ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1992
Seria: AUTOMATYKA z. 109 Nr kol. 1175

Ewa Skubalska - Rafajłowicz
Politechnika Wrocławska

PROBLEMY SELEKTYWNEGO WYBORU I SZEREGOWANIA ZADAŃ Z PRZEZBROJENIAMI

PROBLEMS OF TASKS SELECTION AND SCHEDULING WITH SETUP COSTS

REIHENFOLGEPROBLEME MIT WERKSTÜCKAUSWAHL UND MASCHINENUMRÜSTUNG

Streszczenie: W pracy sformułowano nowe zagadnienie szeregowania zadań z przezbrojeniami. Nowym jego elementem jest wprowadzenie możliwości wyboru podzbioru zadań do realizacji. Wskaźnikiem wyboru poszczególnych zadań jest zysk związany z ich realizacją. Równocześnie, z realizacją każdego z zadań związane są pewne koszty zależne od kolejności i terminu realizacji danego zadania. Kryterium funkcjonowania systemu jest maksymalizacja łącznego zysku, pomniejszonego o koszty poniesione na realizację zadań (zależą one od harmonogramu). W pracy sformułowano model tej klasy zagadnień. Zbadano jego podstawowe własności. Przedyskutowano zasady konstruowania algorytmów rozwiązywania wybranych problemów z tej klasy.

Summary: In the paper a new class of scheduling problems with setup costs is formulated. The novelty is in that one is allowed to choose a subset of tasks to be performed. The choice is based on profits which can be gained for performing a given task. Simultaneous to every task a cost is attached, which depends on tasks realization dates. The system performance index takes into account both the above mentioned profits and costs. In the paper mathematical models for such problems are formulated and their basic properties are investigated. Principles of building algorithms for solving optimization problems of this type are also discussed.

Zusammenfassung: Eine neue Klasse der Reihenfolgeprobleme wird formuliert, bei denen nicht alle Werkstücke realisiert sollen. Die Werkstückausführung bezeichnet Profit und Reihenfolgerealisirungkosten einbringt. Maximizirung von Nettoprofit die Zielkriterium für aufstehende Optimirungausgabe ist. Vorschiedene mathematische Modelle für manche Problemen von dieser Klasse wierd entwickelt. Gewisse Problemeigentums wierd bemerkt. Für bestimmte Aufgaben werden Lösungen explicit angegeben.

1. Wstęp

W pracy rozważane jest zagadnienie szeregowania zadań. Klasyczne zadania tego rodzaju charakteryzują się dwiema zasadniczymi cechami:

1. opisy technologiczne wszystkich zadań, takie jak: wymagane operacje, czasy ich realizacji, czasy przezbrojeń między każdą parą zadań, znane są w chwili podejmowania decyzji o uszeregowaniu;
2. wymaganiem, by wszystkie zadania zostały zrealizowane.

Warto ponadto zaznaczyć, że w klasycznych sformułowaniach zadań nie ma miejsca na uwzględnienie w modelu ewentualnych negocjacji na temat wyboru zestawu (partii) zadań do realizacji.

Celem tej pracy jest sformułowanie i wstępne zbadanie problemów, w których założenie 2) zostaje osłabione, przy zachowaniu informacji wymienionych w punkcie 1). Osłabienie założenia 2) polega na dopuszczeniu możliwości, iż nie wszystkie zadania muszą być zrealizowane. Innymi słowy, nowym składnikiem rozważanych tu problemów jest wprowadzenie nowego elementu decyzyjnego, wskazującego, które zadania z zadanej partii zadań mają zostać wykonane. Oprócz tego, podobnie jak w klasycznych zadaniach, wskazać należy harmonogram realizacji wybranych zadań.

Motywacji do podjęcia tej tematyki dostarczają takie sytuacje, w których występują następujące elementy:

1. uwzględnianie zarówno zysku płynącego z realizacji zadania, jak i ewentualnych strat powodowanych opóźnieniem w jego realizacji,
2. dopuszczenie możliwości negocjacji na temat przyjęcia lub nieprzyjęcia zadania do realizacji.

Sytuacje o powyższych cechach spotykane są wtedy, gdy realizacja danej operacji ma cechy usługi produkcyjnej, transportowej itp. Klasy elementarnych przykładów z dziedziny pozaprodukcyjnej dostarcza zagadnienie wykorzystania unikalnych urządzeń (dźwigów o dużej nośności, statków – chemikaliowców). Zamówienie na wykorzystanie urządzenia tego typu obejmuje zwykle: czas wykorzystania urządzenia, cenę proponowaną za wypożyczenie (wykorzystanie) urządzenia, karę za ewentualną nieterminową realizację. Ponadto, dysponent urządzenia nie musi przyjąć zamówienia, jeśli jest ono dla niego ekonomicznie niekorzystne.

Przykład powyższy pozwala wyłowić intuicyjne cechy zadań optymalizacji, jakie mogą tu być formułowane (bardziej precyzyjne sformułowanie zadania podane będzie dalej).

1. O przyjęciu zadania do realizacji decydują nie tylko jego własne charakterystyki (czas realizacji, kara za nieterminowość i ewentualna opłata za realizację), lecz także charakterystyki zadań występujących w tej samej partii.
2. Aby rozstrzygnąć, czy dane zadanie opłaca się realizować, trzeba wiedzieć, kiedy będzie ono wykonywane, gdyż od tego zależy ewentualna kara za nieterminowość. Oznacza to, że w ogólnym przypadku problemów szeregowania i wyboru zadań do realizacji nie można rozdzielić.

Powyższe cechy wpływać będą na metodykę konstruowania algorytmów rozwiązywania problemów rozważanych w tej pracy. Badana jest w niej klasa zagadnień szeregowania, w której uwzględniane są koszty i czasy przezbrojeń (czas i koszt przejazdu, przewozu, dostarczenia maszyny). Ponieważ badania te mają charakter wstępny, ograniczono się do problemów z jedną maszyną.

Ideę selekcji zadań autorka po raz pierwszy rozważała w pracy [8] dotyczącej planowania tras pojazdów. Między innymi sformułowano tam problem jednego i wielu komiwojażerów z selekcją miast. Tak sformułowane zagadnienie komiwojażera rozpatruje w pracy [2] E. Balas. Inny wariant problemu komiwojażera z selekcją opisują Laporte i Martello w pracy[3]. Świadczy to o tym, że problemy selekcji zaczynają być dostrzegane i warte są dalszych badań.

2. Sformułowanie klasy rozważanych problemów

Niech $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ oznacza zbiór zadań do wykonania. Określone są czasy (koszty) realizacji zadań $p_i \geq 0$, $i \in J$ oraz zyski związane z wykonaniem każdego zadania $z_i > 0$, $i \in J$. Zadania mogą być wykonywane w dowolnej kolejności, przy czym w każdym momencie czasowym wykonywane może być tylko jedno zadanie. Nie wszystkie zadania muszą zostać zrealizowane. Niech $S \subset J$ oznacza zbiór zadań, które zostaną zrealizowane. Wyznaczenie zbioru S jest pierwszym problemem decyzyjnym, który należy rozwiązać.

Dla każdej pary zadań $(i, j) \in J$ określone są wartości przezbrojeń $t_{ij} \geq 0$. Przezbrojenie t_{ij} może być interpretowane jako czas potrzebny do rozpoczęcia wykonania zadania j-tego, jeśli uprzednio realizowano zadanie i-te. Zadanie j-te wykonywane jest bezpośrednio po i-tym w sensie kolejności; przerwa czasowa dzieląca moment rozpoczęcia realizacji zadania j-tego od momentu zakończenia wykonywania zadania i-tego musi być nie mniejsza niż t_{ij}. Wartość przezbrojenia t_{ij} może być również interpretowana bezpośrednio jako koszt, który należy dodatkowo ponieść, wykonując zadanie i-te bezpośrednio po j-tym (koszt proporcjonalny do czasu).

Niech $\Pi(S)$ oznacza wszystkie możliwe permutacje ze zbioru $S \subseteq J$. Koszty realizacji zadań ze zbioru S o liczności K, wykonywanych w kolejności: $\pi = [\pi(1) = i_1, \pi(2) = i_2, \ldots, \pi(K) = i_K] \in \Pi(S)$, mogą być opisane następującymi kryteriami:

A. Sumaryczny koszt (czas) wykonywania zadań.

$$F_1 = \sum_{i=2}^{K} t_{\pi(i-1)\pi(i)} + p_{\pi(i)} + t_{0\pi(1)} \tag{1}$$

Przy czym $t_{0i} \geq 0$, $i \in J$ to koszt potrzebny do realizacji i-tego zadania jako pierwszego w kolejności (w szczególności może być on zerowy).

B. Sumaryczny czas pobytu zadań w systemie. Niech C_i oznacza moment zakończenia realizacji i-tego zadania, tzn. $C_j = C_i + p_j + t_{ij}$, jeśli zadanie i-te wykonywane jest bezpośrednio przed j-tym. Sumaryczny czas pobytu zadań w systemie

wynosi: $F_2(\pi) = \sum_{i \in S} C_i = \sum_{i=1}^{K} C_{\pi(i)}$, czyli

$$F_2(\pi) = \sum_{i=2}^{K} (K - i + 1) \cdot \left(p_{\pi(i)} + t_{\pi(i-1)\pi(i)}\right) + K \cdot \left(p_{\pi(1)} + t_{0\pi(1)}\right) \tag{2}$$

C. Sumaryczne kary za przekroczenie terminów normatywnych. Przez d_i oznaczmy żądany termin zakończenia i-tego zadania. Wówczas kryterium ma postać:

$$F_3(\pi) = \sum_{i=1}^{K} v_{\pi(i)} \cdot \left[C_{\pi(i)} - d_{\pi(i)}\right] \tag{3}$$

$$C_{\pi(i+1)} = C_{\pi(i)} + p_{\pi(i+1)} + t_{\pi(i-1)\pi(i)}, \quad C_{\pi(1)} = t_{0\pi(1)} + p_{\pi(1)} \tag{4}$$

Powyżej $v_i \geq 0$, $i \in J$ oznaczają kary za opóźnienie w realizacji i-tego zadania. Ponadto, określona może być kara $k_i \geq 0$, $i \in J$ za niezrealizowanie i-tego zadania.

Nasze zadanie polega na tym, by sumaryczne zyski związane z wykonaniem zadań ze zbioru S, pomniejszone o kary za niewykonanie zadań z $J - S$ oraz o koszty poniesione na realizację zadań (postaci A, B lub C), były jak największe. Prowadzi to do następującej klasy modeli:

Wyznaczyć zbiór $S \subseteq J$ oraz permutację $\pi_S \in \Pi(S)$ tak, by maksymalizować:

$$\sum_{i \in S} z_i - \sum_{i \in J-S} k_i - F_l(\pi_S). \tag{5}$$

gdzie l=1, 2 lub 3.

3. Zagadnienie z kryterium kosztów F_1

Przyjęcie kryterium kosztów realizacji zadań typu F_1 (czyli sumarycznego czasu (kosztu) realizacji zadań, łącznie z przezbrojeniami) prowadzi nas w stronę zadań związanych z problemem komiwojażera [4].

W klasycznym problemie komiwojażera wszystkie miasta muszą zostać odwiedzone, co odpowiada konieczności wykonania wszystkich zadań w rozważanym przez nas problemie (brak selekcji). W tym przypadku czas (koszt realizacji) poszczególnych zadań p_i, $i \in J$ może zostać pominięty, gdyż suma $\sum_{i \in J} p_i$ pozostaje stałym, niezależnym od kolejności realizacji zadań (sekwencji $\pi \in \Pi(J)$), składnikiem funkcji kosztów.

Przyjrzyjmy się dokładniej problemowi szeregowania zadań z selekcją w przypadku kryterium kosztów typu F_1 . Na początku sformułujmy podstawowy problem komiwojażera z selekcją (ZKS). Dla uproszczenia przyjmujemy, że koszty (czasy) realizacji zadań są pomijalnie małe ($p_i = 0$). Wprowadźmy sztuczne zadanie o numerze 0,

które będzie rozpoczynało i kończyło sekwencję realizowanych zadań. Niech x_{ij} będzie binarną zmienną decyzyjną o następującej interpretacji: $x_{ij} = 1$, jeśli zadanie i-te realizowane jest bezpośrednio przed j-tym, $x_{ij} = 0$ – w przeciwnym przypadku. Model matematyczny ZKS możemy wówczas sformułować następująco. Należy maksymalizować:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(z_i - t_{ij}) \cdot x_{ij} \tag{6}$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = \sum_{k=0}^{n} x_{ki} \leq 1, \quad i = 0,1,\ldots,n \tag{7}$$

$$\sum_{i\in V}\sum_{j\in V} x_{ij} \leq |V| - 1, \quad V \subseteq \{1,2,\ldots,n\}, \quad V \neq \emptyset \tag{8}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \neq j, \quad i,j = 0,1,\ldots,n. \tag{9}$$

Należy zauważyć, że nie ma potrzeby wprowadzania żadnych dodatkowych ograniczeń wymuszających wystąpienie w rozwiązaniu zadania ZKS "sztucznej pracy" o numerze 0. Ograniczenie (8) powoduje, że jeśli żadna praca nie jest wykonywana, czyli : $x_{ij} = 0$, $i,j = 0,1,\ldots,n$, to ograniczenie (9) jest automatycznie spełnione dla dowolnego $V \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$. Natomiast , jeśli wykonywane jest przynajmniej jedno zadanie ze zbioru J , to ograniczenie (8) eliminuje rozwiązania w postaci lasu [6] (a więc także dróg i drzew). Jak już wcześniej zauważono, ograniczenie (9) eliminuje rozwiązania o postaci cykli nie zawierających zadania o numerze 0.

Łatwo zauważyć, że jeśli przyjmiemy dostatecznie duże zyski , na przykład:

$$z_i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} t_{ij}, \quad i = 0,1,\ldots,n, \tag{10}$$

to rozwiązanie optymalne problemu ZKS będzie równocześnie rozwiązaniem optymalnym problemu komiwojażera. Stąd nie należy spodziewać się istnienia algorytmu wielomianowego rozwiązywania problemu ZKS.

Zauważmy, że problem ZKS, dla każdego zbioru zadań S przeznaczonych do realizacji, możemy interpretować jako problem komiwojażera z kosztami przejść (przezbrojeń), które mogą przyjmować tak dodatnie ($t_{ij} - z_i \geq 0$), jak i ujemne wartości ($t_{ij} - z_i < 0$, i,j = 0,1,...,n). Tak więc, ekstensywnym podejściem do rozwiązania zadania ZKS byłoby rozwiązanie zagadnienia komiwojażera, dla każdego dopuszczalnego podzbioru $S \subseteq J$, a następnie wybór takiego $\hat{S}$, które daje najmniejszą wartość funkcji celu.

Niezależnie od tego, jaki algorytm (dokładny, czy przybliżony) zastosujemy do rozwiązania problemu ZKS, wydaje się istotne zbadanie własności optymalnego zbioru zadań $\hat{S}$. Przedstawione dalej własności ZKS podzielić można na dwie grupy: własności

eliminacyjne, które pozwolą usunąć pewne zadania, jako te, które nie mogą wystąpić w rozwiązaniu optymalnym, oraz własności typu przynależności, które pozwalają wypowiadać się pozytywnie na temat przynależności pewnych zadań do zbioru $\hat{S}$. Własności eliminacyjne pozwolą na zmniejszenie rozmiaru rozpatrywanego zadania ZKS, natomiast własności typu przynależności pozwolą ewentualnie zmniejszyć liczbę przeglądanych podzbiorów S.

Własność E 1. *Jeśli parametry pewnego zadania spełniają warunek:*

$$t_{ki} + t_{il} - t_{kl} > z_i \quad k \neq l \neq i, \quad k,l \in \{0,1,\ldots,n\} \tag{11}$$

dla każdej pary zadań k,l różnych od zadania i-tego, to zadanie i-te nie należy do żadnego rozwiązania optymalnego problemu ZKS.

Dowód E 1. Przyjmijmy, że przeciwnie, $i \in \hat{S}$, gdzie S jest pewnym optymalnym podzbiorem J, zapewniającym wartość funkcji celu T^*, gdzie T^* oznacza optymalną wartość funkcji celu. Oznaczmy przez $p,z \in \{0,1,\ldots n\}$ zadania sąsiadujące z zadaniem i-tym w optymalnej sekwencji zadań, co oznacza, że $x_{pi} = x_{iz} = 1$. Jeśli usuniemy zadanie i-te z optymalnej sekwencji, to otrzymamy rozwiązanie (nie koniecznie optymalne) ZKS z wartością funkcji celu równą: $T^* + t_{pi} + t_{iz} - t_{pz} - z_i$. Musi więc być spełniona nierówność: $T^* \geq T^* + t_{pi} + t_{iz} - t_{pz} - z_i$, co przeczy założeniu (11). □

Jeśli wiemy, że pewne zadanie $x \in J$ należy do optymalnej sekwencji zadań ($x \in \hat{S}$) oraz funkcja kosztów przezbrojeń spełnia warunek trójkąta, tzn. $\forall_{k,l,v}\ t_{kl} + t_{lv} \geq t_{kv}$, to możemy sformułować następujący warunek przynależności, którego dowód pomijamy, gdyż jest podobny do dowodu E 1.

Własność M 1. *Załóżmy, że funkcja kosztów przezbrojeń spełnia warunek trójkąta. Jeśli zadanie x należy do pewnego rozwiązania optymalnego problemu ZKS i jeśli zadanie i-te spełnia warunek:*

$$t_{zi} + t_{iz} - z_i \leq 0, \tag{12}$$

to również zadanie i-te należy do optymalnej sekwencji zadań problemu ZKS.

Własność E 2. *Jeśli pewna para zadań spełnia $x,i \in J$ spełnia warunek (12) oraz wiadomo, że zadanie i-te nie należy do optymalnej sekwencji zadań, to również zadanie x-te nie należy do optymalnej sekwencji zadań.*

Własność eliminacyjna E2 ściśle wiąże się z własnością M1. Sprawdzenie warunku (12) pozwala na wygenerowanie podzbiorów zadań, które w całości albo wchodzą, albo też w całości nie wchodzą do rozwiązania optymalnego.

Własność M 2 *Jeśli $x \in J$ należy do optymalnej sekwencji zadań oraz dla pewnego zadania $i \in J$ spełniony jest warunek:*

$$t_{xi} + t_{iz} - t_{xz} < z_i, \qquad z \neq x, \quad z \neq i, \quad z \in J \tag{13}$$

to zadanie i-te również należy do optymalnej sekwencji zadań.

Własność M2, podobnie jak własność E1, jest trudniejsza (bardziej pracochłonna) w sprawdzaniu niż warunek (12), z którego wynikają własności E2 i M1.

W przypadku rozwiązywania zadań ZKS o dużych rozmiarach wydaje się celowe sprawdzanie warunków (11) i (13) tylko w pewnym otoczeniu (ze względu na wartości przezbrojeń) badanych zadań. Sposób wyznaczania tych otoczeń jest problemem otwartym.

4. Analiza wybranych zagadnień ZKS

Istnieją klasy zagadnień komiwojażera, dla których daje się skonstruować wielomianowe algorytmy ich rozwiązywania (por. [1], [4]). Rozpatrzmy dwie z tych klas, w których przezbrojenia są postaci:

$$1) \quad t_{ij} = a_i + b_j, \qquad i,j \in J, \quad a_i, b_i \geq 0 \tag{14}$$

$$2) \quad t_{ij} = | a_i - a_j |, \qquad i,j \in J \tag{15}$$

W pierwszym przypadku zagadnienie komiwojażera staje się trywialne – każdy porządek jest optymalny. W drugim przypadku zbiór rozwiązań optymalnych tworzą ciągi zadań uporządkowane rosnąco (lub malejąco) zgodnie z wartościami a_i (uporządkowanie na prostej).

Problem ZKS, jeśli przezbrojenia spełniają warunek (14), prowadzi nas do następującego zagadnienia. Niech $y_i = 1$, jeśli zadanie i-te jest realizowane, $y_i = 0$ – w przeciwnym przypadku. Należy maksymalizować: $\sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i - b_i) \cdot y_i$. Wybieramy te zadania, dla których $z_i - a_i - b_i > 0$. Sytuacja komplikuje się, jeśli rozpatrzymy kryteria F_2 i F_3.

Podobnie, problem z przezbrojeniami typu (15), przy kryterium typu F_1, posiada proste rozwiązanie, które przedstawiamy poniżej. Wykorzystując własności rozwiązania odpowiedniego problemu komiwojażera, problem można sformułować w następującej postaci. Przyjmijmy, że J uporządkowano według niemalejących wartości a_i, $i \in J$. Ponadto istnieje fikcyjne zadanie o numerze zero i wartości a_0, które pozwala wprowadzić przezbrojenia potrzebne do rozpoczęcia wykonywania zadania i-tego jako pierwszego, tzn. $t_{0i} = | a_0 - a_i |$. Przyjmijmy, że fikcyjne zadanie jest zawsze wykonywane jako pierwsze. Jeśli wszystkie zadania mają zostać zrealizowane, to łatwo za-

uważyć, że optymalną kolejnosc określa położenie liczby a_0 względem pozostałych liczb $a_1, a_2, \ldots a_n$. Możemy tu wyróżnić dwa przypadki:

1. $| a_0 - a_1 | < | a_0 - a_n |$, wtedy optymalną sekwencją jest uporządkowanie według niemalejących a_i ,

2. $| a_0 - a_1 | > | a_0 - a_n |$, wówczas optymalną sekwencją zadań jest ich uporządkowanie według nierosnących wartości a_i (odwrotnie niż poprzednio),

W przypadku selekcji zadań przy kryterium postaci F_1 i założeniu (15) problem optymalizacyjny sprowadza się do problem wyboru, łatwo przy tym wykazać, że jeśli i-te zadanie jest realizowane, to realizowane są również wszystkie zadania j-te: spełniające warunki: $a_j \geq a_i$, $a_j \leq a_0$ dla $a_i < a_0$ lub $a_j < a_i$, $a_j \geq a_0$ dla $a_i > a_0$. Załóżmy, że $a_i \leq a_{i+1}, i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Wówczas należy wyznaczyć jedynie numery skrajnych (ze względu na wartości a_i), realizowanych jeszcze zadań, to znaczy wyznaczyć zadania v, w takie, że następujące wyrażenie osiąga maksimum na zbiorze $v \leq w$ $v, w \in J$:

$$\sum_{i=v}^{n} - (a_w + a_v + \min [| a_0 - a_v |, | a_0 - a_w |]) \tag{16}$$

5. Zagadnienie szeregowania z kryterium kosztów F_2

Jako problem bazowy przyjmiemy zagadnienie komiwojażera z kryterium minimalizacji czasu pobytu zdań w systemie (z ewentualnym uwzględnieniem wag). Problemy takie rozpatrywane były, między innymi, w pracach [1], [7]. Należą one do problemów NP-zupełnych nawet wtedy, gdy przyjmie się, że czasy wykonywania zadań p_i $i \in J$ są pomijalnie małe (co wykazano w [1]). Dopuszczenie możliwości nie-wykonywania zadań prowadzi nas do zadania konserwatora (*Travelling Repairman*) z selekcją, nazywanego dalej ZRS. Model matematyczny ZRS opisany jest następująco. Niech $x_j^l = 1$, jeśli j-te zadanie jest wykonywane jako l-te w kolejności; $x_j^l = 0$ w przeciwnym przypadku. Należy maksymalizować:

$$\sum_{j=n}^{n} \sum_{l=1}^{n} x_j^l \cdot z_j - \sum_{j=1}^{n} x_j^1 \cdot (t_{0i} + p_i) \cdot K - \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} x_i^{l-1} \cdot x_j^l \cdot (K - l + 1) \cdot (t_{ij} + p_j) ,$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{l=1}^{n} x_j^l \leq 1 , \quad j \in J, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j^l \leq 1 , \quad l = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^l \leq \sum_{j=1}^{n} x_j^{l+1}, \; l = 1,2,\ldots,n-1$$

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^l = K, \quad K = 1,2,\ldots n$$

$$K \in \{1,2,\ldots,n\}, \quad x_j^l \in \{0,1\}, \quad j \in J, \quad l = 1,2,\ldots n.$$

Model ten jest związany z zagadnieniem kwadratowego przydziału, który jest w ogólnym przypadku problemem NP-zupełnym. O ile autorce wiadomo, nie rozpatrywano dotąd żadnych zagadnień tego typu z selekcją zadań. Wiemy naturalnie, że jeśli wszystkie $t_{ij} = 0$, to problem bez selekcji ma znane rozwiązanie (algorytm Smitha [5]).

Dalej pokażemy, że jeśli $t_{ij} = a_i + b_j$, $i, j \in J$, to problem zarówno bez, jak i z selekcją zadań daje się sprowadzić do zagadnienia przydziału, które jest zagadnieniem klasy P [6]. Rozpatrzmy najpierw problem bez selekcji. Ponieważ $x_i^{k-1} \cdot x_j^k \cdot t_{ij} = x_i^{k-1} \cdot a_i + x_j^k \cdot b_j$, $i, j \in J$, więc należy maksymalizować:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^l \cdot [(n-l+1)\cdot(p_i + b_i) + (n-l)\cdot a_i] \tag{17}$$

przy ograniczeniach: $x_i^l \in \{0,1\}$, $i \in J$, $l = 1,2,\ldots n$ oraz

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^l = 1, \quad l = 1,2,\ldots,n, \qquad \sum_{l=1}^{n} x_i^l = 1, \quad i \in J. \tag{18}$$

Jest to zagadnienie przydziału ze współczynnikami $A_i^l \stackrel{\text{def}}{=} z_i - (n-l+1)\cdot(p_i + b_i) - (n-l)\cdot a_i$, $i, l \in \{1,2,\ldots,n\}$, przy czym A_i^l mogą być zarówno dodatnie, jak i ujemne. Jeśli wszystkie $A_i^l \geq 0$, to rozwiązanie problemu bez selekcji jest również rozwiązaniem problemu dopuszczającego selekcję zadań. W ogólnym przypadku wprowadzenie selekcji prowadzi do konieczności rozwiązania n zadań przydziału, w których dopuszcza się zrealizowanie dokładnie $K = 1,2,\ldots,n$ zadań. Pytaniem otwartym jest problem istnienia algorytmu wielomianowego o mniejszej złożoności.

6. Zadania szeregowania z kryterium kosztowym F_3

Problem szeregowania zadań (bez selekcji) na jednej maszynie przy kryterium F_3 i braku przezbrojeń (t_{ij}, $i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$) jest problemem silnie NP-zupełnym (por. [5]). W pracy [9] autorka rozważała zagadnienie tego typu z przezbrojeniami. Większość algorytmów rozwiązywania zadań tej klasy bazuje na ideach programowania dynamicznego (jako metody podziału bądź metody wyznaczania oszacowań). Wprowadzenie możliwości niezrealizowania pewnych zadań (selekcja) nie zmienia w istotny sposób trudności tkwiących w zadaniach z kryterium kosztów F_3. Autorce wydaje się,

że istniejące algorytmy da się bez większych trudności zastosować do rozwiązywania odpowiednich zadań szeregowania z selekcją. Wymaga to dalszych szczegółowych badań.

LITERATURA

[1] Afrati E., Cosmadakis S., Papadimitriou CH., Papageorgiou G., Papakonstantinou N. : The Complexity of the Traveling Repairmen Problem, Informatique theoretique et Applications (Theoretical Informatics and Applications) vol. 20 nr 1 (1986) s. 79 – 87.

[2] Balas E. : The Prize Collecting Traveling Salesman Problem, Networks vol. 19 (1989) s. 621 – 636.

[3] Laporte G., Martello S. : Selective Traveling Salesman Problem, May 1987, raport badawczy HEC Montreal (ISSN 0711 - 2440).

[4] Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnoy Kan, Shmoys D. B. : The Traveling Salesman Problem, 1985 John Wiley & Sons, New York.

[5] Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnoy Kan, Shmoys D. B. : Sequencing and Scheduling: Algorithms and Complexity, 1989 raport badawczy BS - R8909, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam.

[6] Lipski W. : Kombinatoryka dla programistów, WNT, Warszawa 1982.

[7] Mouma C. L., Rotts C. N. : On the Complexity of Scheduling with Batch Set-up Times, 1987 raport badawczy University of Southampton.

[8] Skubalska E. : Zagadnienie planowania tras pojazdów. Modele matematyczne. Archiwum Automatyki i Telemechaniki z. 4 1984 s. 483 – 499.

[9] Skubalska E. : Zagadnienie optymalizacji kolejności operacji z przezbrojeniami przy kryterium minimalizacji kosztów. ZNPŚL ser. Aut. z. 63 1982 s. 139 – 151.

Recenzent: Prof.dr h.inz. Jerzy Klamka
Wpłynęło do Redakcji do 30.04.1992 r.

Abstract: The aim of this paper is to formulate a new class of scheduling problems with setup costs. Three criterion functions are considered, based on the idea of overall profit. The distinguishing feature of these problems is introducing a new decision variable. Namely, one is allowed to choose a subset of all tasks to be performed. Theoretical results, which allow to check whether a given task is sufficiently profitable to be performed, are stated. They form a bases for constructing numerical algorithms. In some cases, polynomial time algorithms are given.