

Leon SŁOMIŃSKI, Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa

OPTIMALIZACJA DYSKRETNA Z PROBABILISTYCZNYMI OCENAMI DOKŁADNOŚCI
DISCRETE OPTIMIZATION WITH PROBABILISTIC GUARANTEES TO OPTIMALITY
ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ОЦЕНКАМИ ТОЧНОСТИ

Streszczenie: Przedstawione zostaną nowe sposoby przybliżonego rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej, wykorzystujące wyniki ze statystyki matematycznej do oceny dokładności rozwiązania. Ocena ta dana jest w postaci przedziałów probabilistycznych o losowej lub stałej szerokości.

Summary: New methods for approximate solving of discrete optimization problems are presented. Some results from statistics are used to evaluate the solution quality. Probabilistic intervals of random or deterministic width, valid on a prescribed confidence level, are utilized.

Резюме: Представлены новые подходы для приближенного решения задач дискретной оптимизации, использующие достижения математической статистики для оценки точности результата. Оценка дается в виде интервалов, с вероятностной или постоянной шириной, определенных на заданном доверительном уровне.

1. Oceny dokładności rozwiązania

Rozważmy zadanie optymalizacji dyskretnej w postaci:

$$\max\{z(x) | x \in F\} \quad (1)$$

gdzie F jest skończonym (opisanym algebraicznie) zbiorem n -wymiarowych wektorów o współrzędnych całkowitoliczbowych, a $z(x)$ jest funkcją rzeczywistą, nazywaną funkcją celu.

Ścisłe rozwiązanie tego zadania, szczególnie o większych rozmiarach, jest w przypadku ogólnym bardzo czasochłonne. W tej sytuacji pożądane są wielomianowe algorytmy przybliżone, z gwarantowaną lub kontrolowaną dokładnością rozwiązania. Deterministyczne algorytmy tego typu są znane tylko dla pewnych klas ogólnego zdania optymalizacji dyskretnej. Użycie przedziałów losowych, w tym stałoprecyzyjnych, gwarantujących przybliżony wynik na zadanym poziomie ufności wydaje się nader atrakcyjne. Uzyskanie rozwiązań z tego typu gwarancją wymaga losowego próbkowania zbioru F . Losowość tę wprowadza się przez generowanie wektorów x , niezależnych i o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa. W ten sposób wartości funkcji celu $z(x)$ można traktować jak obserwacje zmiennej losowej $Z(X)$, gdzie X jest wektorową zmienną losową. Chcemy wykorzystać funkcje tych obserwacji do wnioskowania o odległości największej zarejestrowanej wartości, np. z_b , od wartości szukanego maksimum, które będziemy oznaczać przez z_{opt} . O rozkładzie prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z(X)$, $x \in F$, niewiele można powiedzieć, poza bardzo szczególnymi

przypadkami. Dlatego szukamy możliwości wnioskowania o jakości optimum bez konieczności korzystania z tej informacji lub przy jej istotnym ograniczeniu.

Przedstawione będą trzy różne przedziały statystyczne (ich przydatność do oceny jakości rozwiązania zadania (1) zostanie przedyskutowana w dalszych punktach): przedział tolerancji, przedział ufności dla kwantyla o ustalonym rzędzie oraz przedział stałej szerokości dla estymacji wartości maksymalnej ograniczonej zmiennej losowej. Dwa pierwsze przedziały mają losowe obydwa końce (tym samym zmienną losową jest szerokość przedziału), trzeci przedział ma losowy tylko jeden koniec - jest więc przedziałem stałej szerokości.

Procedury do otrzymywania tych przedziałów są procedurami skończonymi i w odniesieniu do dwóch pierwszych przedziałów nie zależą one od dystrybuanty zmiennej losowej [3]. Estymator nieznanego końca nośnika rozkładu prawdopodobieństwa - tym samym trzeci przedział, nie może być zbudowany bez pewnych założeń o dystrybuancie. Pożądany estymator można otrzymać dla określonych klas dystrybuant, w tym dla dystrybuant, które spełniają pewne uogólnione warunki symetrii [5]. Dla przedziału tolerancji i przedziału ufności dla kwantyla licznosc próby losowej zależy od: poziomu ufności, względnego położenia statystyk pozycyjnych (końców przedziału), a także od rzędu kwantyla. Dla tych dwóch przedziałów licznosc próby losowej może być obliczona z góry. Licznosc próby niezbędna dla zbudowania trzeciego z omawianych przedziałów zależy od poziomu ufności, szerokości przedziału (dokładności estymacji) oraz od dystrybuanty rozkładu prawdopodobieństwa. Niemniej licznosc próby, w tym przypadku, nie może być obliczona przed eksperymentem.

Procedury otrzymywania wyników mieszczących się w zadanych przedziałach polegają, jak już wspomniano, na niezależnym losowym przeszukiwaniu zbioru F i zarejestrowaniu wyniku najlepszego. Sprawność czasowa takiej procedury zależy głównie od struktury zbioru F i od generatora losowego wektorów $x \in F$. Ponieważ tylko dla niektórych zbiorów F potrafimy generować losowo i niezależnie ciągi punktów dopuszczalnych, to w przypadku ogólnym musimy zadowolić się sposobem: mniej efektywnym, który polega na sprawdzaniu, czy wygenerowany wektor x należy do F . Czasochłonność procedur wzrasta, gdy zbiór F jest bardzo małej licznosci, przy tym bład bezwzględny otrzymanego rozwiązania zależy istotnie od struktury zbioru F i charakteru funkcji celu $z(x)$. Do dyskusji tych zależności powrócimy w dalszych paragrafach.

2. Przedział tolerancji i przedział ufności dla kwantyla

W paragrafie tym korzystamy z twierdzeń zawartych w [3], tam też odsyłamy Czytelnika po dowody i dokładne wskazówki źródłowe. W dalszych rozważaniach ograniczamy się do rozkładów prawdopodobieństw skokowych, a prezentowanie niektórych wyników w postaci odpowiadającej rozkładowi ciągłemu ma na celu uproszczenie zapisu.

Przedziały losowe niezależne od dystrybuanty otrzymać można ze statystyk pozycyjnych. Niech X_1, X_2, \dots, X_N będzie ciągiem wektorów dopuszczalnych - niezależnych n -wymiarowych zmiennych losowych o identycznym rozkładzie prawdopodobieństwa. Zmienne losowe $Z_1 = z(X_1), \dots, Z_N = z(X_N)$ tworzą odpowiedni ciąg losowych wartości funkcji celu. Utwórzmy ciąg uporządkowany tych wartości: $Z_{(\alpha)} \leq Z_{(2)} \leq \dots \leq Z_{(N)}$. Zmienna losowa $Z_{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, nazywa się *i -tą statystyką pozycyjną* [3,4] (pojęcie to odnosi się również do uporządkowanych obserwacji zmiennych losowych). Zmienne losowe $Z_{(i)}$ są zależne z powodu porządkującej je nierówności. Ze względu na zadanie (1) interesują nas przede wszystkim: statystyka graniczna $Z_{(N)}$ i przedziały, które ją wykorzystują. Niech $p(z)$ będzie gęstością prawdopodobieństwa łącznej zmiennej losowej $Z = (Z_{(1)}, \dots, Z_{(N)})$, będącej N -elementowym ciągiem statystyk pozycyjnych $Z_{(i)}$ o identycznym rozkładzie.

Przedziałem tolerancji nazywa się przedział losowy $[L, U]$, wartości zmiennej losowej Z , o losowych końcach L i U , obejmujący co najmniej α całej masy prawdopodobieństwa na poziomie ufności nie mniejszym niż β , gdzie $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ są z góry ustalonymi liczbami:

$$P\left\{ \int_L^U p(z) dz \geq \alpha \right\} \geq \beta, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1. \quad (2)$$

Lewa strona tej nierówności nie zależy od rozkładu prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy końcami przedziału są statystyki pozycyjne. Wynik ten obowiązuje także dla rozkładów skokowych. Jeżeli przyjmiemy, że: $U = Z_{(N)} = z_b$, $L = Z_{(a)}$, to naturalne jest wymaganie, aby przedział tolerancji $[Z_{(a)}, Z_{(N)}]$ obejmował ustaloną, dostatecznie dużą (np. α) część funkcji prawdopodobieństwa z wystarczająco dużym prawdopodobieństwem (np. β). Fakt ten można interpretować tak: przedział losowy $[Z_{(N+1)}, Z_{(N)} = z_{opt}]$ zawiera mniej niż $(1-\alpha)$ części rozkładu zmiennej losowej Z , z prawdopodobieństwem mniejszym niż $(1-\beta)$. Zauważmy, że z przedstawionej interpretacji przedziału tolerancji nie wynika, jak naprawdę duża jest różnica $(z_{opt} - z_b)$.

Zachodzi znany związek [3] między liczbami α , β i N , który dla przedziału $[Z_{(\alpha)}, Z_{(N)}]$ przyjmuje postać: $N\alpha^{N-1} - (N-1)\alpha^N = 1 - \beta$. Z tej równości możemy wyznaczyć N (liczność próby losowej) przy zadanych wartościach prawdopodobieństw α i β . Tak otrzymaną liczbę należy zaokrąglić do najbliższej wartości całkowitej. Zaznaczmy jeszcze raz, że tak otrzymane N jest liczbą wektorów dopuszczalnych, które należy wygenerować po to, aby wobec z_b obowiązywała ocena w postaci losowego przedziału tolerancji, zadanego parametrami α i β . Zajmiemy się teraz drugim przedziałem, który podobnie jak poprzedni nie wymaga znajomości dystrybuanty łącznej zmiennej losowej Z .

Kwantylem rzędu p , skokowej zmiennej losowej Z nazywa się jej wartość z_p , która spełnia następującą nierówność:

$$P\{Z < z_p\} \leq p \leq P\{Z \leq z_p\}, \quad (3)$$

przy czym wartość z_p jest dana jednoznacznie, jeżeli wartość dystrybuanty w tym punkcie nie jest równa p ; w przeciwnym razie kwantyl należy do pewnego przedziału.

Niech będzie dany, jak poprzednio, N - elementowy ciąg statystyk pozycyjnych, oraz niech liczby p i π będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi, $0 \leq p, \pi \leq 1$. Przedziałem ufności dla kwantyla rzędu p zmiennej losowej Z nazywa się przedział losowy $[Z_{(r)}, Z_{(s)}]$, ($s > r$), który zawiera kwantyl z_p na poziomie ufności π . Dla zmiennej losowej skokowej prawdopodobieństwo π nie można wyrazić w sposób niezależny od dystrybuanty, ale można podać oszacowanie od niej niezależne. Z nierówności: $P\{Z_{(r)} \leq z_p \leq Z_{(s)}\} \geq \pi(r, s, N, p)$ oraz $P\{Z_{(r)} < z_p < Z_{(s)}\} \leq \pi(r, s, N, p)$ wynika, że pożądane oszacowanie jest dane wyrażeniem, które ma postać [3]:

$$\pi(r, s, N, p) = \sum_{r=1}^{s-1} \binom{N}{r} p^r (1-p)^{N-r}. \quad (4)$$

Ze wzoru (4) można obliczyć N przy danych p , π oraz r i s . Dla naszych potrzeb celowe jest przyjąć $s = N$ i dążyć do spełnienia równości dla możliwie największego r (minimalizujemy $\delta = N - r$). Równanie to można rozwiązać numerycznie, na komputerze, w kilku iteracjach.

Niech dany będzie ciąg statystyk pozycyjnych (obserwacji zmiennej losowej Z): $z_{(1)} \leq z_{(2)} \leq \dots \leq z_{(r)} \leq \dots \leq z_{(N)}$, przy czym N zostało obliczone dla ustalonych p i π , przy maksymalnym r . Przyjmując $z_b = z_{(N)}$ i pamiętając definicję kwantyla rzędu p , możemy twierdzić, że prawdopodobieństwo zdarzenia $z_{opt} > z_b$ jest mniejsze niż $(1-p)$. Tę samą własność mają wszystkie wartości funkcji celu objęte

przedziałem ufności, który można traktować jako swoisty przedział niewrażliwości dla wartości rozwiązań przybliżonych. Różnica $(z_b - z_{(r)})$ będzie zawsze nieujemna i jej wielkość może pomóc dodatkowo w ocenie rozwiązania przybliżonego z_b traktowanego jako kwantyl p -go rzędu. Podobnie jak w przypadku przedziału tolerancji, z szerokości przedziału ufności dla kwantyla nie można wnioskować wprost o wielkości różnicy $(z_{opt} - z_b)$.

Tabela 1 pokazuje wartości N dla kilku par prawdopodobieństw (α, β) i (p, π) ; dla drugiej pary liczb podajemy także najwęższy przedział $\delta = N - r$, który spełnia równość (4). Identyczne wartości par prawdopodobieństw użyto dla większej pogładowości, należy jednak pamiętać, że ich znaczenie, w interpretacji rozwiązania zadania (1), jest zupełnie różne.

Tabela 1
Zależność N i δ od wartości prawdopodobieństw

α	β	N	p	π	N	δ
.99	.999	920	.99	.999	700	18
.99	.9999	1171	.99	.9999	950	24
.999	.999	9240	.999	.999	7000	19
.999	.9999	11761	.999	.9999	9500	24
.9999	.999	92441	.9999	.999	69500	19
.9999	.9999	117667	.9999	.9999	95000	24

Należy przypomnieć, że przytoczone wartości N odnoszą się do liczby wektorów dopuszczalnych: $x \in F$.

3. Przedział stałej dokładności

W rozdziale tym pokażemy zastosowanie wyników teorii stałoprecyzyjnej estymacji wartości maksymalnej ograniczonej zmiennej losowej [5] do przybliżonego rozwiązania zadania (1). Dokładność rozwiązania jest wyrażona przez przedział ufności o stałej szerokości przy zadanym poziomie ufności.

Niech Z_1, Z_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o identycznej dystrybuancie F_θ , $\theta \in R^+$, zdefiniowanej na nośniku $[0, \theta]$, $\theta > 0$, gdzie θ jest nieznanym parametrem. Niech $\{F_\theta, \theta \in R^+\}$ będzie rodziną dystrybuant, które dla każdego $\theta \in R^+$ spełniają następujące warunki, nazywane *warunkami uogólnionej symetrii*:

- (i) istnieją stałe μ i η takie, że dla każdego $z \in [0, \theta/(\mu+1)]$ zachodzi nierówność: $0 < F_\theta(\mu z) \leq \eta(1 - F_\theta(\theta - z))$,
 (ii) dla każdego $z \leq 0$: $F_\theta(z) = 0$,
 (iii) dla każdego $z \geq \theta$: $F_\theta(z) = 1$.

(5)

Na wspomnianym ciągu zmiennych losowych zdefiniowane są dodatkowo dwie funkcje:

- estymator: $\hat{\Theta}_N = \hat{\Theta}_N(Z_1, \dots, Z_N) = \max\{z_1, \dots, z_N\}$,
- gdzie: z_1, \dots, z_N są obserwacjami zmiennych losowych Z_1, \dots, Z_N ;
- ciąg momentów zatrzymań (przy obserwowaniu wartości z_i):

$$t_0 = 0,$$

$$t_{i+1} = \inf \left\{ N: \min \{z_{t_{i+1}}, \dots, z_{t_{i+1}+N}\} \leq \mu\Delta \right\} + t_i, \quad (6)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

Parametr Δ jest dodatnią liczbą rzeczywistą i nosi nazwę *stałoprecyzyjnego przedziału estymacji* wartości maksymalnej ograniczonej zmiennej losowej. Dla danego $\gamma \in (0, 1)$ zdefiniowana jest *reguła stopu*:

$$\tau = t_K, \text{ gdzie } K = \inf \{ N: (\eta/(\eta+1))^N \leq \gamma \}. \quad (7)$$

Prawdziwe jest TWIERDZENIE. [5]:

Dla każdego $\Delta > 0$, $\Theta > 0$ i $\gamma \in (0, 1)$ reguła stopu (7) spełnia następujące warunki:

$$\begin{aligned} & \cdot P_{\Theta}(\tau < \infty) = 1, \\ & \cdot P_{\Theta}(0 \leq (\Theta - \hat{\Theta}_{\tau}) \leq \Delta) \geq 1 - \gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

Twierdzenie to mówi, że przy regule stopu τ , $\hat{\Theta}_{\tau}$ jest skończonym estymatorem parametru Θ , nośnika dystrybuanty F_{Θ} , estymującym ten parametr z dokładnością Δ na poziomie ufności γ .

W kontekście zadania (1) mamy $\Theta = z_{opt}$. Jeżeli przyjmujemy dodatkowo, że $0 < z(x) < +\infty$, to warunki (i) - (iii) będą spełnione zawsze. Dlatego zastosowanie przedstawionego wyniku do przybliżonego rozwiązania zadania (1) wydaje się oczywiste. Prawdziwa jest więc następująca nierówność (dla ustalonych wartości Δ i γ):

$$P\left\{ (z_{opt} - z_b) > \Delta \right\} < \gamma, \text{ lub inaczej} \quad (9)$$

$$P(z_{opt} \leq z_b + \Delta) \geq 1 - \gamma.$$

Przełożenie zaprezentowanej teorii na język algorytmu rozwiązującego zadanie (1) wymaga zajęcia się jej praktycznymi aspektami. W tym sposobami rozpoznawania własności uogólnionej symetrii dystrybuanty (wzór (5)), to znaczy - sposobami wyznaczania parametrów μ i η . Przyjęte założenie o dodatniości i skończoności $z(x)$ pozwala nie zajmować się warunkami (ii) i (iii). Istotną rolę odgrywa warunek (i), który z kolei może być spełniony zawsze (choć może być zbyt dużym kosztem obliczeń). Wynika to z zależności między liczbą *makrokroków* K i parametrem η (patrz (7)): $K \geq \ln\{\gamma/(\eta/(\eta+1))\}$. Z tego, co powiedziano, wynika, że są przesłanki do stosowania metody estymacji stałoprecyzyjnej w przybliżonym rozwiązywaniu zadania (1).

Zagadnienie wyznaczania parametrów μ i η nie jest zagadnieniem trywialnym i jego rozwiązanie, zadowalające potrzeby praktyczne, wymaga pogłębionych studiów i doświadczeń. Problemem tym zajmujemy się nieco szerzej w pracy [2], gdzie można znaleźć również wyniki eksperymentów komputerowych. Tutaj pokazujemy jedynie ogólne związki, które zachodzą między wartościami tych parametrów i kształtem dystrybuanty zmiennej losowej Z .

Przed wszystkim zauważmy, że gdy $\mu = 1$ i $\eta = 1$, to mamy do czynienia ze zwykłą (nie uogólnioną) symetrią rozkładu prawdopodobieństwa. Wartości liczbowe parametrów μ i η zależą od relacji między szybkością wzrostu dystrybuanty na końcu i na początku rozkładu oraz od położenia mediany rozkładu względem $\theta/2$. Jeżeli dystrybuanta osiąga wartość stosunkowo bliską jedności już dla $z < \theta/2$, to aby prawa strona nierówności (i) we wzorze (5) była dostatecznie duża, parametr η musi mieć odpowiednio dużą wartość (rośnie K). Poza tym musi zachodzić nierówność: $\theta/(1+\eta) > \theta/2$, co implikuje $\mu < 1$. Odwrotnie, osiąganie przez dystrybuantę wartości bliskiej jedności dopiero w pobliżu θ i przesunięcie mediany na prawo od $\theta/2$, pozwala wybierać mniejszą wartość dla parametru η oraz implikuje wartość $\mu > 1$. Zauważmy, że większe od jedności wartości μ mogą ułatwić spełnienie warunku stopu (przy stałej wartości przedziału Δ) ze względu na relację: $\min\{z_{i+1}, \dots, z_{i+N}\} \leq \mu\Delta$ we wzorze (6).

4. Możliwości praktycznego wykorzystania losowych ocen przedziałowych

Należy zwrócić uwagę na dwa czynniki, które mogą mieć wpływ na zakres stosowalności proponowanych ocen rozwiązania przybliżonego zadania (1). Czynnikiem pierwszym to licznosc zbioru rozwiązań dopuszczalnych F , na którą wpływa zasadniczo postać nierówności i równań opisujących ten zbiór. Czynnikiem drugim to równomierność rozmieszczenia wartości funkcji celu $z(x)$ na osi z , szczególnie w pobliżu z_{opt} . Niech $F_0 \subset F$ będzie podzbiorem wektorów x takich, że dla $x \in F_0$ ma miejsce $z(x) = z_{opt}$. Jeżeli $|F_0| \cong 1$ i $z' \ll z_{opt}$, gdzie $z' = \max\{z(x) : x \in (F \setminus F_0)\}$, to należy spodziewać się dużego błędu oceny, nawet przy spełnieniu wysokich wymagań na prawdopodobieństwa definiujące przedział losowy.

Wnioski praktyczne dotyczące zastosowania przedziałowych ocen probabilistycznych w optymalizacji dyskretniej są przedmiotem badań, a przede wszystkim - przedmiotem intensywnych eksperymentów komputerowych, z wykorzystaniem komputerów ze wspomaganie wektorowym (IBM 3090 VF) oraz sieci transputerów umożliwiające implementacje równoległe algorytmów. W pracy [1] przedstawiono algorytmy i wyniki doświadczeń maszynowych (ponad 30 zadań testowych) dotyczące

rozwiązywania wielowymiarowego zero - jedynkowego zagadnienia załadunku z użyciem przedziałów losowych niezależnych od rozkładu (przedział tolerancji i przedział ufności dla kwantyla). To samo zagadnienie (ponad 50 zadań testowych) posłużyło do eksperymentów z użyciem przedziału stałej dokładności. [2]. Dla wielowymiarowego zagadnienia załadunku zbiór F jest opisany przez m nierówności liniowych, w których współczynniki lewej strony są nieujemne, a współczynniki prawej strony są dodatnie.

Z eksperymentów komputerowych wynikają następujące uwagi ogólne. Po pierwsze, bezpośrednie, skończone przeszukiwanie losowe zbioru F w celu otrzymania rozwiązania z przedziałową gwarancją dokładności daje dobre, a nawet bardzo dobre, wyniki, gdy parametry funkcji celu i ograniczeń wykazują umiarkowane odchylenie standardowe ($\sigma \cong 2 + 3$). Mówimy wówczas o zadaniach probabilistycznie gładkich, bez nierównomierności w rozmieszczeniu wartości funkcji celu. Po drugie, istotny wpływ na czasochłonność algorytmu i na procentowy błąd rozwiązania ma ostrość ograniczeń [2] mierzona stosunkiem sumy współczynników lewej strony ograniczenia do wartości współczynnika prawej strony. Ostre ograniczenia zadania (mała wartość stosunku) bardzo silnie zmniejszają moc zbioru F , co w przypadkach skrajnych czyni nieprzydatnymi algorytmy globalnego przeglądu losowego. Okazuje się, że dobre wyniki daje połączenie przeglądu globalnego (uzyskanie początkowej oceny przedziałowej), z poszukiwaniem lokalnym poprawiającym zarówno wynik bezwzględny, jak i przedział stałej dokładności. Udane próby tego typu są opisane w pracy [2], niemniej podejście to wymaga dalszych studiów. Daje się zauważyć, że przy podobnych wymaganiach probabilistycznych liczebność próby losowej dla estymacji stałoprecyzyjnej jest większa od liczebności próby losowej dla pozostałych dwóch przedziałów. Wyniki czasowe i błędy przybliżenia dla przedziałów o losowej szerokości okazują się podobne. Estymację stałoprecyzyjną charakteryzuje duża wrażliwość na wybór wartości Δ .

Algorytmy przeglądu losowego zbioru rozwiązań dopuszczalnych stawiają bardzo ostre wymagania generatorom liczb pseudolosowych. Na przykład, jeżeli wektor optymalny x_{opt} ma liczbę jedynek znacznie większą od $n/2$, to generator losowy przeszukujący z jednakowym prawdopodobieństwem przestrzeń 2^n wszystkich n -wymiarowych wektorów binarnych staje się niepraktyczny. W tych przypadkach znacznie lepsze wyniki, charakteryzowane czasem obliczeń i procentową dokładnością, daje równomierny przegląd przestrzeni wektorów o ustalonej liczbie jedynek. Bardzo pożądane są w tej sytuacji nietrywialne dolne i górne granice na liczbę jedynek dla wektorów optymalnych.

Zadania testowe, na których dokonywano prób z algorytmami gwarantującymi probabilistyczne oceny dokładności, miały wymiary:

liczba zmiennych zero-jedynkowych $n = 20 + 200$, liczba ograniczeń $m = 10 + 90$. Liczność próby losowej (mowa o liczbie wygenerowanych wektorów dopuszczalnych) wahała się, w zależności od wymaganej dokładności, od kilkunastu do kilkuset tysięcy. Odpowiednie czasy pracy wahały się od kilku sekund do 30 minut. Procentowy błąd wyników nie przekraczał, w przypadkach skrajnych, 40 %, przy wartości średniej w granicach kilkunastu procent.

LITERATURA

- [1] Bertocchi M., Brandolini L., Słomiński L., Sobczyńska J. : *A Monte-Carlo approach for 0 - 1 programming problems*. Ukaze się w Computing.
- [2] Bertocchi M., Słomiński L., Sobczyńska J. : *Fixed precision random search procedure for the binary multiknapsack problem*. Quaderni del Dipartimento di Matematica, Statistica, Informatica e Applicazioni. Anno 1991, N. 20. University of Bergamo. Bergamo, Italy.
- [3] David S. H. : *Order Statistics*. J. Wiley, N. York, 1981.
- [4] Fisz M. : *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna* (wyd. 2). PWN, Warszawa, 1958.
- [5] Sierociński A. : *Stałoprecyzyjna estymacja wartości maksymalnej ograniczonej zmiennej losowej*. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria III: Matematyka Stosowana XXVII, 1986, str. 149 - 203.

Recenzent: Doc. dr h. inż. Jan Kaluski

Wpłynęło do Redakcji do 30. 04. 1992 r.

Abstract:

Most of the combinatorial optimization problems are NP-complete, and it means that only branch and bound algorithms or backtracking search, which require exponential number of computation, can be used to solve them exactly. One is forced to use approximation algorithms or heuristics for which there is usually no guarantee that the solution found is optimal, but for which polynomial bounds on the computation time can be given. Some, well known, probabilistic methods of general applicability, like global Monte-Carlo search or the simulated annealing algorithms are in widespread use, too.

Two finite, Monte-Carlo approaches, that yield a sub-optimal solution, with an interval guarantee (on a given confidence level) for the optimality are discussed. In the first approach we utilize non-asymptotic, distribution free results from the theory of order statistics, to derive two different probabilistic intervals: the tolerance interval, and the confidence interval for a quantile of the given order. In both cases the order statistics are ordered observations (of a predefined cardinality) of the goal function value.

considered as independent, identically distributed random variables. The second approach is based on a fixed precision estimation of the extremal value of a bounded random variable. The approach is nonasymptotic, but in contrast to the previous one is distribution-dependent (an assumption on generalized symmetry of the cumulative distribution function is made).