ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2003
Seria: BUDOWNICTWO z. 97 Nr kol. 1573

Jarosław PRZEWŁÓCKI
Politechnika Gdańska

STOCHASTYCZNA ANALIZA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ

Streszczenie. Praca dotyczy modelowania stochastycznego ośrodka gruntowego metodami nośności granicznej. Zaproponowano probabilistyczne modyfikacje metod oszacowań i charakterystyk, które zastosowano do oceny nośności granicznej ławy fundamentowej posadowionej na idealnie spoistym podłożu. W pierwszym przypadku, wyznaczono dystrybuanty nośności granicznej stanowiące probabilistyczne, górne i dolne oszacowania. Metodę charakterystyk powiązano ze stochastyczną metodą różnic skończonych, a przyjęcie spójności w postaci pola losowego pozwoliło na uwzględnienie w analizie przestrzennej zmienności ośrodka gruntowego.

STOCHASTIC APPROACH TO THE LIMIT ANALYSIS

Summary. The paper deals with a stochastic modeling of soil medium using limit analysis methods. Modifications of theorems of limit analysis and the method of characteristics are proposed. They are applied to a problem of bearing capacity of a strip footing based on the ideally cohesive subsoil. The distribution functions of the bearing capacity are considered as the probabilistic upper and the lower bounds. In the case of the method of characteristics, the stochastic finite difference method has been adopted. The influence of the spatial variability of cohesion on the standard deviation of the ultimate collapse load has been determined.

1. Wprowadzenie

Stan nośności granicznej podłoża gruntowego jest to taki stan, w którym podłoże traci zdolność przenoszenia obciążeń. Analiza procesu osiągnięcia tego stanu, zwykle oparta na teorii materiałów sprężysto-plastycznych, jest pracochłonna i nie zawsze konieczna z punktu widzenia metod projektowania. Podejściem alternatywnym, gdzie istotny jest przede wszystkim efekt końcowy, a nie poprzedzające go stany, jest metoda nośności granicznej. Celem tej metody jest wyznaczenie wielkości obciążenia, przy którym podłoże, a więc i posadowiona na nim konstrukcja, ulega zniszczeniu.

W praktyce największe zastosowanie znalazła metoda oszacowań, oparta na tzw. twierdzeniach nośności granicznej (twierdzenia ekstremalne) oraz metoda charakterystyk. W pierwszym przypadku podstawowe są dwa twierdzenia ekstremalne: statyczne i kinematyczne, pozwalające na znalezienie oszacowania nośności od dołu i od góry, czyli na wyznaczenie przedziału, w którym mieści się ścisłe rozwiązanie zagadnienia. W przypadku gdy obciążenia graniczne wyznaczone na podstawie obydwu twierdzeń pokrywają się, otrzymany wynik jest ścisłym rozwiązaniem problemu. Przy pewnych założeniach, rozwiązanie takie uzyskuje się również metodą charakterystyk.

Dla ośrodka stochastycznego występujące w warunku plastyczności parametry wytrzymałościowe stają się w ogólnym przypadku funkcjami losowymi. Wielkościami losowymi będą również górne i dolne oszacowania nośności granicznej. Ich dystrybuanty można rozumieć jako probabilistyczne oszacowania nośności granicznej (Augusti, Barrata, 1972).

W pracy przedstawiono zagadnienie nośności stochastycznego podłoża gruntowego, na którym posadowiona jest ława fundamentowa. Dla uproszczenia, rozważania ograniczono tylko do ośrodka gruntowego idealnie spoistego, w którym spójność gruntu jest traktowana zarówno jako zmienna losowa, jak i pole losowe.

2. Metoda oszacowań

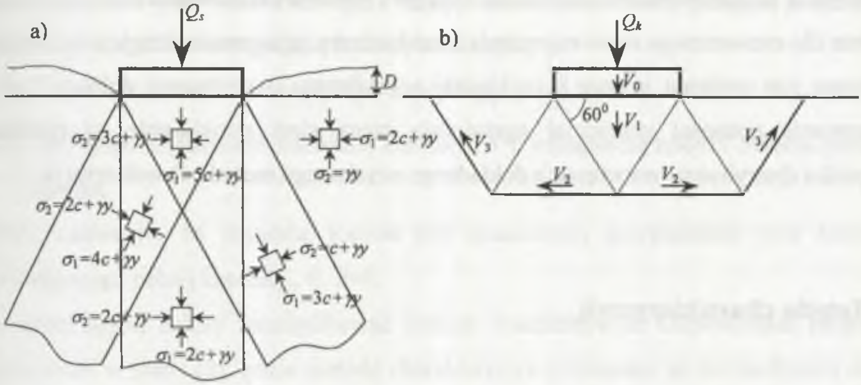
W celu znalezienia dolnego oszacowania nośności podłoża poddanego obciążeniu od fundamentu, należy skonstruować statycznie dopuszczalne pole naprężenia, dla zadanej geometrii i sposobu obciążenia podłoża. Dla ławy fundamentowej posadowionej na półprzestrzeni stanowiącej idealnie spoisty ośrodek gruntowy można przyjąć różne pola (Chen [2]). Z uwagi na to, że w rzeczywistym ośrodku gruntowym naprężenia rozprzestrzeniają się z głębokością na coraz to większe powierzchnie, dobre rozwiązanie uzyskuje się przyjmując pole naprężenia przedstawione na rys. 1a.

Nośność graniczna jest w takim przypadku równa:

$$Q_s = \left[5 \cdot c(x,y) + \gamma \cdot D\right] \cdot B \tag{1}$$

Wykorzystując metodę momentów (Benjamin, Cornell [1]) można bezpośrednio obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję powyższego oszacowania:

$$E\left[Q_s\right] = \left(5 \cdot \bar{c} + \gamma \cdot D\right) \cdot B \quad , \quad \mathrm{Var}\left[Q_s\right] = 25 \cdot B^2 \cdot \sigma_c^2 \tag{2}$$



Rys. 1. Statycznie dopuszczalne pole naprężeń i kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia dla podłoża obciążonego ławą fundamentową

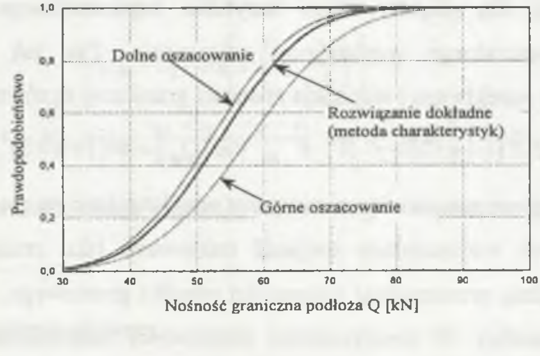
Fig. 1. Statically admissible stress field and kinematically sufficient failure mechanism for the subsoil loaded by the strip footing

Również w celu znalezienia górnej oceny wielkości obciążenia granicznego można przyjmować różne kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia [2]. Dobre wyniki uzyskuje się przyjmując tzw. mechanizm translacyjny, polegający na poślizgach sztywnych bloków (rys.1b). Górne oszacowanie nośności jest następujące:

$$Q_k = \frac{10c(x,y)\cdot B}{\sqrt{3}} \tag{3}$$

Wartość oczekiwana i wariancja takiego oszacowania są natomiast równe:

$$E[Q_k] = \frac{10\bar{c}B}{\sqrt{3}} \quad , \quad \mathrm{Var}[Q_k] = \frac{100}{3}B^2\sigma_c^2 \tag{4}$$



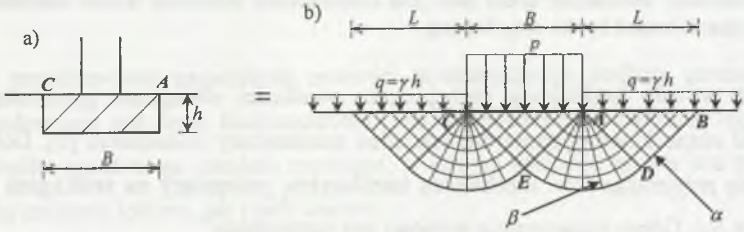
Rys. 2. Dystrybuanty oszacowań i rozwiązania dokładnego nośności granicznej podłoża

Fig. 2. Distribution functions of lower and upper bounds and the exact solution

Na rys. 2 przedstawiono dystrybuanty dolnego i górnego oszacowania nośności granicznej podłoża dla rozważanego stanu naprężenia i mechanizmu zniszczenia. Przyjęto tu, że nośność graniczna jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Dystrybuanty dolnego i górnego oszacowania nośności granicznej ograniczają rzeczywiste rozwiązanie, w rozważanym przypadku dystrybuantę rozwiązania dokładnego uzyskanego metodą charakterystyk.

3. Metoda charakterystyk

Dla zagadnienia ławy fundamentowej posadowionej na idealnie spoistej półprzestrzeni, znane jest też rozwiązanie ścisłe, które uzyskuje się metodą charakterystyk (rys. 3).



Rys. 3. Nacisk fundamentu na półprzestrzeń i równoważny schemat statyczny z naniesioną siatką charakterystyk
Fig. 3. Strip foundation on half-space and its static scheme with a net of characteristics

Zgodnie z [5], nośność graniczna jest równa:

$$Q_{ch} = \left[2 \cdot c(x,y)(1+\pi/2)+\gamma \cdot D\right] \cdot B \tag{5}$$

Wyrażenie (5) jest tzw. rozwiązaniem dokładnym, do którego powinny się zbliżać rozwiązania uzyskane dla rozpatrywanego statycznie dopuszczalnego pola naprężenia i kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia. Tak jak poprzednio, łatwo sprawdzić, iż wartość oczekiwana i wariancja nośności granicznej są równe:

$$E\left[Q_{ch}\right] = \left[2 \cdot \overline{c}(1+\pi/2)+\gamma \cdot D\right] \cdot B \quad , \quad \mathrm{Var}\left[Q_{ch}\right] = 4 \cdot (1+\pi/2)^2 \cdot B^2 \cdot \sigma_c^2 \tag{6}$$

Dystrybuantę tak otrzymanego rozwiązania również przedstawiono na rys. 2.

W przedstawionych rozważaniach spójność traktowano jako zmienną losową. Takie podejście nie uwzględnia przestrzennej zmienności ośrodka gruntowego, co w istotny sposób wpływa na wyniki analizy. W rzeczywistości właściwości mechaniczne gruntu przyjmują różne wartości w poszczególnych punktach ośrodka. Bardziej uzasadnione jest zatem przyjęcie spójności jako pola losowego $c=c(x,y)$. Do dalszej analizy przyjęto jednorodne i izotropowe pole opisane następującą funkcją korelacyjną:

$$R(\tau)=(1+\lambda\cdot|\tau|)\cdot\exp(-\lambda\cdot|\tau|) \tag{7}$$

gdzie: λ jest współczynnikiem zanikania korelacji, a τ odległością między dwoma punktami ośrodka.

Warto zauważyć, że zmienna losowa jest granicznym przypadkiem pola losowego, odpowiadającego pełnej korelacji, tj. $\lambda=0$.

W takim ujęciu należy zmodyfikować metodę charakterystyk. Odpowiednią propozycję przedstawiono w pracy [3], gdzie metodę charakterystyk powiązano ze stochastyczną metodą różnic skończonych. W efekcie pozwoliło to na wyprowadzenie układu stochastycznych równań różniczkowych opisujących zachowanie się ośrodka w stanie granicznym, a następnie odpowiadających im równań różnicowych.

W metodzie różnic skończonych najpierw dobiera się szereg dostatecznie blisko siebie położonych punktów. Znając położenie dwóch sąsiednich punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) oraz przyporządkowane im wielkości pomocnicze s_1, θ_1 oraz s_2, θ_2, poszukuje się współrzędnych (x_M, y_M) i wartości s_M, θ_M sąsiadującego z nimi punktu M:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_1\cdot\operatorname{tg}\left(\theta_1+\frac{\pi}{4}\right)-x_2\cdot\operatorname{tg}\left(\theta_2-\frac{\pi}{4}\right)+y_2-y_1}{\operatorname{tg}\left(\theta_1+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\theta_2-\frac{\pi}{4}\right)} \\ y_M &= y_1+(x_M-x_1)\cdot\operatorname{tg}\left(\theta_1+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

oraz przyporządkowanych im wielkości pomocniczych:

$$\left.\begin{aligned} s_M &= \frac{s_1+s_2}{2}+c_M(\theta_1-\theta_2)+(c_M-c_1)\cdot\operatorname{ctg}\left[2\cdot\left(\theta_1+\frac{\pi}{4}\right)\right]+ \\ &\quad-(c_M-c_2)\cdot\operatorname{ctg}\left[2\cdot\left(\theta_2-\frac{\pi}{4}\right)\right]=0 \\ \theta_M &= \theta_1-\frac{s_M-s_1}{2\cdot c_M}+\frac{c_M-c_1}{c_M}\cdot\operatorname{ctg}\left[2\cdot\left(\theta_1+\frac{\pi}{4}\right)\right]=0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

gdzie: θ - kąt, jaki tworzy kierunek większego naprężenia głównego do z osią poziomą x,

$$s=\frac{(\sigma_1+\sigma_2)}{2}-\gamma\cdot y$$

σ_1, σ_2 - naprężenia główne,

γ - ciężar objętościowym gruntu,

y – rzędna rozpatrywanego punktu ośrodka gruntowego.

Należy zauważyć, że wyrażenia (8) określające współrzędne punktu M są takie same, jak dla przypadku ośrodka deterministycznie jednorodnego [5]. Występujące w nich wielkości pomocnicze θ_1 i θ_2 są jednak polami losowymi. Istotne różnice dla ośrodka deterministycznego i stochastycznego występują we wzorach (9). Dla tego pierwszego, w obydwu wyrażeniach (9) występują tylko dwa pierwsze składniki.

Obliczenia według wzorów (8) i (9) przeprowadza się dla wszystkich par sąsiadujących ze sobą punktów, co ostatecznie pozwala na wyznaczenie stanu naprężenia w określonym obszarze. W ośrodku stochastycznym jest to równoznaczne z jedną realizacją, gdzie stan naprężenia w rozważanym obszarze określa się dla jednej generacji pola losowego właściwości ośrodka. Dopiero zastosowanie metody Monte Carlo pozwala na wyznaczenie probabilistycznych charakterystyk szukanych wielkości. W pracy wykorzystano model generacji wielowymiarowego pola losowego, który zaproponował Wilde (1981).

W przypadku ośrodka stochastycznego fundamentalne znaczenie ma właściwa dyskretyzacja. Wzory metody charakterystyk (8) i (9) zostały przedstawione w postaci wyrażeń zawierających różnice skończone. Takie podejście wiąże się ściśle z przyjęciem kroku obliczeniowego lub ogólniej dyskretyzacją ośrodka. Na rys. 4 przedstawiono wyniki obliczeń (realizacje siatek charakterystyk) uzyskane dla dwóch różnych dyskretyzacji ośrodka. Obliczenia przeprowadzono dla ustalonej ustalonej wartości obciążenia q=2 kPa rozłożonego na odcinku o długości L=8 m, dla ośrodka nieważkiego, wartości oczekiwanej spójności $\bar{c}$=10 kPa, odchylenia standardowego σ_c=2 kPa. Na rys. 4a widoczne jest, iż przyjęcie zbyt dużego kroku obliczeniowego może prowadzić nawet do przecięcia się charakterystyk dwu rodzin, co jest nierealne. W przedstawionym ujęciu istotny jest charakter zmienności opisującego ośrodek gruntowy pola losowego. Dla pól szybkozmiennych (λ>>0) siatka charakterystyk musi być znacznie bardziej zagęszczona (rys. 4b).

Rys. 4. Realizacja siatek charakterystyk dla ośrodka stochastycznego
Fig. 4. Nets of characteristics for stochastic soil medium

Zmianę odchylenia standardowego nośności granicznej w zależności od zmienności pola losowego, czyli od wielkości współczynnika zanikania korelacji λ, przedstawiono na rys. 5. Widoczne jest tu, że dla małych korelacji, co jest bliższe rzeczywistemu ośrodkowi gruntowemu, odchylenie standardowe nośności maleje. W skrajnym przypadku, dla braku korelacji ($\lambda \to \infty$) odchylenie to dąży do zera, co oznacza, że nośność graniczna staje się zmienną deterministyczną, a jej dystrybuanta prostą pionową.

Rys. 5. Odchylenie standardowe nośności granicznej a współczynnik zanikania korelacji λ
Fig. 5. Variation of standard deviation of the bearing capacity versus correlation decay coefficient λ

4. Wnioski

Probabilistyczne oszacowania nośności granicznej stanowią dodatkową miarę bezpieczeństwa konstrukcji i pozwalają na ograniczenie od dołu i od góry prawdopodobieństwa wystąpienia awarii.

Zaproponowana w pracy stochastyczna adaptacja metody charakterystyk pozwala na uwzględnienie przestrzennej zmienności ośrodka gruntowego w metodzie nośności granicznej. Istotne znaczenie w analizie ma dyskretyzacja ośrodka, która jest ściśle związana z charakterem zmienności pola losowego, modelującego właściwości ośrodka gruntowego. Dla pól szybkozmiennych należy przyjąć mały krok obliczeniowy, czyli odpowiednio zagęszczoną siatkę charakterystyk. Dla pól wolnozmiennych obliczenia są podobne do deterministycznych. Korelacja przestrzenna ośrodka gruntowego ma bardzo istotny wpływ na charakterystyki statystyczne nośności granicznej. Dla braku korelacji, odchylenie standardowe oporu granicznego dąży do zera.

Bez utraty ogólności można stwierdzić, iż proponowane podejście może być stosowane również dla ośrodków sypkich, a także dla innych zagadnień geotechnicznych.

LITERATURA

1. Benjamin J.R., Cornell C.A.: Rachunek prawdopodobieństwa statystyka matematyczna teoria decyzji dla inżynierów, WNT, Warszawa 1977.
2. Chen W.: Limit Analysis and Soil Plasticity. Elsevier Scientific Publishing Company. Amsterdam, Oxford, New York 1975.
3. Przewłócki J.: Stochastyczna adaptacja metody charakterystyk i jej zastosowanie w mechanice gruntów. 75-lecie prof. Wildego, 2001.
4. Przewłócki J., Dardzińska I.: Limit analysis of a strip footing on stochastic subsoil. Studia Mechanica et Geotechnica, 2001.
5. Szczepiński W.: Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich. Biblioteka Mechaniki stosowanej, PWN, Warszawa 1974.
6. Wilde P.: Random field discretization in enginering calculations. Biblioteka Naukowa Hydrotechnika nr 9, PWN, Warszawa-Poznań 1981.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ryszard IZBICKI

Abstract

Limit analysis methods applied to a strip footing based on the stochastic subsoil are presented in the paper. Bearing capacity is estimated using both static and kinematic theorems of limit analysis as well as the method of characteristics. In the first case, it is assumed that the soil's cohesion is treated as a random variable. As a result, the distribution functions of the bearing capacity, considered as the upper and the lower bounds, have been found. In the case of the method of characteristics, the cohesion is considered to be a random field. The stochastic finite difference method based on the Monte Carlo technique has been adopted. It allows determination of the influence of the spatial variability of cohesion on the variance of the ultimate collapse load of the bearing capacity problem. The paper shows that the variance of the bearing capacity vanishes for decreasing correlation of the cohesion. The presented approach can be directly applied also to frictional soils as well as to other geotechnical structures, such as slopes and embankments, retaining walls, etc.