dissert., Dept of Industrial Engineering, State Univ. of New York at Buffalo, NY 1986.

[9] Sikorski J.: Dualne zadanie wyznaczania najlepszego ograniczenia zastępczego. Archiwum Automatyki i Telemechaniki 4 (1984) 471-481.

[10] Sikorski J.: Dwa algorytmy dla wyznaczania oszacowania wartości optymalnej w zadaniach dyskretnych z wieloma ograniczeniami. Opracowanie wewnętrzne ZPM-2 (1989) IBS PAN.

[11] Sikorski J.: Moduł SOLSACK. Procedury rozwiązywania binarnych zadań załadunku. Opracowanie wewnętrzne ZPM-5 (1989) IBS PAN.

[12] Sikorski J.: O wyznaczaniu ograniczeń zastępczych w metodzie podziału i oszacowań. Opracowanie wewnętrzne ZPM-1 (1990) IBS PAN.

[13] Sikorski J.: Algorytmy wyznaczania rozwiązań przybliżonych dla wielowymiarowych zadań załadunku. Opracowanie wewnętrzne ZPM-10 (1990) IBS.

Recenzent: Prof.dr h.inż. Franciszek Marecki

Wpłynęło do Redakcji do 30.04.1992 r.

Abstract: An algorithm of branch and bound type for the solution of the 0-1 knapsack problem with multiple constraints (multidimensional knapsack problem) is presented in the paper. Effectiveness of the branch and bound method depends very much on the strength of fathoming criterions. A bound on the subproblem optimal value is necessary for the main criterion. Since the surrogate constraint approach offers a very tight bound it is used in the algorithm. Moreover, the surrogate constraint relaxation for the multidimensional knapsack problem forms an ordinary knapsack problem which can be solved effectively in practice. Thus this relaxation is intensively exploited for both calculating bounds in subproblems and finding an initial approximate solution. The surrogate dual program, which is described in the preliminary part of the paper, can yield a feasible solution on completion of node fathoming process. The more often such an approximate solution is improved during the fathoming process the lesser tree of subproblems must be built to find the optimal solution for the primal problem. The results of some preliminary numerical experiments are also reported.