

Irena BAGIŃSKA*
Politechnika Wrocławska

KINEMATYCZNE PODEJŚCIE DO OCENY STATECZNOŚCI ZBOCZY

Streszczenie. W pracy przedstawiono wykorzystanie górnej oceny stanu granicznego do opisu stateczności zboczy. Pokazano dwa sposoby budowania kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia złożonego ze sztywnych bloków. Przedstawiono algorytm postępowania przy ich obliczaniu. Rozwiązanie opisano wskaźnikiem stabilności $\gamma H/c$ dla metody translacyjnej oraz rotacyjnej.

KINEMATICAL APPROACH TO STABILITY ANALYSIS OF SLOPES

Summary. The paper present the use of upper bound technique of limit analysis to stability slopes. Two ways of constructing the kinematically admissible collapse mechanisms made of rigid-block were shown. The algorithm of their calculation was introduced. The solution was described with the stability factors $\gamma H/c$ for both translational and rotational failure mechanisms.

1. Wstęp

Pomimo rozwoju metod numerycznych analizujących stateczność zboczy, nadal tradycyjną techniką oceniającą stateczność jest metoda równowagi granicznej. Pierwszą metodą, dzielącą zbocze na paski i rozpatrującą stan równowagi, była metoda szwedzka Pettersona rozwinięta przez Feleniusa [6]. Rozwój metody pasków przypadający na lata pięćdziesiąte i sześćdziesiąte dwudziestego wieku skupił się na uściśleniu oddziaływań między paskami Bishop, Janbu, Spencer [6]. Niestety, przyjmowane założenia i hipotezy nie uściślały wyników. Bazując na trzech równaniach równowagi (rzutów sił oraz momentów), nie jesteśmy w stanie określić dokładności oceny stateczności. Ponadto, metody te nie uwzględniają związku naprężeniowo-odkształceniowego.

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Ryszard J. Izicki.

Lepsze rozpoznanie naprężeń oraz odkształceń zniszczeniowych możemy otrzymać po uwzględnieniu plastyczności ośrodka metodą stanów granicznych. Ścisłe rozwiązanie tego zagadnienia dla granicznego warunku Coulomba-Mohra metodą charakterystyk opracował Sokołowski [9]. Nierzadko uzyskanie ścisłego rozwiązania jest trudne i dlatego łatwiej jest dokonać oszacowania poszukiwanych wielkości za pomocą twierdzeń nośności granicznej. Pierwsze z nich mówi, iż każde statycznie dopuszczalne pole naprężeń, spełniające warunki równowagi wewnętrznej i nie naruszające warunku plastyczności, dostarcza dolnej oceny granicznej. Drugie mówi, iż górną ocenę graniczną otrzymamy, przyjmując dowolne kinematycznie dopuszczalne pole prędkości, które spełnia warunki brzegowe oraz daje dodatnią moc dysypacji.

W tym artykule skupiono się na przedstawieniu górnej oceny wskaźnika stabilności zbroczy jednorodnych przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia.

2. Ocena górna stanu granicznego

Założono, że grunt jest sztywno-idealnie plastyczny, a jego warunek plastyczności jest wypukły w przestrzeni naprężeń (warunek Coulomba-Mohra). Przyjęto stowarzyszone prawo płynięcia

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f(\sigma'_{ij})}{\partial \sigma'_{ij}}, \quad (1)$$

gdzie:

$\dot{\epsilon}_{ij}$ - prędkość odkształceń w szkielecie gruntowym;

σ'_{ij} - tensor naprężeń efektywnych;

$f(\sigma'_{ij}) = 0$ - warunek plastyczności;

λ - nieujemny mnożnik.

Należy podkreślić, że przyjęcie stowarzyszonego prawa płynięcia (1) dla kryterium Coulomba-Mohra powoduje powstanie w trakcie deformacji przyrostu objętości ośrodka. Jest to jednak nieistotne dla obliczeń stateczności bez poszukiwania dokładnych przemieszczeń w trakcie zniszczenia [5].

Po skonstruowaniu kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia, zbudowanego ze sztywnych bloków, można zapisać równanie bilansu mocy, w którym moc obciążeń zewnętrznych wraz z siłami ciężkości w stanie statecznym jest mniejsza lub równa mocy dysypowanej wewnątrz ośrodka:

$$\int_{\nu} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* d\nu \geq \int_S T_i v_i dS + \int_{\nu} X_i v_i^* d\nu, \quad (2)$$

gdzie:

$\dot{\epsilon}_{ij}^*$ - prędkość odkształceń w kinematycznie dopuszczalnym mechanizmie zniszczenia, która jest związana z prędkością przemieszczeń zależnością:

$\dot{\epsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2}(v_{i,j}^* + v_{j,i}^*)$, na granicy S obciążenia zewnętrznego dana jest warunkiem brzegowym $v_i^* = v_i$;

σ_{ij}^* - tensor efektywnych naprężeń stowarzyszony z $\dot{\epsilon}_{ij}^*$;

X_i - wektor opisujący ciężar ośrodka gruntowego wraz z uwzględnieniem wyporu oraz ciśnienia spływowego wody;

S, ν - odpowiednio powierzchnia obciążenia oraz objętość ośrodka.

W ten sposób powstały bilans mocy, zawierający dysypację niezależną od dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia, daje zawsze górną ocenę obciążenia granicznego. Jest to słuszne, gdy spełniony jest warunek twierdzenia o nieujemności pracy sił zewnętrznych ($T_i v_i > 0$ na powierzchni S). Zauważmy ponadto, że bilans mocy możemy traktować jako równanie prac wirtualnych na kierunkach przemieszczeń, co prowadzi do zrównoważenia sił w blokach tworzących mechanizm [3],[5].

Kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia zbudowany jest z bloków (pasków) oddzielonych od siebie liniami nieciągłości prędkości. Wektory skoków prędkości muszą być odchylone od linii nieciągłości o kąt tarcia wewnętrznego ϕ . Wartość mocy dysypacji na jednostkę powierzchni linii nieciągłości prędkości dla kryterium Coulomba-Mohra można zapisać jako:

$$\dot{d}_L = \sigma'_{ij} n_j [v]_i = c [v] \cos \phi, \quad (3)$$

gdzie:

n_j - wektor jednostkowy normalny do powierzchni nieciągłości;

$[v]_i$ - skok wektora prędkości (normalna składowa wektora prędkości);

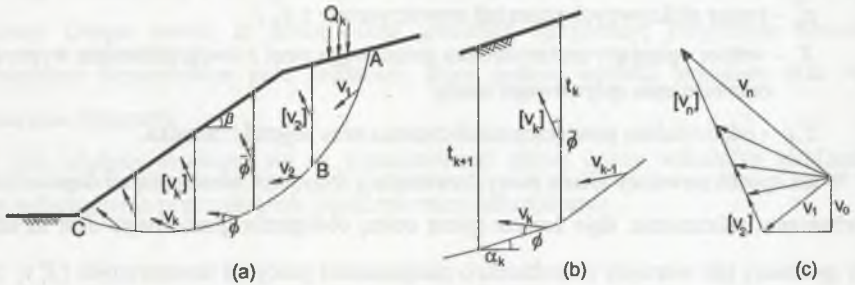
$[v]$ - wartość wektora prędkości.

Istniejące kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia podzielić można na dwie grupy: translacyjne budujące mechanizm zniszczenia na ruchu postępowym [4],[5] oraz rotacyjne budujące mechanizm zniszczenia na ruchu obrotowym [1],[2].

2.1. Mechanizm translacyjny

Pierwszym krokiem przeprowadzenia analizy stateczności jest poszukiwanie kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia wraz z przyjęciem stowarzyszonego

prawa płynięcia. Bloki tworzące mechanizm można budować w nawiązaniu do klasycznej analizy pasków, uwzględniając istnienie powierzchni zdeterminowanych budową geologiczną. Typowy podział zbrocza na bloki przedstawia rys. 1. Powierzchnia zniszczenia może przybierać dowolne kształty, najczęściej zbliżone do powierzchni cylindrycznej. Geometrię wszystkich bloków charakteryzuje długość podstawy L , kąt nachylenia podstawy α oraz długość powierzchni bocznej t .



Rys. 1. Translacyjny mechanizm zniszczenia (a); pojedynczy blok (b); hodograf prędkości (c)
 Fig. 1. Translational failure mechanism (a); single block (b); hodograph of velocity (c)

Zgodnie ze stowarzyszonym prawem płynięcia blok "1" porusza się z prędkością v_1 odchyloną od podstawy AB o kąt ϕ . Podobnie blok "2" oraz kolejne poruszają się z prędkościami v_k odchylonymi od podstaw o kąt ϕ . Powierzchnia oddzielająca bloki będzie więc linią nieciągłości prędkości, na której pojawi się skok prędkości $[v_k]$, będący różnicą prędkości sąsiednich bloków. Wektor skoku prędkości będzie odchylony od linii nieciągłości o kąt tarcia wewnętrznego $\bar{\phi}$.

Mając daną prędkość pierwszego bloku, zadaną warunkami brzegowymi, możemy wyznaczyć graficznie (rys.1c) lub algebraicznie wartości prędkości oraz skoków prędkości dla wszystkich bloków [7]:

$$\begin{aligned} v_k &= v_{k-1} \frac{\cos(\alpha_{k-1} - \phi_{k-1} - \bar{\phi}_k)}{\cos(\phi_k + \bar{\phi}_k - \alpha_k)}, \\ [v_k] &= v_k \frac{\sin(\phi_k - \phi_{k-1} - \alpha_k + \alpha_{k-1})}{\cos(\alpha_{k-1} - \phi_{k-1} - \bar{\phi}_k)}, \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

- k - wskaźnik oznaczający numer bloku;
- α_k - kąt nachylenia podstawy bloku;
- ϕ_k - jest kątem tarcia wewnętrznego w podstawie bloku;
- $\bar{\phi}_k$ - jest kątem tarcia wewnętrznego na prawej powierzchni k -tego bloku.

Oznaczając ciężar bloku k przez G_k oraz dodatkowe pionowe obciążenie przez Q_k , wartość pracy sił G_k i Q_k na kierunkach prędkości można zapisać jako:

$$\dot{W}_v = \sum_{k=1}^n (G_k + Q_k) v_k \sin(\alpha_k - \phi_k). \quad (5)$$

W mechanizmie sztywnych bloków dysypacja powstaje nie tylko wzdłuż powierzchni ścienia, ale również wzdłuż krawędzi bloków. Wykorzystując zapis równania (3), moc dysypacji w całym mechanizmie będzie sumą:

$$\dot{D} = \sum_{k=1}^n (l_k c_k v_k \cos \phi_k + t_k \bar{c}_k [v_k] \cos \bar{\phi}_k), \quad (6)$$

gdzie:

l_k - jest długością podstawy bloku;

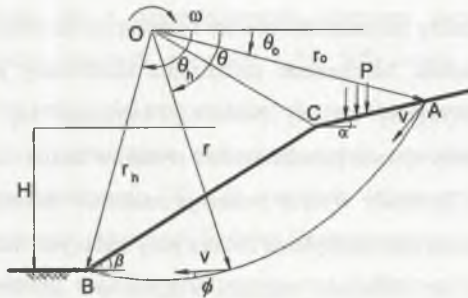
t_k - jest długością prawej krawędzi bloku k .

Zgodnie z definicją przyrównując pracę sił zewnętrznych (5) z mocą dysypacji (6), otrzymamy równanie bilansu mocy, będące funkcją kształtu pola kinematycznego. Dla zadanych parametrów gruntowych wyznaczone zostanie minimum funkcji kształtu, określające wysokość krytyczną zbocza będącego w równowadze. Znając wysokość krytyczną, można obliczyć graniczną wartość bezwymiarowego wskaźnika stabilności:

$$N_s = \frac{H_w \gamma}{c}. \quad (7)$$

2.2. Mechanizm rotacyjny

Podstawy mechanizmu rotacyjnego opisującego stateczność zboczy za pomocą górnej oceny stanu granicznego sformułował Chen [1].



Rys. 2. Rotacyjny mechanizm zniszczenia

Fig. 2. Rotational failure mechanism

Kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia zbudowany jest z bryły, której podstawę opisano spiralą logarytmiczną:

$$r(\theta) = r_o \exp[(\theta - \theta_o) \tan \phi] \quad (8)$$

gdzie:

r - promień spirali powiązany z kątem θ ;

r_o, θ_o - wartości początkowe.

Mając wybrany mechanizm zniszczenia, określamy wielkość pracy sił zewnętrznych jako sumę obciążenia zewnętrznego i sił masowych, które działają z zadaną prędkością kątową ω :

$$\dot{W} = P r_p \omega + W_v = P r_p \omega + \gamma r_o \omega (f_{OAB} - f_{OAC} - f_{OCB}). \quad (9)$$

Funkcje f opisują kształt bryły odłamu i zależą od $\theta_o, \theta_h, \beta, \alpha, H$ (rys. 2).

Wielkość mocy dysypowanej na powierzchni ścięcia osuwiska wyznaczonego jednorodnym obszarem ABC i wyrażeniem (3) wynosi [2]:

$$\dot{D} = \int_S c(v \cos \phi) dS = \int_{\theta_o}^{\theta_h} c(v \cos \phi) \frac{r d\theta}{\cos \phi} = \frac{c r_o^2 \omega}{2 \tan \phi} \{ \exp[2(\theta_h - \theta_o) \tan \phi] - 1 \}. \quad (10)$$

Przyrównując pracę sił zewnętrznych (9) z mocą dysypacji (10), otrzymamy równanie będące funkcją kształtu:

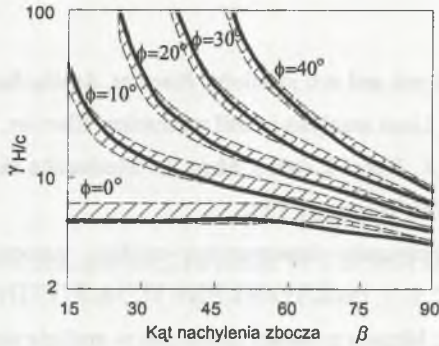
$$H = \frac{c}{\gamma} f(\theta_h, \theta_o). \quad (11)$$

Wyznaczając minimum funkcji f , określamy krytyczną wysokość zbocza ($H_{kr} = H_{min}$). Znajomość tej wysokości jest konieczna do obliczenia granicznej wartości wskaźnika stabilności (7).

3. Wnioski

Przedstawione analizy stateczności zboczy opierają się na rotacyjnym oraz translacyjnym mechanizmie zniszczenia. Mechanizm zniszczenia zbudowany jest ze sztywnych bloków analogicznie do tradycyjnej metody pasków. Posługując się wskaźnikiem stabilności, możliwe jest w dogodny sposób przedstawienie wyników analiz dla zboczy o różnych kątach nachylenia (rys. 3.). Powstały wykres pokazuje zależność zmienności granicznej wartości wskaźnika stabilności od kąta nachylenia zbocza przy zadanych warunkach gruntowych.

Należy pamiętać, że obliczane wartości wskaźników stabilności są w obu metodach niezależne od początkowej prędkości v_o i ω .



Rys. 3. Wykres zmiany wskaźnika stabilności dla jednorodnego zbocza przy braku ciśnienia porowego [7]

Fig. 3. Stabili factor for homogeneous slopes with zero pore pressure [7]

Zakresowany obszar powstał na podstawie obliczeń wykonanych metodą translacyjną, przy przyjęciu kołowej linii poślizgu. Górna obwiednia pokazuje zmienność wskaźnika, gdy oddziaływanie międzyblokowe jest uwzględnione w obliczeniach, a dolna, gdy oddziaływanie międzyblokowe pominięto. Przyjęto, że siły międzyblokowe równe są maksymalnej wartości wynikającej z warunku uplastycznienia Coulomba-Mohra lub równe są zero. Te dwa rozwiązania stają się identyczne, gdy kąt nachylenia zbocza zbliża się do 90° , ponieważ wtedy najefektywniejszym opisem jest przyjęcie jednoblokowego mechanizmu zniszczenia. Jak podaje Michalowski [7], w zakresowanym obszarze otrzymujemy rozwiązania wszystkich możliwych kombinacji sił międzyblokowych. Może to sugerować postulat, iż uwzględnianie w obliczeniach sił międzyblokowych zawyża wielkość mocy dysypacji, co powoduje otrzymanie wyższej wartości wskaźnika stabilności.

Rozwiązanie według kryterium górnej oceny, bazujące na mechanizmie rotacyjnym, w znacznej części pokrywa się z zakresowanym obszarem rozwiązań mechanizmu translacyjnego. Dopiero przy stromych zboczach ($\beta > 50^\circ$) ocena rotacyjna przyjmuje mniejsze wartości wskaźnika stabilności przy podobnych warunkach gruntowych.

Obecnie poszukiwane są rozwiązania opisywane przez przestrzenne kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia [8]. W ostatnich latach powstało kilka takich propozycji uwzględniających ruch sztywnych bloków. Podejmowane są próby uwzględnienia w obliczeniach niejednorodności ośrodka gruntowego oraz wpływu ciśnienia porowego tak, aby opis matematyczny najwierniej odpowiadał rzeczywistym warunkom gruntowym.

LITERATURA

1. Chen W.F.: Limit analysis and soil plasticity. Elsevier, Amsterdam 1975.
2. Chen W.F., Liu X.L.: Limit analysis in soil mechanics. Elsevier, Amsterdam 1990.
3. Derski W., Izbicki R.J., Kisiel I. (red.), Mróz Z.: Mechanika skał i gruntów. Mechanika techniczna, t. VII. PWN, Warszawa 1982.
4. Izbicki R.J.: Kinematycznie dopuszczalna analiza stateczności skarp i zboczy. Arch. Hydr., t. XXIX, z. 3, 1982.
5. Izbicki R.J., Mróz Z.: Metody nośności granicznej w analizie stateczności zboczy. PWN, Warszawa 1976.
6. Madej J.: Metody sprawdzania stateczności zboczy. Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa 1981.
7. Michalowski R.L.: Slope stability analysis: a kinematical approach. Geotechnique 45, No. 2, 1995, 283-293.
8. Michalowski R.L.: Three-dimensional analysis of limit loads on Mohr-Coulomb soil, Foundations of civil and environmental engineering 1, No. 1, 2002, 137-147.
9. Sokołowski W.W.: Statyka ośrodków sypkich. PWN, Warszawa 1958.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Antoni Florkiewicz

Abstract

The collapse mechanism is assumed to be in the form of rigid blocks analogous to slice methods. The proposed analysis, although based on the kinematical approach of limit equilibrium of forces acting on all blocks in the selected mechanism. All slope stability analyses based on the limit equilibrium of slices can be interpreted in the context of their implicitly assumed collapse mechanisms. Solutions to stability factor $\gamma H/c$ from all analyses based on the limit equilibrium of slices fall into a relatively narrow range bounded by the solutions using the proposed analysis for two extreme assumptions of soil strength between the blocks. Solutions beyond this range obtained by a method of slices indicate unreasonable consequences when interpreted in the context of the failure mechanism.