

Marian ŁUPIEŻOWIEC
Politechnika Śląska

KONSYSTENTNY MODEL LEPKOPLASTYCZNY – KONCEPCJA I WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA

Streszczenie. W pracy przedstawiono opis modelu gruntu, który jest w stanie opisać procesy obciążania zależne od czasu. Opis ten jest uogólnieniem bardzo często stosowanego w mechanice gruntów modelu Modified Cam Clay. Podano również weryfikację doświadczalną modelu.

CONSISTENT VISCOPLASTIC MODEL – CONCEPTION AND EXPERI- MENTAL VERIFICATION

Summary. The paper describes a soil model, which can describe time-dependent loading. This description is a generalisation of Modified Cam Clay Model, frequently used in the soil mechanic. Experimental verification of the model is also given.

1. Wstęp

Jak wykazują doświadczenia, bardzo często mamy do czynienia z wrażliwością materiałów nie tylko na ścieżkę obciążenia, ale także na sposób i czas, w jakim to obciążenie następuje. Klasyczne modele zdolne są w miarę dokładnie opisać pierwszą z przedstawionych właściwości. Chcąc uwzględnić dalsze z nich, musimy uogólnić stosowane modele wprowadzając zależność od czasu. Modelami takimi są m. in. modele lepkoplastyczne. Porównanie stworzonych dotychczas modeli konstytutywnych opisujących lepkoplastyczność znajduje się w publikacji autora [7].

Problem ten jest szczególnie dostrzegalny w gruntach spoistych, o czym przekonują nas wyniki uzyskane przez autorów [9], którzy do badań użyli gruntu Honey Clay (grunt bardzo spoisty). Lepkoplastyczność w cytowanym badaniu manifestuje się tym, że im wyższa prędkość odkształcenia, tym większe obserwujemy naprężenie potrzebne do ścięcia próbki.

W pracy przedstawiony będzie konsystentny model opisujący lepkoplastyczność, który jest uogólnieniem często stosowanego w mechanice gruntów modelu Modified Cam Clay.

Podobny sposób opisu dla betonu można znaleźć w publikacji Rene de Borsta [4]. Uogólnione będzie równanie lepkoplastycznego wzmocnienia oraz warunek plastyczności. Następnie pokazana będzie szczegółowa postać funkcji materiałowych w przypadku osiowej symetrii, która opisuje badanie w komorze aparatu trójosiowego ściskania. W zakres rozważań wejdzie też weryfikacja doświadczalna analizowanego modelu.

2. Ogólne równania modelu

Analizując zadanie, przyjęto, że odkształcenia lepkie (opóźnione) obserwowane są po osiągnięciu przez punkt w przestrzeni naprężeń powierzchni plastyczności. Założono również, że struktura ogólnych równań opisujących sprężysto–plastyczność pozostaje bez zmian, natomiast wpływ czasu jest uwzględniony w równaniu wzmocnienia. Podano też ogólniejszą postać równań opisujących powierzchnię plastyczności, jak i powierzchnię potencjału. Ze względu na fakt, że proces zachodzi w czasie, równania te podawane są w formie prędkościowej. Należy też dodać, że analizować będziemy związki konstytutywne w naprężeniach efektywnych działających na szkielet gruntowy.

Pierwszym z równań opisujących model jest równanie dekompozycji odkształceń, które przyjmie postać:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}, \quad (1)$$

gdzie: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – prędkość odkształceń całkowitych, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ – prędkość odkształceń sprężystych,

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$ – prędkość odkształceń lepkoplastycznych (w ogólności niesprężystych).

Drugim z postawionych tutaj równań opisujących problem jest prawo sprężystości, które podawane jest identycznie jak w klasycznej teorii plastyczności:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (2)$$

Wyżej oznaczono:

$\boldsymbol{\sigma}$ – prędkość wektora naprężenia, \mathbf{D} – macierz stałych sprężystych materiału.

Odształcenia niesprężyste $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$ obserwujemy wtedy, gdy stan naprężenia w przestrzeni naprężeń osiągnie powierzchnię plastyczności. Funkcje plastyczności i potencjału (różne w niestowarzyszonym prawie płynięcia) założymy odpowiednio:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}) = 0, \quad G(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}) = 0. \quad (3)$$

Charakterystyczny w powyższych równaniach jest fakt zależności obydwu rozważanych powierzchni nie tylko od poziomu naprężenia w analizowanym punkcie i wartości parametru wzmocnienia, ale również od jego prędkości. Ten sposób uogólnienia równań (5) podany został w pracy [4].

Prawo płynięcia (w ogólnym przypadku prawo niestowarzyszone) zapiszemy w postaci:

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (4)$$

Tutaj λ jest skalarowym mnożnikiem wyrażającym długość wektora $\dot{\varepsilon}^{vp}$ w zależności od długości gradientu powierzchni potencjału.

Prawo lepkoplastycznego wzmocnienia zostało przyjęte w następującej postaci:

$$\dot{\kappa} = \Gamma_1(\sigma, \kappa) \dot{\varepsilon}^{vp} - \Gamma_2(\sigma, \kappa). \quad (5)$$

W powyższym: κ – jest skalarowym parametrem wzmocnienia, natomiast Γ_1 i Γ_2 – są funkcjami materiałowymi. Takie ujęcie lepkoplastyczności zostało pokazane w pracach [4] i [5].

Dla uzupełnienia kompletu ogólnych równań problemu podamy poniżej warunek zgodności, który dla przyjętej w (5) przyjmie postać:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\kappa}} \dot{\dot{\kappa}} = 0. \quad (6)$$

Analizując powyższe równanie, stwierdzamy, że w porównaniu z teorią sprężysto-plastyczności jest ono uzupełnione o jeden człon zawierający drugą pochodną parametru κ po czasie.

Rozwiązując układ powyższych równań, dochodzimy do równań konstytutywnych, które dla dalszych analiz przedstawimy w następujący sposób:

$$s \dot{\lambda} + h \dot{\lambda} + c = 0, \quad (7)$$

$$\dot{\sigma} = D \left(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right), \quad (8)$$

gdzie:

$$s(\sigma, \kappa, \dot{\kappa}) = \frac{\partial F}{\partial \dot{\kappa}} \Gamma_1 \frac{\partial G}{\partial \sigma}, \quad h(\sigma, \kappa, \dot{\kappa}) = -\frac{\partial F}{\partial \sigma} \mathbf{D} \frac{\partial G}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} \Gamma_1 \frac{\partial G}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\kappa}} \Gamma_1 \frac{\partial G}{\partial \sigma},$$

$$c(\sigma, \kappa, \dot{\kappa}) = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \mathbf{D} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} \Gamma_2 + \frac{\partial F}{\partial \dot{\kappa}} \dot{\Gamma}_2.$$

Ścisłe rozwiązanie podanego wyżej równania jest zadaniem bardzo trudnym. Rozwiązanie to bywa w ogólnym przypadku niewykonalne. Analityczne rozwiązania podobnego zagadnienia dla kilku szczególnych przypadków możemy znaleźć w [10]. W pracy przyjęto numeryczne rozwiązanie tak postawionego problemu. Przyjmując krok czasowy Δt oraz wykorzystując schemat całkowania Eulera możemy znaleźć wartość mnożnika λ w kroku czasowym $n+1$:

$$\ddot{\lambda}_{t_{n+1}} = -\frac{h}{s} \dot{\lambda}_{t_n} - \frac{c}{s}, \quad (9)$$

$$\dot{\lambda}_{t_{n+1}} = \dot{\lambda}_{t_n} \Delta t + \ddot{\lambda}_{t_n}$$

Oczywiście wartości $\ddot{\lambda}_{t_n}$ oraz $\dot{\lambda}_{t_n}$ z poprzedniego kroku czasowego są znane. Po wyznaczeniu wartości $\dot{\lambda}_{t_{n+1}}$ wracamy do równania (8) i otrzymujemy poszukiwane związki między niezmiennikami naprężenia i odkształcenia.

3. Szczegółowa postać funkcji materiałowych

W celu opisanego zachowania się próbki gruntu w aparacie trójosiowego ściskania konieczne jest rozpisanie związków (1-8) dla przypadku osiowej symetrii. W dalszej części będziemy operować niezmiennikami naprężenia i odkształcenia, które w przypadku osiowej symetrii obliczamy następująco:

$$\begin{aligned} p' &= \frac{1}{3}(\sigma_1' + 2\sigma_3'), & q' &= \sigma_1' - \sigma_3', \\ \varepsilon_V &= \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3, & \varepsilon_s &= \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie: p' - naprężenie średnie, q' - dewiator naprężenia, ε_V - odkształcenie objętościowe, ε_s - odkształcenie postaciowe,

Jak to już było wspomniane wcześniej, model ten jest uogólnieniem modelu Modified Cam Clay (pozycje [1], [2], [3], [6]), dlatego też równania, opisujące ten model, wykorzystywane są również przy określaniu rozważanego modelu lepkoplastycznego. Równaniami uwzględniającymi lepkoplastyczność są tutaj równanie powierzchni plastyczności oraz prawo wzmocnienia.

Funkcję opisującą powierzchnię plastyczności przyjmować będziemy jako równą funkcji potencjału (przyjmujemy stowarzyszone prawo płynięcia), którą zapiszemy:

$$F(p', q', p_c) = G(p', q', p_c) = q^2 + M^2 p [p - (p_c + A p_c)] = 0. \quad (11)$$

Jak łatwo zauważyć w powyższym, powierzchnia plastyczności jest podobna do powierzchni definiowanej przez MCC, różnicą jest uzależnienie jej od prędkości ciśnienia prekonsolidacji p_c , które zostało przyjęte jako parametr wzmocnienia.

Pozostało nam do określenia prawo wzmocnienia lepkoplastycznego, które przyjmiemy w postaci:

$$p_c = \frac{p_{c0}(1+e)}{\lambda-\kappa} \exp \frac{\Delta e^{vp}}{\lambda-\kappa} \varepsilon_v + B p_c. \quad (12)$$

W powyższym wyrażeniu oznaczono: p_{c0} – początkowa wartość ciśnienia prekonsolidacji, a Δe^{vp} i e – odpowiednio: niesprężysta część i aktualna wartość wskaźnika porowatości. We wzorze tym, zgodnie z propozycją Dragona i Mroza [5], mamy z lewej strony prędkość parametru wzmocnienia, natomiast po prawej wpływ zarówno wartości p_c , jak i często stosowaną w mechanice gruntów zależność od prędkości lepkoplastycznej części odkształcenia.

Tak opisany model charakteryzuje się sześcioma parametrami: λ , κ , M , G , A , B , gdzie cztery pierwsze są parametrami modelu MCC, natomiast dwa ostatnie są nowymi stałymi rozpatrywanej koncepcji.

Po ustaleniu szczegółowych postaci funkcji materiałowych przystępujemy do rozwiązania równania (7). W tym celu, szukając parametrów w nim występujących, dochodzimy do zależności:

$$s = -M^4 p A \frac{p_c(1+e)}{\lambda-\kappa} [2p - (p_c + A p_c)]$$

$$h = -M^4 [2p - (p_c + A p_c)]^2 K - 12Gq^2 - M^4 \frac{p_c(1+e)}{\lambda-\kappa} [2p - (p_c + A p_c)](A+1)$$

$$c = 6qG \varepsilon_s + M^2 p B p_c (A+1)$$

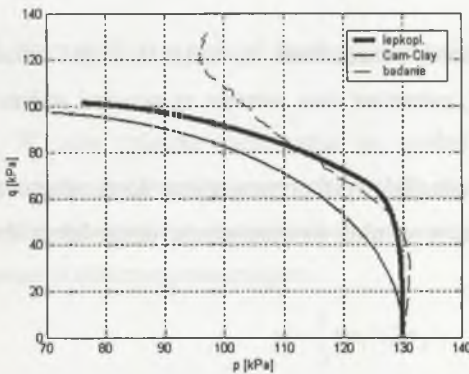
4. Numeryczna symulacja modelu

Do numerycznej analizy wybrano symulację dwóch badań w aparacie trójosiowego ściskania. Pierwsze z nich – ścinanie próbki bez drenażu ($\varepsilon_v = 0$) przy różnych prędkościach odkształcania próbki. W drugim doświadczeniu obciążano próbkę z umożliwieniem drenażu.

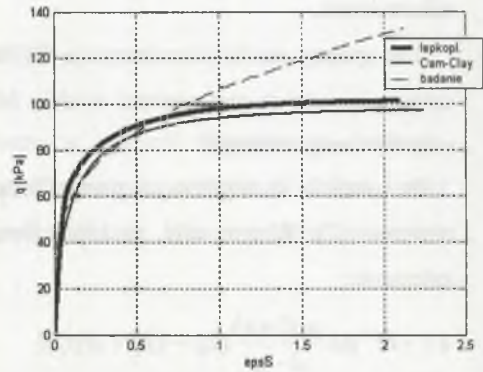
Analizowano ścinanie próbki naprężeniem dewiatorowym po uprzedniej konsolidacji. Parametry modelu przyjęte w symulacji mają następujące wartości:

$$\begin{aligned} G &= 40 \text{ MPa}, & M &= 1.25, & \lambda &= 0.05, \\ \kappa &= 0.005, & p_c &= 130 \text{ kPa}, & e_0 &= 1.5, \\ A &= 0.08, & B &= 0.002. \end{aligned}$$

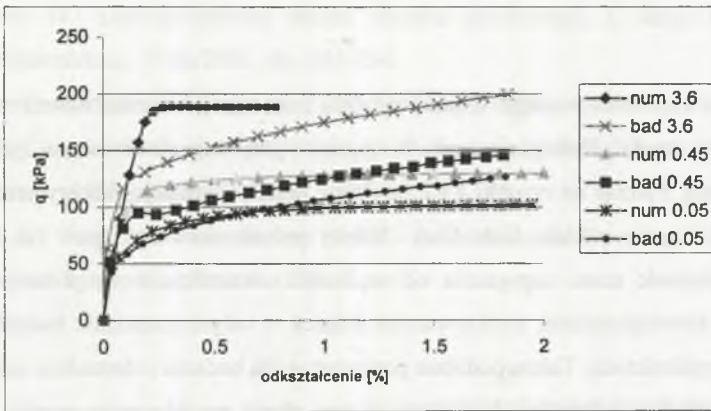
Symulacja badania bez drenażu była przeprowadzona dla trzech różnych prędkości odkształcenia: 3.6, 0.45 oraz 0.05 $\%/h$. Porównanie ścieżek „ $q-p$ ” oraz „ $q-\varepsilon_s$ ”, uzyskanych z modelu lepkoplastycznego, ze ścieżkami otrzymanymi z modelu Cam Clay oraz wyznaczonych z badań pokazane jest na rysunkach 1 i 2. Porównanie to odnosi się do prędkości odkształcenia próbki 0.05 $\%/h$. Natomiast na rysunku 3 zebrano przebiegi ścieżek „ $q-\varepsilon_s$ ” dla wszystkich omawianych prędkości uzyskane zarówno poprzez symulację numeryczną przy użyciu modelu lepkoplastycznego, jak i uzyskanych z doświadczeń.



Rys. 1. Ścieżka „ $q-p$ ” dla badania bez drenażu
Fig. 1. Undrained test – „ $q-p$ ” path

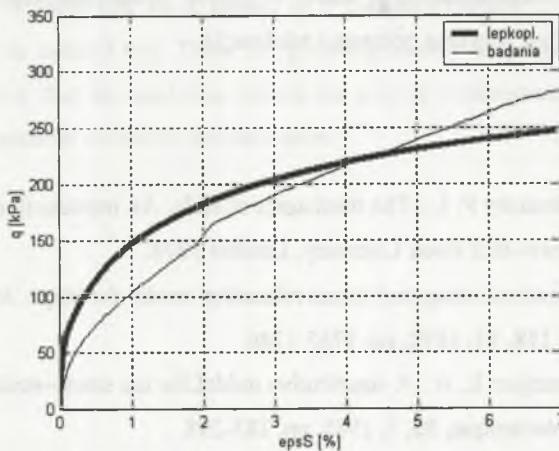


Rys. 2. Ścieżka „ $q-\varepsilon_s$ ” dla badania bez drenażu
Fig. 2. Undrained test – „ $q-\varepsilon_s$ ” path



Rys. 3. Porównanie wyników testu numerycznego z doświadczeniem – badanie bez drenażu
Fig. 3. Comparison of numerical test results with experiment – undrained test.

Badanie z drenażem przeprowadzono z prędkością ok. $0.5 \frac{\%}{h}$, która to prędkość gwarantowała zerowe ciśnienie wody w porach podczas testu. Porównanie przebiegu ścieżki „ $q-\varepsilon_s$ ” otrzymanej z symulacji numerycznej z doświadczeniem przedstawione jest na rysunku 4.



Rys. 4. Porównanie wyników testu numerycznego z doświadczeniem – badanie z drenażem
Fig. 4. Comparison of numerical test results with experiment – drained test.

5. Wnioski

Po analizie zaprezentowanego w pracy modelu oraz wyników testu numerycznego można stwierdzić, że model lepkoplastyczny w ujęciu wyżej zaprezentowanym jest zgodny z rzeczywistością. Patrząc na rysunki 1 i 2, widzimy lepszą symulację eksperymentu, niż ma to miejsce przy użyciu modelu Cam Clay. Należy jednak zauważyć (por. rys. 3), że choć uzyskano zależność stanu naprężenia od prędkości odkształcania się próbki, to brak jest zgodności z doświadczeniem analizowanych ścieżek w całym przedziale badania, jak i przy wszystkich prędkościach. Także podobne porównanie dla badania z drenażem informuje nas o niepełnej zgodności ilościowej. Uzyskane na tym etapie modelowania wyniki wskazują na kierunki dalszej pracy. Tak więc należałoby przyjąć poprawny sposób wyznaczenia parametrów modelu (tutaj zostały przyjęte w sposób heurystyczny), a także zastosować bardziej zaawansowany od MCC kształt powierzchni ograniczającej i postać równań opisujących problem. Przede wszystkim należy przeanalizować prawo wzmocnienia, uzupełniając go o zależność od plastycznych odkształceń postaciowych (wg koncepcji Wildego). W dalszych etapach konieczne będzie zbadanie zachowania się tak opisanego modelu w stanie prekonsolidacji, a także w innych sytuacjach charakterystycznych dla lepkoplastyczności (np. zjawiska pełzania i relaksacji).

LITERATURA

1. Atkinson J. H., Bransby P. L.: *The mechanics of soils. An introduction to critical state soil mechanic.* McGraw-Hill Book Company, London 1978.
2. Borja R. I.: Generalized creep and stress relaxation model for clays. *Journal of Geotechnical Engineering*, **118**, 11, 1992, pp. 1765-1786.
3. Borja R.I., Kavazanjian E. Jr.: A constitutive model for the stress-strain-time behaviour of „wet” clays. *Geotechnique*, **35**, 3, 1985, pp. 283-298.
4. De Borst R.: A novel rate-dependent subloading model and its implicit integration. *European Conference on Computational Mechanics, Kraków 2001.*
5. Dragon A., Mróz Z.: A model for plastic creep of rock-like materials accounting for the kinetics of fracture. *Int. J. Rock Mech. Sci & Geomech.*, **16**, 1979, pp. 253-259.
6. Gryczmański M.: *Wprowadzenie do opisu sprężysto-plastycznych modeli gruntów.* Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Warszawa 1995.

7. Łupieżowiec M.: Lepkoplastyczny model ośrodka gruntowego. II Sesja Doktorantów Wydz. Budownictwa, Wisła 2001, str. 295-304.
8. Perzyna P.: Teoria lepkoplastyczności. PWN, Warszawa 1966.
9. Vaid Y. P., Campanella R. G.: Time-dependent behaviour of undisturbed clay. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1977, pp. 693-709.
10. Winnicki A.: Viscoplastic consistency model – basic features. European Conference on Computational Mechanics, Kraków 2001.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ryszard IZBICKI

Abstract

The paper presents a viscoplastic constitutive model, which is a generalisation of the MCC model. It includes extended yield surface equation and hardening rule. The last equation is created according to Mroz [5]. The other equations are the same as in the MCC model. Constitutive expressions and also numerous algorithms to solve the problem are shown and a simulation is made of shear test for a sample in a triaxial apparatus at various strain rates (undrained test) and in drained test. There is a good conformity with the laboratory tests but some differences show that the next step should use a more complicated model and should design a method of material constants determination.