ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI SLĄSKIEJ 1992
Seria: AUTOMATYKA z. 109 Nr kol. 1175

Eugeniusz Toczylowski

Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej

ALGORYTMY HARMONOGRAMOWANIA PRODUKCJI PORCJAMI O NISKIEJ ZŁOŻONOŚCI OBLICZENIOWEJ [1]

ALGORITHMS WITH LOW COMPLEXITY FOR THE UNCAPACITATED LOT-SIZE SCHEDULING PROBLEMS

ALGORITHMEN DER HARMONOGRAMMBILDUNG FÜR DIE PRODUKTION IM PARTIEN MIT NIEDRIGEN RECHENKOMPLIZIERHEIT

Streszczenie:
W pracy przedstawiono nowe podejście do rozwiązywania wieloetapowych problemów harmonogramowania produkcji porcjami wykorzystujące właściwości funkcji kawałkami liniowych wklęsłych. Opracowano algorytm o złożoności $O(T \log T)$ dla problemu harmonogramowania bez zaległości z występującymi kosztami wznawiania produkcji lub rezerwacji zasobów oraz algorytm o złożoności $O(T^2)$ dla problemu z zaległościami.

Summary: The paper presents a novel approach for solving the multistage uncapacitated lot-size scheduling problems, which exploits the properties of the piecewise concave linear functions. An $O(T \log T)$ algorithm is developed for problems with startup and reservation costs as well as an $O(T^2)$ algorithm for the uncapacitated problem with backlogging allowed.

Zusammenfassung: Im Beitrag wird eine neue Einstellung zum Lösung der Probleme aus mehrere Etappen bestehende Harmonogrammbildung für die Produktion im Partien mit der Ausnutzung der Eigenschaften der streckenlinearen Funktionen. Ein Algorithmus mit Komplizierheit $O(t \log T)$ für die Harmonogrammbildung ohne Rückstände und mit Kosten der Wiederaufnahme der Produktion oder Kosten des Vorbehaltes des Ressourcen sowie ein Algorithmus mit Komplizierheit $O(T^2)$ mit Rückstände werden demonstriert.

1. Sformułowanie problemu

W klasycznym sformułowaniu Wagnera i Whitina [7] w podstawowym problemie harmonogramowania produkcji porcjami w horyzoncie czasu złożonym z T etapów jest rozważana produkcja porcji pojedynczego wyrobu, dla którego jest znane zapotrzebowanie w każdym z etapów. Wznowienie produkcji w danym etapie wiąże się z powstawaniem niezerowego kosztu wznawiania, niezależnego od wielkości produkcji w danym etapie. W problemie tym należy wyznaczyć etapy produkcyjne oraz wielkości porcji produkcyjnych w etapach, tak aby zrealizować zapotrzebowanie w każdym etapie oraz zminimalizować sumaryczne koszty wznawiania produkcji, koszty samej produkcji oraz koszty magazynowania. Matematycznie problem podstawowy zapisujemy następująco:

Problem P

$$\min Z = \sum_{t=1}^{T} (s_t v_t + c_t x_t + h_t^+ I_t^+) \tag{1.1}$$

przy ograniczeniach

$$I_{t-1}^+ + x_t - I_t^+ = d_t \tag{1.2}$$

$$0 \le x_t \le M_t v_t \tag{1.3}$$

$$I_t^+ \ge 0 \tag{1.4}$$

$$I_0 = I_T = 0;\ v_t \in \{0,1\} \tag{1.5}$$

[1] Praca częściowo finansowana przez Komitet Badań Naukowych

przy czym zmienne decyzyjne zadania to : x_t — wielkość produkcji w okresie t, v_t - zmienna binarna równa jeden, gdy w etapie t wznowiono produkcję wyrobu, I_t^+ - stan zapasu wyrobu na koniec etapu t. Parametrami zadania są: s_t - koszt wznawiania produkcji, c_t - jednostkowy koszt produkcji w etapie t, oraz h_t^+ koszt magazynowania jednostki wyrobu w etapie, d_t - zapotrzebowanie na wyrób w etapie t, M_t - dostatecznie duża stała, nie ograniczająca wielkości porcji w etapie t. W literaturze powyższy problem jest nazywany *dynamicznym zadaniem harmonogramowania produkcji porcjami bez ograniczeń zasobowych* (ang. uncapacitated lot-size scheduling problem). Problem ten można przekształcić do postaci równoważnej, w której eliminuje się zmienne binarne (v_t), natomiast funkcja celu staje się nieciągła i wklęsła względem x. Z właściwości problemu minimalizacji funkcji wklęsłej na wielościanie wypukłym wynika, że rozwiązań optymalnych można poszukiwać w zbiorze punktów wierzchołkowych wielościanu, którym odpowiadają rozwiązania bazowe. Ze struktury ograniczeń (1.2) wynika, iż dla rozwiązania bazowego w każdym równaniu (1.2) dokładnie jedna zmienna I_{t-1} lub x_t może przybierać wartości niezerowe, czyli rozwiązanie spełnia warunek $I_{t-1}x_t = 0, t = 1, \ldots, T$. Mówiąc inaczej, niezerowa produkcja x_t w okresie t jest możliwa tylko po wyzerowaniu stanu zapasów I_{t-1} na koniec etapu poprzedniego. Powyższa właściwość stała się podstawą opracowania przez Wagnera-Whitina algorytmu o złożoności $O(T^2)$ opartego na metodzie programowania dynamicznego [7].

W przypadku gdy są dopuszczalne zaległości w wysyłce wyrobu, a funkcje kary za nieterminowość są liniowe, rozważa się następujące zadanie harmonogramowania:

Problem PB

$$\min Z = \sum_{t=1}^{T}(s_t v_t + c_t x_t + h_t^+ I_t^+ + h_t^- I_t^-) \tag{1.6}$$

przy ograniczeniach

$$I_{t-1}^+ - I_{t-1}^- + x_t - I_t^+ + I_t^- = d_t \tag{1.7}$$

$$0 \le x_t \le M_t v_t \tag{1.8}$$

$$I_t^+ . I_t^- \ge 0 \tag{1.9}$$

$$I_0 = I_T = 0; \; v_t \in \{0, 1\} \tag{1.10}$$

przy czym I_t^- jest zmienną oznaczającą nieujemny stan zaległości w wysyłce wyrobu na koniec etapu t, natomiast $I_t = I_t^+ - I_t^-$ jest sumarycznym stanem zapasu wyrobu na koniec etapu t mogącym przybierać wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne (to ostatnie oznacza zaległość). Parametr h_t^- oznacza koszt zaległości wysyłki jednostki wyrobu w etapie t. Dla powyższego problemu algorytm o najniższej złożoności obliczeniowej $O(T^3)$ został podany przez Zangwilla [8].

Problem podstawowy P w sformułowaniu klasycznym jest często wykorzystywany przy rozwiązywaniu bardziej złożonych, a zarazem bardziej realistycznych problemów harmonogramowania produkcji lub odnawiania zapasów wielu wyrobów po relaksacji ograniczeń magazynowych lub produkcyjnych [4]. Model ten niestety nie uwzględnia wpływu stanu końcowego systemu z poprzedniego etapu na warunki produkcji w następnym etapie, może więc być dość dokładny tylko w przypadku wykorzystywania zasobów produkcyjnych w jednym etapie przez *wiele* wyrobów, gdy długości etapów są dostatecznie długie, czyli gdy kontynuowanie produkcji danego wyrobu w dwóch okresach sąsiadujących nie jest zjawiskiem częstym.

W przypadku gdy okresy czasu są krótkie, gdy produkcja jednego wyrobu może trwać nawet przez kilka etapów bez przerwania, wpływ stanu z okresu poprzedzającego na koszt realizacji produkcji w okresie bieżącym jest zasadniczy. Dla takiego przypadku bardziej adekwatne modele winny uwzględniać, obok kosztów wznawiania, koszty rezerwacji zasobów w przypadku, gdy jest korzystne wznawianie produkcji w jednym z okresów poprzedzających i utrzymanie w stanie aktywnym zasobów (czyli rezerwacja zasobów) aż do okresu bieżącego [3] oraz ewentualnie koszty zwalniania zasobu [2]. Znany w literaturze przedmiotu problem harmonogramowania z kosztami wznawiania i rezerwacji [3] można zapisać następująco:

Problem PR

$$\min Z = \sum_{t=1}^{T}(s_t v_t + k_t y_t + c_t x_t + h_t^+ I_t^+)$$

przy ograniczeniach

$$I_{t-1}^+ + x_t - I_t^+ = d_t \tag{1.12}$$

$$0 \le x_t \le M_t y_t \tag{1.13}$$
$$y_t - y_{t-1} \le v_t \tag{1.14}$$
$$I_t^+ \ge 0 \tag{1.15}$$
$$I_0 = I_T = 0;\ v_t, y_t \in \{0,1\} \tag{1.16}$$

gdzie y_t jest zmienną binarną równą jeden, gdy w etapie t zarezerwowano zasoby na produkcję wyrobu, natomiast k_t jest kosztem rezerwacji zasobu gotowego do produkcji w etapie t (ew. kosztem związania zasobu tak, że nie można go w tym czasie wykorzystywać do produkcji innego wyrobu). Pozostałe zmienne oraz parametry zadania zostały zdefiniowane w problemie P. Dla powyższego zadania Karmarkar i in. [3] podali algorytm o najniższej złożoności obliczeniowej $O(T^2)$.

Dla wygody dalszych rozważań pokażemy teraz, że bez straty ogólności można rozważać jedynie szczególne przypadki problemów P, PR, PB, w których koszty magazynowania są zerowe, czyli $h_t^+ = 0\ \forall t$.

Własność 1. *Rozwiązania optymalne problemu PB są identyczne z rozwiązaniami optymalnymi problemu przetransformowanego $\overline{PB}$, z następującymi współczynnikami:* $\bar{s}_t = s_t, \bar{c}_t = c_t - \sum_{s<t} h_s^+, \bar{h}_t^+ = 0, \bar{h}_t^- = h_t^- + h_t^+$.

Dowód. W celu eliminacji zmiennych I_t^+ zauważmy, że $I_s^+ - I_s^- = \sum_{1\le t\le s}(x_t - d_t)$. Stąd $\sum_{s=1}^T h_s^+ I_s^+ = \sum_{s=1}^T \sum_{t\le s} h_s^+(x_t - d_t) + \sum_{s=1}^T h_s^- I_s^- = \sum_{t=1}^T \sum_{s\ge t} x_t + \sum_{s=1}^T h_s^- I_s^- - \sum_{t=1}^T h_t \sum_{s\le t} d_s$. Dokonaliśmy zatem równoważnej transformacji problemu PB do problemu $\overline{PB}$ z następującymi współczynnikami: $\bar{s}_t = s_t, \bar{c}_t = c_t + \sum_{s=t}^T h_s, \bar{h}_t^+ = 0, \bar{h}_t^- = h_t^- + h_t^+$. Odjęcie od *wszystkich* współczynników kosztu $c_t, t = 1, \ldots, T$ stałej $\sum_{s=1}^T h_s^+$ nie zmienia rozwiązań zadania PB, można zatem przyjąć $\bar{c}_t = c_t - \sum_{s<t} h_s^+$. □

W przypadku braku zaległości dla problemów P, PR otrzymujemy dowód analogicznej transformacji po przyjęciu $I_t^- = 0\ \forall t$. W dalszej części pracy zakładamy zatem, że we wszystkich rozważanych dalej problemach $h_t^+ = 0\ \forall t$.

Powyższe i zbliżone postaci zadań harmonogramowania pojawiają się często jako podproblemy obliczeniowe wielu systemów planowania produkcji, np. MRP, MRPII. Nawet wtedy, gdy w algorytmach planowania produkcji nie uwzględnia się ograniczeń zasobowych, a rozważa się oddzielnie harmonogramowanie produkcji pojedynczych wyrobów, liczba rozważanych wyrobów sięga zazwyczaj wielu tysięcy i powyższe algorytmy dokładne są uważane za zbyt pracochłonne. W praktyce są najczęściej stosowane różnorodne algorytmy heurystyczne [1]. Efektywność stosowania w praktyce bardziej złożonych metod harmonogramowania produkcji wielu wyrobów przy występowaniu wspólnych ograniczeń zasobowych, np. metod wykorzystujących relaksacje Lagrange'a ograniczeń zasobowych, wymaga zatem poszukiwania bardziej efektywnych algorytmów dokładnych dla problemów P, PR i PB.

Ostatnio Wagelmans, Hoesel i Kolen [6] uzyskali efektywny algorytm dla problemu P, którego złożoność jest równa $O(T \log T)$. Algorytm ten, podobnie jak algorytm Wagnera-Whitina, jest algorytmem typu programowania dynamicznego wykorzystującym rekursję zwrotną. Algorytm ten jest dość złożony i bezpośrednio związany z efektywną metodą rozwiązywania problemu dualnego do zadania równoważnego sformułowanego w postaci problemu lokalizacji obiektu [6]. Metoda wykorzystuje szczególne właściwości strukturalne problemu i nie została uogólniona na wersje PR, PB problemu harmonogramowania porcjami.

W tej pracy przedstawiamy inne podejście do rozwiązywania wieloetapowych problemów harmonogramowania produkcji porcjami, w którym kryterium jakości trajektorii optymalnych jest pamiętane i uaktualniane efektywnie, wykorzystując do tego właściwości funkcji kawałami liniowych wklęsłych. W wyniku wykorzystania tych właściwości opracowano stosunkowo proste algorytmy harmonogramowania produkcji porcjami o najniższej znanej dotychczas złożoności obliczeniowej. W rozdziałach 2 i 4 podano algorytmy o złożoności $O(T \log T)$ dla problemu P oraz dla problemu harmonogramowania PR z występującymi kosztami rezerwacji. W rozdziale 3 przedstawiono algorytm o złożoności $O(T^2)$ dla problemu PB z zaległościami. Przedstawiona w pracy metodę można wykorzystywać do rozwiązywania innych problemów harmonogramowania, przykładowo dla problemu P w przypadku występowania ograniczeń na pojemności magazynów można uzyskać algorytm o złożoności $O(T^2)$ [5].

2. Algorytm rozwiązywania problemu podstawowego

Metoda rozwiązywania problemu P wynika z jego reprezentacji w postaci wieloetapowego problemu decyzyjnego złożonego z T etapów, przy czym obliczenia są realizowane począwszy od etapu pierwszego. W etapie t rozważa się, w zależności od kosztów, bądź możliwość produkcji oraz magazynowania w tym etapie, bądź też jedynie magazynowanie w tym etapie wyrobów wyprodukowanych w okresach poprzedzających. W tym pierwszym przypadku niezerowa produkcja x_t w okresie t jest możliwa tylko po wyzerowaniu stanu zapasów I_{t-1} na koniec etapu poprzedniego. (Przypomnijmy, że koszty magazynowania przyjmujemy za zerowe.)

Wprowadźmy zmienną decyzyjną x oznaczającą w etapie t łączną (zakumulowaną) liczbę dotychczas wyprodukowanych wyrobów, począwszy od etapu pierwszego. Oznaczmy przez $Q^t(x)$ funkcję określającą optymalny koszt produkcji (i magazynowania) w okresach $1, \ldots, t$ przy założeniu realizacji zakumulowanej produkcji x.

Kluczowym elementem algorytmu jest rekurencyjne wyznaczanie wykresu funkcji $Q^t(x)$ na podstawie znanego wykresu funkcji $Q^{t-1}(x)$. Wykres funkcji $Q^t(x)$ jest określony dla $x \geq D_t$, gdzie $D_t = \sum_{s \leq t} d_s$ oznacza zakumulowaną wielkość zapotrzebowania na koniec etapu t. W pierwszym etapie $Q^1(x)$ jest funkcją stałej opłaty, gdyż $Q^1(0) = 0$ oraz dla $x > 0$ wartość $Q^1(x) = s_1 + c_1 x$. W dalszych etapach, jak pokażemy, $Q^t(x)$ staje się funkcją kawałkami liniową wklęsłą.

W celu rekurencyjnego wyznaczenia wykresu funkcji $Q^t(x)$ dla $x \geq D_t$ na podstawie znanego wykresu funkcji $Q^{t-1}(x)$ dla $x \geq D_{t-1}$ wykorzystamy sformułowaną wyżej obserwację, iż niezerowa produkcja x_t w okresie t jest możliwa tylko po wyzerowaniu stanu zapasów I_{t-1} na koniec etapu poprzedniego, czyli gdy w kroku poprzednim zachodzi $x = D_{t-1}$. Jeżeli w etapie t jest realizowana niezerowa produkcja o wielkości $x_t = x - D_{t-1}$, to wypadkowy koszt zakumulowany jest równy $P^t(x) = Q^{t-1}(D_{t-1}) + s_t + c_t(x - D_{t-1})$. Z drugiej strony, jeżeli w etapie t produkcja x_t jest zerowa, to $Q^t(x) = Q^{t-1}(x)$. Stąd, dla danego $x \geq D_t$, zachodzi

$$Q^t(x) = \min\{Q^{t-1}(x), P^t(x)\}$$

Trajektoria optymalna doprowadzająca zerowy stan początkowy $x = D_0 = 0$ do stanu $x = D_t$ w etapie t jest scharakteryzowana w kroku t przez następujące wielkości:

Q_t = $Q^t(D_t)$,

p_t = numer etapu *poprzednika*, czyli takiego etapu poprzedzającego etap t, w którym ostatnio stan zapasu I_{p_t} był równy zero, w następnym etapie $s = p_t + 1$ została zrealizowana niezerowa porcja produkcyjna $x_s = D_t - D_{p_t}$, natomiast w etapach $k = s + 1, \ldots, t$ produkcja jest zerowa, czyli $x_k = 0$.

Zauważmy, że dla ustalonego t poprzednik p_t wynika ze znajomości aktywnego odcinka funkcji $Q^t(x)$ w punkcie D_t, tzn. jeżeli zachodzi $Q^t(D_t) = P^s(D_t)$, to ostatnim etapem produkcyjnym jest etap s, czyli $p_t = s - 1$.

Rozwiązywanie problemu P polega na wyznaczeniu trajektorii optymalnej doprowadzającej w T krokach zerowy stan początkowy do stanu $x = D_T$ w etapie T. Na początku etapu t znana jest trajektoria częściowa dla pierwszych $t - 1$ etapów w postaci zbioru trójek (D_s, Q_s, p_s), $0 < s < t$. Ponadto w poprzednim kroku jest wyznaczony wykres funkcji $Q^{t-1}(x)$ dla $x \geq D_{t-1}$. W kroku t jest obliczana trójka (D_t, Q_t, p_t) oraz wykres funkcji $Q^t(x)$ dla $x \geq D_t$. A oto ogólny algorytm rekurencyjny wyznaczania trajektorii optymalnej oraz wykresu funkcji $Q^T(x)$.

Algorytm AP
begin
$t := 1$; $Q^1(x) := s_1 + c_1 x$;
$Q_1 := Q^1(D_1)$; $p_1 := 0$;
repeat
$t := t + 1$; $P^t(x) := Q^{t-1}(D_{t-1}) + s_t + c_t(x - D_{t-1})$;
z wykresu $Q^{t-1}(x)$ usuń odcinki P^s nieaktywne dla $x \geq D_t$;
dla $x \geq D_t$ wyznacz wykres funkcji $Q^t(x) := \min\{Q^{t-1}(x), P^t(x)\}$
$Q_t := Q^t(D_t)$; $p_t := s - 1$; gdzie P^s jest aktywnym odcinkiem funkcji $Q^t(x)$ w punkcie D_t dla $s \leq t$;
until $t = T$
end.

W celu konstrukcji funkcji $Q^t(x)$ w kroku t algorytmu jest dodawany do wykresu kawałkami liniowej funkcji Q^{t-1} (co najwyżej jeden, o ile istnieje) aktywny odcinek liniowej funkcji kosztów P^t związany z ewentualną produkcją w etapie t. Niech L_k oznacza linię prostą reprezentującą na wykresie funkcję $P^k = q_k + c_k x$, gdzie $q_k = Q^{t-1}(D_{t-1}) + s_t - c_t D_{t-1}$. Jeżeli dwie linie L_k, L_l nie są równoległe (czyli gdy $c_k \neq c_l$), to przecinają się w punkcie o współrzędnej rzędnej θ_{kl} wyznaczonej z warunku $q_k + c_k\theta_{kl} = q_l + c_l\theta_{kl}$, tzn., $\theta_{kl} = \frac{q_l - q_k}{c_k - c_l}$. Dwa sąsiadujące ze sobą kawałki liniowe łączą się ze sobą w punkcie wierzchołkowym wyznaczonym w wyniku przecięcia się tych prostych.

Przyjmiemy konwencję, iż jeżeli odcinek prostej L_k poprzedza bezpośrednio odcinek prostej L_l, to rzędna punktu wierzchołkowego związanego z przecięciem tych prostych $\xi_k = \theta_{kl}$ jest wiązana z lewym odcinkiem, czyli z prostą L_k. Z każdym liniowym odcinkiem L_k funkcji $Q^t(x)$ jest ponadto związany numer etapu $s, s \leq t$, w którym jest realizowana niezerowa produkcja o wielkości $x - D_{s-1}$ związana z tym kawałkiem funkcji. Wartość odciętej punktu wierzchołkowego o rzędnej równej ξ_s wynosi $Q_s = q_s + c_s\xi_s$. Aktywne odcinki L_s funkcji $Q^t(x)$ dla $x \geq D_t$ można zatem pamiętać w postaci ciągu par (ξ_s, Q_s) w porządku rosnących wartości ξ_s.

Usuwanie z wykresu funkcji $Q^{t-1}(x)$ nieaktywnych odcinków L_s dla $x \geq D_t$ sprowadza się do usunięcia tych par (ξ_s, Q_s), dla których $\xi_s \leq D_t$.

Analiza złożoności obliczeniowej. Łączna złożoność algorytmu AP wynosi $O(T \log T)$. Wynika to z faktu, że dodanie w kroku t pojedynczego odcinka L_t można zrealizować w czasie $O(\log T + r)$, gdzie r jest liczbą odcinków L_k zasłanianych przez L_t, a zatem usuwanych z wykresu funkcji $Q^t(x)$. Ponieważ łączna liczba wszystkich odcinków L_k usuwanych w algorytmie w T etapach nie może przekroczyć całkowitej liczby etapów T, więc łączna złożoność algorytmu wynosi $O(T \log T)$. Jeżeli dodatkowo współczynniki problemu pierwotnego $\forall t$ spełniają warunek $c_t \leq c_{t-1} + h_t^+$, to czas działania algorytmu można zredukować do $O(T)$.

Przykład ilustracyjny. Rozważmy pięcioetapowy problem P z następującymi danymi: $T = 5$, $(s_t) = (3,3,3,3,3)$, $(c_t) = (1,1,1,1,1)$, $(h_t^+) = (1,1,1,1,1)$, $(d_t) = (1,2,3,1,1)$. Po transformacji umożliwiającej wyzerowanie kosztów magazynowania otrzymujemy $(\bar{c}_t) = (1,0,-1,-2,-3)$. Dalej obliczamy $(D_t) = (1,3,6,7,8)$. Rys.1 ilustruje wykresy funkcji Q^t uzyskiwane w trakcie działania algorytmu. W kolejnych krokach algorytmu wykonujemy następujące obliczenia:

1: $Q^1(x) = 3 + x$, $D_1 = 1, Q_1 = 4, p_1 = 0$;

2: $P^2(x) = Q_1 + 3 + 0(x-1) = 7$, $Q^2(x) = \min\{Q^1(x), 7\}$, $D_2 = 3, Q_2 = 6, p_2 = 0$;

3: $P^3(x) = Q_2 + 3 - (x-3) = 12 - x$, $Q^3(x) = \min\{Q^2(x), 12 - x\}$, $D_3 = 6, Q_3 = 6, p_3 = 2$;

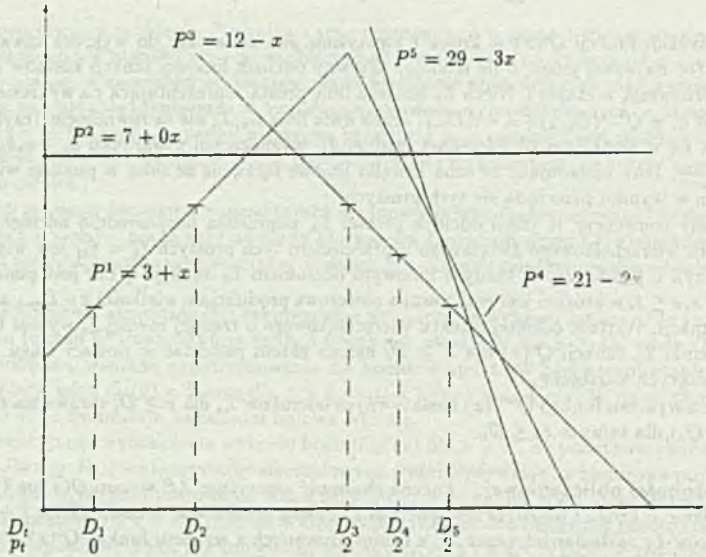
4: $P^4(x) = Q_3 + 3 - 2(x-6) = 21 - 2x$, $Q^4(x) = \min\{Q^3(x), 21 - 2x\}$, $D_4 = 7, Q_4 = 5, p_4 = 2$;

5: $P^5(x) = Q_4 + 3 - 3(x-7) = 29 - 3x$, $Q^5(x) = \min\{Q^4(x), 29 - 3x\}$, $D_5 = 8, Q_5 = 4, p_5 = 2$.

Po zakończeniu Kroku 5 mamy też określoną trajektorię optymalną. Harmonogram optymalny odtwarzamy, idąc zwrotnie od etapu 5 do 1. Ponieważ w etapie $t = 5$ zachodzi $p_t = 2$, więc w etapie $p_t + 1 = 3$ jest realizowana produkcja $x_3 = D_t - D_{p_t} = 5$. Dalej podstawiamy $t = p_t$ i kontynuujemy obliczenia, tzn. $t = 2, p_t = 0$, czyli w etapie 1 jest realizowana produkcja $x_1 = D_2 - D_0 = 3$. Ponieważ $p_t = 0$, na tym kończymy działanie algorytmu.

3. Algorytm rozwiązywania problemu z zaległościami

Metoda rozwiązywania problemu z zaległościami PB jest uogólnieniem metody przedstawionej w rozdziale poprzednim dla problemu P.



Rys. 1. Wykres funkcji kawałkami liniowej konstruowanej przez Algorytm AP
Fig. 1. The diagram of the piece-wise linear function constructed by Algorithm AP

Analogicznie jak poprzednio, w etapie t rozważa się, w zależności od kosztów, bądź możliwość produkcji oraz magazynowania w tym etapie, bądź też jedynie magazynowanie w tym etapie wyrobów wyprodukowanych w okresach poprzedzających. W pierwszym przypadku niezerowa produkcja x_t w okresie t jest jednak możliwa nie tylko po wyzerowaniu stanu zapasów I_{t-1} na koniec etapu poprzedniego, ale również wtedy, gdy w jednym z okresów poprzedzających $r, r < t$, stan zapasów $I_r = 0$, w dalszych okresach $s = r+1, \ldots, t-1$ jest zaległość, natomiast w etapie t wielkość produkcji wynosi $x_t = x - D_r$ [8].

Tak jak i poprzednio zmienna decyzyjna x oznacza w etapie t łączną (zakumulowaną) liczbę dotychczas wyprodukowanych wyrobów, począwszy od etapu pierwszego. Oznaczamy przez $Q^t(x)$ funkcję określającą optymalny koszt produkcji (i magazynowania) w okresach $1, \ldots, t$ przy założeniu realizacji produkcji x.

Jeżeli dla danego r, $0 \le r < t$, w etapie t jest realizowana niezerowa produkcja o wielkości $x_t = x - D_r$, to wypadkowy koszt $P^{rt}(x)$ zakumulowany w etapie t dla zakumulowanej produkcji $x \ge D_t$ jest równy sumie zakumulowanego kosztu do etapu r włącznie, kosztów zaległości w etapach $r+1, \ldots, t-1$ oraz kosztu produkcji porcji $x - D_r$ w etapie t, czyli

$$P^{rt}(x) = Q^r(D_r) + \sum_{s=r+1}^{t-1} h_s^- D_{rs} + s_t + c_t(x - D_r)$$

gdzie $D_{rt} = D_t - D_s = d_{s+1} + \cdots + d_t$. Z drugiej strony, jeżeli w etapie t produkcja x_t jest zerowa, to $Q^t(x) = Q^{t-1}(x)$. Stąd, dla danego $x \ge D_t$, zachodzi

$$Q^t(x) = \min\{Q^{t-1}(x), \min_{0 \le r < t} P^{rt}(x)\}$$

Zauważając, że funkcje P^{rt} są funkcjami liniowymi o tym samym nachyleniu c_t, otrzymujemy

$$Q^t(x) = \min\{Q^{t-1}(x), \min_{0 \le r < t} S^{rt} + c_t x\}$$

gdzie $S^{rt} = Q^r(D_r) + \sum_{s=r+1}^{t-1} h_s^- D_{rs} + s_t - c_t D_r$. Wystarczy zatem wyznaczyć $S^t = \min_{0 \le r < t} S^{rt}$ i wtedy

$$Q^t(x) = \min\{Q^{t-1}(x), P^t(x)\}$$

gdzie $P^t(x) = S^t + c_t x$ jest najniżej położoną funkcją wybraną z funkcji $P^{rt}(x), r < t$. Łatwo sprawdzić, że jeżeli są znane wartości $S^{r,t-1}$ dla $r < t-1$, to wartości S^{rt} można wyznaczyć rekurencyjnie z następującej zależności

$$S^{rt} = S^{r,t-1} + h^-_{t-1} D_{r,t-1} + (s_t - s_{t-1}) - (c_t - c_{t-1}) D_r \tag{3.1}$$

Trajektoria optymalna doprowadzająca zerowy stan początkowy $x = D_0 = 0$ do stanu $x = D_t$ w etapie t jest scharakteryzowana w kroku t przez trzy wielkości:

Q_t = $Q^t(D_t)$,

p_t = numer etapu *poprzednika*, czyli takiego etapu poprzedzającego etap t, w którym ostatnio stan zapasu I_{p_t} był równy zero,

r_t = numer etapu regeneracyjnego, czyli takiego etapu $s, p_t < s < t$, w którym została zrealizowana niezerowa porcja produkcyjna $x_s = D_t - D_{p_t}$.

Parametry p_t, r_t określają, że po zerowym stanie magazynu I_{p_t} w etapie p_t w następnych etapach $p_t + 1, \ldots, r_t - 1$ powstają ewentualne zaległości, w etapie $s = r_t$ zostaje zrealizowana niezerowa porcja produkcyjna $x_s = D_t - D_{p_t}$, natomiast w etapach $k = s+1, \ldots, t$ produkcja jest zerowa i stan zapasów jest nieujemny.

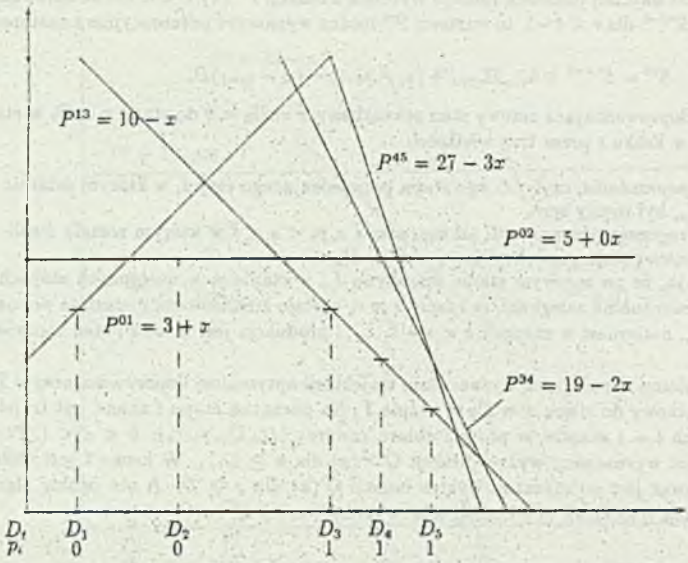
Rozwiązywanie problemu P polega na wyznaczeniu trajektorii optymalnej doprowadzającej w T krokach zerowy stan początkowy do stanu $x = D_T$ w etapie T. Na początku etapu t znana jest trajektoria częściowa dla pierwszych $t-1$ etapów w postaci zbioru czwórek (D_s, Q_s, p_s, r_s), $0 < s < t$. Ponadto w poprzednim kroku jest wyznaczony wykres funkcji $Q^{t-1}(x)$ dla $x \geq D_{t-1}$. W kroku t jest obliczana czwórka (D_t, Q_t, p_t, r_t) oraz jest wyznaczany wykres funkcji $Q^t(x)$ dla $x \geq D_t$. A oto ogólny algorytm rekurencyjny wyznaczania trajektorii optymalnej oraz wykresu funkcji $Q^T(x)$.

Algorytm APB
begin
$t := 1$; $S^{01} := s_1$; $Q^1(x) := s_1 + c_1 x$;
$Q_1 := Q^1(D_1)$; $p_1 := 0$;
repeat
$t := t + 1$;
for $r := 0$ **to** $t-2$ **do** $S^{rt} := S^{r,t-1} + h^-_{t-1} D_{r,t-1} + (s_t - s_{t-1}) - (c_t - c_{t-1}) D_r$;
$S^{t-1,t} := Q^{t-1}(D_{t-1}) + s_t - c_t D_{t-1}$;
$S^t := \min_{0 \leq r < t} S^{rt}$; $P^t(x) := S^t + c_t x$;
z wykresu $Q^{t-1}(x)$ usuń odcinki P^s nieaktywne dla $x \geq D_t$;
dla $x \geq D_t$ wyznacz wykres funkcji $Q^t(x) := \min\{Q^{t-1}(x); P^t(x)\}$
$Q_t := Q^t(D_t)$; $p_t = r$; $r_t := s$, gdzie r, s wynikają z warunku $Q_t = P^{rs}(D_t)$;
until $t = T$
end.

Analiza złożoności obliczeniowej. Łączna złożoność algorytmu APB wynosi $O(T^2)$. Wynika to z faktu, iż w kroku t algorytmu obliczenie S^t kosztuje co najwyżej $O(t)$ operacji arytmetycznych, a zatem w T krokach łączna złożoność procedury obliczania (S^t) nie przekracza $O(T^2)$ operacji. Pozostałe elementy algorytmu są realizowane identycznie jak w algorytmie AP, a zatem ich łączna złożoność nie przekracza $O(T \log T)$. W rezultacie złożoność całego algorytmu wynosi $O(T^2)$. Jeżeli dodatkowo współczynniki problemu PB (pierwotnego) $\forall t$ spełniają warunek $c_t \leq c_{t-1} + h^+_t + h^-_t$, to czas działania algorytmu można zredukować do $O(T \log T)$.

Przykład 2. Rozważmy pięcioetapowy problem P z następującymi danymi: $T = 5$, $(s_t) = (3,3,3,3,3)$, $(c_t) = (1,1,1,1,1)$, $(h^+_t) = (1,1,1,1,1)$, $(h^-_t) = (1,1,1,1,1)$, $(d_t) = (1,2,3,1,1)$. Po transformacji umożliwiającej wyzerowanie kosztów magazynowania otrzymujemy $(\bar{c}_t) = (1,0,-1,-2,-3)$ oraz $(\bar{h}^+_t) = (2,2,2,2,2)$. Dalej $(D_t) = (1,3,6,7,8)$. Rys.2 ilustruje wykresy funkcji Q^t uzyskiwane w trakcie działania algorytmu. W kolejnych krokach algorytmu wykonujemy następujące obliczenia:

1: $Q^1(x) = 3 + x$, $D_1 = 1, S^{01} = 3, Q_1 = 4, p_1 = 0, r_1 = 1$;



Rys. 2. Wykres funkcji kawałkami liniowej konstruowanej przez Algorytm APB
Fig. 2. The diagram of the piece-wise linear function constructed by Algorithm APB

2: $S^{02} = 5, S^{12} = 7, P^2(x) = 5 + 0x = 5,\ Q^2(x) = \min\{Q^1(x), 5\},\ D_2 = 3, Q_2 = 5, p_2 = 0, r_2 = 2$;

3: $S^{03} = 12, S^{13} = 10, S^{23} = 11, P^3(x) = 10 - x,\ Q^3(x) = \min\{Q^2(x), 10 - x\},\ D_3 = 6, Q_3 = 4, p_3 = 1, r_3 = 3$;

4: $S^{04} = 24, S^{14} = 21, S^{24} = 20, S^{34} = 19, P^4(x) = 19 - 2x,\ Q^4(x) = \min\{Q^3(x), 19 - 2x\},\ D_4 = 7, Q_4 = 3, p_4 = 1, r_4 = 3$;

5: $S^{05} = 38, S^{15} = 34, S^{25} = 31, S^{35} = 27, S^{45} = 27, P^5(x) = 27 - 3x,\ Q^5(x) = \min\{Q^4(x), 27 - 3x\},\ D_5 = 8, Q_5 = 2, p_5 = 1, r_5 = 3$.

Po zakończeniu Kroku 5 trajektorię optymalną odtwarzamy, idąc zwrotnie od etapu 5 do 1. Ponieważ w etapie $t = 5$ zachodzi $p_t = 1, r_t = 3$, więc w etapie $r_t = 3$ jest realizowana produkcja $x_3 = D_5 - D_1 = 7$ zaspokajająca potrzeby etapów $2, \ldots, 5$. Dalej podstawiamy $t = p_t$ i kontynuujemy obliczenia, tzn. $t = 1, p_t = 0, r_t = 0$, czyli w etapie 1 jest realizowana produkcja $x_1 = D_1 - D_0 = 1$. Rozwiązanie optymalne jest zatem równe $(x_t) = (1, 0, 7, 0, 0)$.

4. Algorytm rozwiązywania problemu z kosztami rezerwacji

Problem PR będący uogólnieniem problemu podstawowego P uwzględniającym koszty rezerwacji zasobów można przekształcić do postaci równoważnej, w której eliminuje się zmienne binarne, natomiast funkcja celu staje się nieciągła i wklęsła względem zmiennych (x_t). Rozwiązań optymalnych tego problemu można zatem poszukiwać w zbiorze punktów wierzchołkowych wielościanu, którym odpowiadają rozwiązania bazowe. Tak więc, identycznie jak dla problemu P, istnieje rozwiązanie optymalne, spełniające warunek $I_{t-1}x_t = 0, t = 1, \ldots, T$. W odróżnieniu jednak od Problemu P, jeżeli zachodzi $I_t = 0$ dla pewnego t, to problemu nie można bezpośrednio zdekomponować na dwa niezależne podproblemy dla okresów $1, \ldots, t$ oraz $t + 1, \ldots, T$ ze względu na to, że również jest istotna wartość zmiennej y_t określającej, czy zasoby są w stanie gotowości, czy też nie.

Metoda rozwiązywania problemu PR jest uogólnieniem metody programowania dynamicznego prezentowanej dla problemu P. W etapie t rozważa się, w zależności od kosztów, bądź możliwość produkcji oraz magazynowania w tym etapie, bądź też jedynie magazynowanie w tym etapie wyrobów wyprodukowanych w okresach poprzedzających. W pierwszym przypadku niezerowa produkcja x_t w okresie t jest możliwa tylko po wyzerowaniu stanu zapasów I_{t-1} na koniec etapu poprzedniego, lecz dodatkowo koszt (uruchomienia) produkcji w etapie t zależy od tego, czy $y_{t-1} = 0$ czy też $y_{t-1} = 1$. Jeżeli zatem rozważamy niezerową produkcję x_t w etapie t, należy wybrać najlepszy z wariantów wznawiania i rezerwacji produkcji w etapach $1, \ldots, t-1$ doprowadzający do najtańszego kosztu uruchamiania produkcji w etapie t.

Jeżeli jest zadany harmonogram produkcji $x = (x_t)$, to optymalny koszt związany z wznawianiem i rezerwacją można wyznaczyć rozwiązując następujący

Problem F

$$\min Z(x) = \sum_{t=1}^{T} (s_t v_t + k_t y_t) \tag{4.1}$$

przy ograniczeniach

$$y_t \geq \delta(x_t) \tag{4.2}$$

$$y_t - y_{t-1} \leq v_t \tag{4.3}$$

$$v_t, y_t \in \{0, 1\} \tag{4.4}$$

gdzie $\delta(x) = 1$ gdy $x > 0$ oraz $\delta(x) = 0$ dla $x \leq 0$. Łatwo wykazać następującą

Własność 2. *Niech $x_t > 0$ dla pewnego t oraz $x_s = 0$ dla pozostałych $s \neq t$. Optymalny koszt $Z(x)$ wznawiania produkcji (dla etapu t) jest równy $S_t + k_t$, gdzie*

$$S_t = \min_{1 \leq l \leq t} \{s_l + k_l + \cdots + k_{t-1}\} \tag{4.5}$$

przy czym $l_t = \operatorname{argmin}_{1 \leq l \leq t} \{s_l + k_l + \cdots + k_{t-1}\}$ jest najlepszym okresem wznawiania dla produkcji w okresie t.

Współczynnik S_t jest najniższym wariantem kosztu wznawiania produkcji w okresie t, jeżeli zatem zachodzi $s_t > S_t$, to zawsze, niezależnie od wartości x, bardziej opłaca się wznowić produkcję w okresie l_t i ponieść koszty rezerwacji w okresach $l_t + 1, \ldots, t-1$, aniżeli wznawiać na nowo produkcję w okresie t. Możemy zatem dokonać regularyzacji problemu i przyjąć, że $s_t = S_t$. Regularyzację tę można zrealizować w czasie $O(T)$ za pomocą algorytmu wyznaczania najtańszych ścieżek od wierzchołka zerowego do pozostałych wierzchołków w acyklicznym grafie zawierającym wierzchołki $\{0, 1, \ldots, T\}$ oraz $2T - 1$ łuków następującej postaci: łuków $(0, t)$ z kosztem s_t oraz łuków $(t, t+1)$ z kosztem k_t dla $t = 1, \ldots, T$. Z wyznaczonego dendrytu najtańszych ścieżek wynikają również okresy najlepszego wznawiania l_t dla wszystkich okresów produkcji t.

W algorytmie programowania wieloetapowego, tak jak i w Problemie P, zmienna decyzyjna x oznacza w etapie t łączną (zakumulowaną) liczbę dotychczas wyprodukowanych wyrobów, począwszy od etapu pierwszego. Oznaczamy przez $Q_0^t(x)$ funkcję określającą optymalny koszt produkcji (i magazynowania) w okresach $1, \ldots, t$ przy założeniu realizacji zakumulowanej produkcji x oraz dodatkowym warunku braku stanu gotowości zasobów $y_t = 0$. Oznaczmy przez $Q_1^t(x)$ funkcję określającą optymalny koszt produkcji (i magazynowania) w okresach $1, \ldots, t$ przy założeniu realizacji zakumulowanej produkcji x oraz dodatkowym warunku gotowości zasobów $y_t = 1$. Funkcje $Q_0^t(x)$ i $Q_1^t(x)$ są kawałkami liniowe wklęsłe. Dla wygody obliczeń rekurencyjnych będziemy wyznaczać funkcję przesunięta $\underline{Q}_1^t(x) = Q_1^t(x) - K_t$, gdzie $K_t = \sum_{s \leq t} k_s$ jest zakumulowanym kosztem rezerwacji do etapu t.

W celu rekurencyjnego wyznaczenia wykresów funkcji $Q_0^t(x)$ i $\underline{Q}_1^t(x)$ dla $x \geq D_t$ na podstawie znanych wykresów funkcji $Q_0^{t-1}(x)$ oraz $\underline{Q}_1^{t-1}(x)$ dla $x \geq D_{t-1}$ wykorzystamy sformułowaną na początku rozdziału obserwację, iż niezerowa produkcja x_t w okresie t jest możliwa tylko po wyzerowaniu stanu zapasów I_{t-1} na koniec etapu poprzedniego, czyli gdy w kroku poprzednim zachodzi $x = D_{t-1}$.

Trajektoria optymalna doprowadzająca zerowy stan początkowy $x = D_0 = 0$ do stanu $x = D_t$ w etapie t jest scharakteryzowana w kroku t przez następujące wielkości:

Q_{0t} = $Q_0^t(D_t)$

p_{0t} = numer takiego etapu s poprzedzającego etap t, w którym ostatnio stan zapasu I_s był równy zero w trajektorii doprowadzającej do $Q_0^t(D_t)$.

$\underline{Q}_{1t}$ = $\underline{Q}_1^t(D_t)$.

p_{1t} = numer etapu s poprzedzającego etap t, w którym ostatnio stan zapasu I_s był równy zero w trajektorii doprowadzającej do $\underline{Q}_1^t(D_t)$.

y_t = stan gotowości zasobów na koniec etapu t ($y_t = 1$, gdy na koniec etapu t zasoby są przygotowane do kontynuacji produkcji, oraz $y_t = 0$ w przeciwnym przypadku).

Jeżeli w etapie t produkcja x_t jest zerowa, to koszty zakumulowane $Q_0^t(x) = Q_0^{t-1}(x)$ oraz $\underline{Q}_1^t(x) = \underline{Q}_1^{t-1}(x)$. Jeżeli w etapie t jest realizowana niezerowa produkcja o wielkości $x_t = x - D_{t-1}$, to wypadkowy koszt zakumulowany zależy od wariantu kosztu wznowienia i rezerwacji w tym etapie. Gdy na koniec etapu $t-1$ występuje brak stanu gotowości zasobów, to wypadkowy koszt P_0^t zakumulowany w etapie t dla zakumulowanej produkcji $x \geq D_t$ jest równy

$$P_0^t(x) = Q_0^{t-1}(D_{t-1}) + s_t + k_t + c_t(x - D_{t-1})$$

Gdy na koniec etapu $t-1$ występuje gotowość zasobów $y_{t-1} = 1$, to wypadkowy koszt P_1^t zakumulowany w etapie t dla zakumulowanej produkcji $x \geq D_t$ jest równy

$$P_1^t(x) = Q_1^{t-1}(D_{t-1}) + k_t + c_t(x - D_{t-1}) = \underline{Q}_1^{t-1}(D_{t-1}) + K_t + c_t(x - D_{t-1})$$

Zauważmy, że $P_0^t(x)$ i $P_1^t(x)$ różnią się jedynie o stałą. Oznaczając $S_0^t = Q_0^{t-1}(D_{t-1}) + s_t + k_t$ oraz $S_1^t = \underline{Q}_1^{t-1}(D_{t-1}) + K_t$ wyznaczamy

$$P^t(x) = \min\{S_0^t, S_1^t\} + c_t(x - D_{t-1})$$

Stąd, dla danego $x \geq D_t$, zachodzi rekurencyjna zależność

$$Q_0^t(x) = \min\{Q_0^{t-1}(x), P^t(x)\}$$

Obliczenie $Q_1^t(x)$ ze względu na konieczność przeskalowania jest nieco inne

$$\underline{Q}_1^t(x) = \min\{\underline{Q}_1^{t-1}(x), P^t(x) - K_t\}$$

Zauważmy, że jeżeli $S_0^t < S_1^t$, to warto przyjąć $y_{t-1} = 1$, natomiast w przeciwnym przypadku $y_{t-1} = 0$.

Rozwiązywanie problemu PR polega na wyznaczeniu trajektorii optymalnej doprowadzającej w T krokach zerowy stan początkowy do stanu $x = D_T$ w etapie T. Na początku etapu t znana jest trajektoria częściowa dla pierwszych $t-1$ etapów w postaci zbioru szóstek $(D_s, Q_{0s}, p_{0s}, \underline{Q}_{1s}, p_{1s}, y_{s-1})$, $0 < s < t$. Ponadto w poprzednim kroku są wyznaczone wykresy funkcji $Q_0^{t-1}(x), \underline{Q}_1^{t-1}(x)$ dla $x \geq D_{t-1}$. W kroku t jest obliczana szóstka $(D_t, Q_{0t}, p_{0t}, \underline{Q}_{1t}, p_{1t}, y_{t-1})$ oraz wykresy funkcji $Q_0^t(x), \underline{Q}_1^t(x)$ dla $x \geq D_t$. A oto ogólny algorytm rekurencyjny wyznaczania trajektorii optymalnej.

Algorytm APR

begin

$t := 1$; $Q_0^1(x) := s_1 + k_1 + c_1 x$; $\underline{Q}_1^1(x) := s_1 + c_1 x$;

$Q_{01} := Q^1(D_1)$; $p_{01} := 0$; $\underline{Q}_{11} := \underline{Q}_1^1(D_1)$; $p_{11} := 0$;

repeat $t = t + 1$;

$S_0^t(x) := Q_0^{t-1}(D_{t-1}) + s_t + k_t$; $S_1^t(x) := \underline{Q}_1^{t-1}(D_{t-1}) + K_t$;

if $S_0^t < S_1^t$ **then** $y_{t-1} = 0$ **else** $y_{t-1} = 0$;

$P^t(x) = \min\{S_0^t, S_1^t\} + c_t(x - D_{t-1})$;

z wykresów $Q_0^{t-1}(x), \underline{Q}_1^{t-1}(x)$ usuń odcinki P^s nieaktywne dla $x \geq D_t$;

dla $x \geq D_t$ wyznacz $Q_0^t(x) = \min\{Q_0^{t-1}(x), P^t(x)\}$;

$\underline{Q}_1^t(x) = \min\{\underline{Q}_1^{t-1}(x), P^t(x) - K_t\}$;

$Q_{0t} := Q_0^t(D_t)$; $p_{0t} := s - 1$, gdzie P^s jest aktywnym odcinkiem funkcji $Q_0^t(x)$ w punkcie D_t;

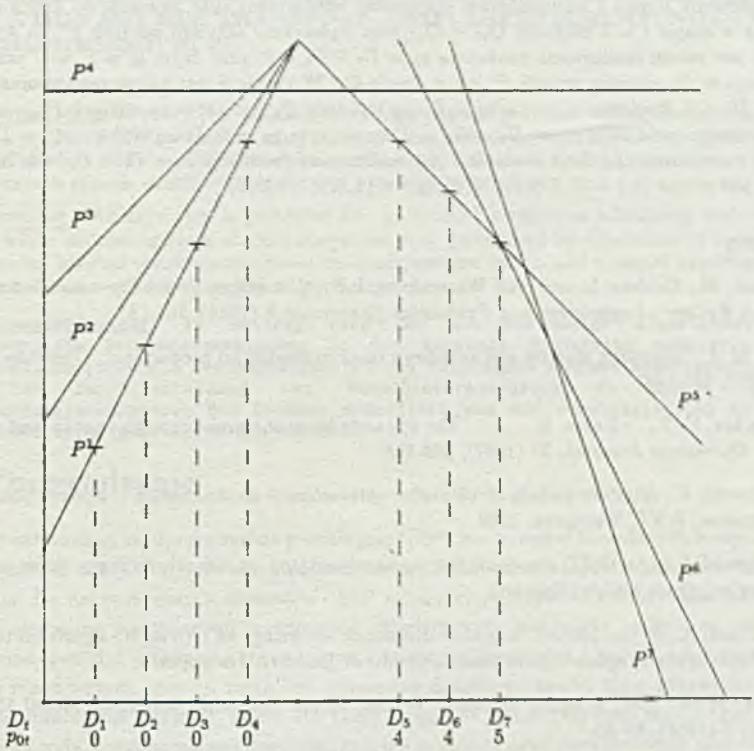
$\underline{Q}_{1t} := \underline{Q}_1^t(D_t)$; $p_{1t} := s - 1$, gdzie P^s jest aktywnym odcinkiem funkcji $\underline{Q}_1^t(x)$ w punkcie D_t;

until $t = T$

end.

Łączna złożonośc algorytmu APR wynosi $O(T \log T)$, jako że w porównaniu do algorytmu AP o złożoności $O(T \log T)$ są realizowane analogiczne operacje, przy czym nakład obliczeń jest w przybliżeniu dwa razy wiekszy.

Przykład ilustracyjny. Rozważmy siedmioetapowy problem PR z następującymi danymi: $T = 7$, $(s_t) = (1,1,1,1,1,1,1)$, $(k_t) = (2,2,2,2,2,2,2)$, $(c_t) = (2,2,2,2,2,2,2)$, $(h_t^+) = (0.5,0.5,1,1,1,1,1)$, $(d_t) = (1,1,1,1,3,1,1)$. Po transformacji umożliwiającej wyzerowanie kosztów magazynowania otrzymujemy $(\bar{c}_t) = (2,1.5,1,0,-1,-2,-3)$. Dalej obliczamy $(D_t) = (1,2,3,4,7,8,9)$ i $(K_t) = (2,4,6,8,10,12,14)$. Rys.3 ilustruje wykresy funkcji $Q_0^t(x)$ uzyskiwane w trakcie działania algorytmu.



Rys. 3. Wykres funkcji kawałkami liniowej $Q_0^t(x)$ konstruowanej przez Algorytm APR
Fig. 3. The diagram of the piece-wise linear function $Q_0^t(x)$ constructed by Algorithm APR

W kolejnych krokach algorytmu wykonujemy następujące obliczenia:

1: $Q_0^1(x) = 3 + 2x$, $\underline{Q}_1^1(x) = 1 + 2x$, $D_1 = 1, Q_{01} = 5, \underline{Q}_{11} = 3, p_{01} = p_{11} = 0$;

2: $S_0^2 = 5+3 = 8$, $S_1^2 = 3+4 = 7, y_1 = 1, P^2(x) = 5.5+1.5x$, $Q_0^2(x) = \min\{Q_0^1(x), 5.5+1.5x\}$, $\underline{Q}_1^2(x) = \min\{\underline{Q}_1^1(x), 1.5 + 1.5x\}$, $Q_{02} = 7, \underline{Q}_{12} = 4.5, p_{02} = 0, p_{12} = 1$;

3: $S_0^3 = 7 + 3 = 10$, $S_1^3 = 4.5 + 6 = 10.5, y_2 = 0$, $P^3(x) = 8 + x$, $Q_0^3(x) = \min\{Q_0^2(x), 8 + x\}$, $\underline{Q}_1^3(x) = \min\{\underline{Q}_1^2(x), 2 + 1.5x\}$, $Q_{03} = 9, \underline{Q}_{13} = 5, p_{03} = 0, p_{13} = 2$;

4: $S_0^4 = 9+3 = 12$, $S_1^4 = 5+8 = 13, y_3 = 0, P^4(x) = 12+0x$, $Q_0^4(x) = \min\{Q_0^3(x), 12+0x\}$, $\underline{Q}_1^4(x) = \min\{\underline{Q}_1^3(x), 4+0x\}$, $Q_{04} = 11, \underline{Q}_{14} = 4, p_{04} = 0, p_{14} = 3$;

5: $S_0^5 = 11+3 = 14$, $S_1^5 = 4+10 = 14, y_4 = 1, P^5(x) = 18-x$, $Q_0^5(x) = \min\{Q_0^4(x), 18-x\}$, $\underline{Q}_1^5(x) = \min\{\underline{Q}_1^4(x), 8-x\}$, $Q_{05} = 11, \underline{Q}_{15} = 1, p_{05} = 4, p_{15} = 4$;

6: $S_0^6 = 11+3 = 14$, $S_1^6 = 1+12 = 13, y_5 = 1, P^6(x) = 27-2x$, $Q_0^6(x) = \min\{Q_0^5(x), 27-2x\}$, $\underline{Q}_1^6(x) = \min\{\underline{Q}_1^5(x), 15-2x\}$, $Q_{06} = 10, \underline{Q}_{16} = -1, p_{06} = 4, p_{16} = 4$;

7: $S_0^7 = 10+3 = 13$, $S_1^7 = 1+12 = 13, y_6 = 1, P^7(x) = 37-3x$, $Q_0^7(x) = \min\{Q_0^6(x), 37-3x\}$, $\underline{Q}_1^7(x) = \min\{\underline{Q}_1^6(x), 37-3x\}$, $Q_{07} = 9, \underline{Q}_{17} = -4, p_{07} = 5, p_{17} = 6$;

Po zakończeniu Kroku 7 harmonogram optymalny odtwarzamy, idąc zwrotnie od końca etapu 7 do 1. Ponieważ w etapie $t = 7$ zachodzi $Q_{07} < Q_{17}$, więc wybieramy aktywny odcinek P^6 na wykresie Q_0. W etapie 6 jest zatem realizowana produkcja $x_6 = D_7 - D_5 = 2$, przy czym $y_5 = 1$, więc przechodzimy do aktywnego w D_5 odcinka prostej P^5 na wykresie Q_1. W etapie 5 jest zatem realizowana produkcja $x_5 = D_5 - D_4 = 3$. Ponieważ $y_4 = 1$ oraz w D_4 na wykresie Q_1 jest aktywny odcinek P^4, więc w etapie 4 jest realizowana produkcja $x_4 = D_4 - D_3 = 1$, przy czym $y_3 = 0$. Dalej wybieramy w D_3 aktywny odcinek P^1 na wykresie Q_0. Stąd w etapie 1 jest realizowana produkcja $x_1 = D_3 - D_0 = 3$. Rozwiązanie optymalne jest równe $(x_t) = (3, 0, 0, 1, 3, 2, 0), (y_t) = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$.

Literatura

[1] De Bodt, M., Gelders, L. and Van Wassenhove, L.N., 'Lot-Sizing Under Dynamic Demand Conditions: A Review', *Engineering and Production Economics*, 8 (1984), 165-187.

[2] Sobel, M. J., 'Smooting startup and shutdown costs in sequential production', *Operations Research*, 17 (1969), 133-144.

[3] Karmarkar, U. S., Kekre S. 'The dynamic lot-sizing problem with startup and reservation costs', *Operations Research*, 35 (1987), 389-398.

[4] Toczyłowski, E., *Niektóre metody strukturalne optymalizacji do sterowania w dyskretnych systemach wytwarzania*, WNT, Warszawa, 1989.

[5] Toczyłowski, E., 'An $O(T^2)$ algorithm for the uncapacitated lot-size scheduling problem with limited inventories', praca nieopublikowana.

[6] Wagelmans, A., S. van Hoesel, A. Kolen 'Economic lot-sizing: an $O(n \log n)$-algorithm that runs in linear time in the Wagner-Whitin case', *Operations Research*, (to appear).

[7] Wagner, M.M., T.M. Whittin, Dynamic Version of the Economic Lot-sizing Model, *Management Science*, 5 (1958), 89-96.

[8] Zangwill, W.I., 'A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System — a Network Approach', *Management Science*, 15 (1969), 506-527.

Recenzent: Prof.dr h.inz. Jerzy Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 30.04.1992 r.

Abstract:

The efficient algorithms for solving a family of the uncapacitated lot-size scheduling problems are considered. The paper presents a novel approach for solving these problems, which is based on a dynamic reccursive calculations that exploits the properties of the piecewise concave linear functions. An $O(T \log T)$ algorithm is developed for the lot-size scheduling problems with setup or startup and reservation costs as well as an $O(T^2)$ algorithm for the uncapacitated problem with backlogging allowed.