

Roman JASKULSKI*

Szkoła Nauk Technicznych i Społecznych Politechniki Warszawskiej w Płocku

WPLYW POSTACI ROZKŁADU WYTRZYMAŁOŚCI BETONU NA ROZKŁAD NOŚNOŚCI ZGINANEGO PRZEKROJU ŻELBETOWEGO

Streszczenie. W pracy przeanalizowano wpływ skośności rozkładu wytrzymałości betonu na rozkład momentu niszczącego zginanego przekroju żelbetowego. Analiza wykazała duże zróżnicowanie współczynników skośności i spłaszczenia otrzymanych rozkładów momentów, a także, dla betonu niższej klasy, znaczące różnice prawdopodobieństw uzyskania wartości momentu mniejszej od nośności obliczeniowej w zależności od przyjętego typu rozkładu wytrzymałości betonu.

INFLUENCE OF THE DISTRIBUTION TYPE OF CONCRETE STRENGTH ON DISTRIBUTION OF THE RESISTANCE OF REINFORCED CONCRETE CROSS-SECTION UNDER BENDING

Summary. Influence of the skewness of the distribution of concrete strength on distribution of the ultimate moment of reinforced concrete cross-section under bending was analyzed. Significant differences of the coefficients of skewness and excess of resultant distributions were observed and also, for the concrete of lower strength, considerable differences of the probability of not reaching the design value of ultimate bending moment depending on the assumed distribution type of concrete compression strength.

1. Wstęp

Badanie omówione w niniejszym artykule stanowią przyczynek do rozwoju metod projektowania III poziomu, w szczególności metod symulacyjnych, zwanych również metodami Monte Carlo. W metodach tego poziomu ważną rolę odgrywa precyzja odwzorowania danych wejściowych, gdyż ma ona bezpośredni wpływ na wiarygodność uzyskiwanych wyników. Ma to szczególne znaczenie, jeśli weźmiemy pod uwagę fakt, że wyników obliczeń probabilistycznych (tj. uzyskanego lub przyjętego poziomu zawodności) nie da się praktycznie zweryfikować doświadczalnie.

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Jan Pawlikowski.

Dane wejściowe do metod III poziomu przyjmowane są jako zmienne losowe o określonym typie rozkładu. Dobór parametrów tego rozkładu oparty jest na statystycznej analizie wielkości rzeczywistych, natomiast przyjęcie typu jest zwykle arbitralną decyzją przeprowadzającego obliczenia.

W projektowaniu konstrukcji żelbetowych metodami probabilistycznymi zakłada się najczęściej, że parametry określające nośność przekroju mają rozkład normalny [10]. Jest to założenie, które daje się uzasadnić w przypadku danych, dotyczących geometrii przekroju. Jednak w przypadku wytrzymałości betonu sprawa nie jest już tak jednoznaczna. Z jednej strony, zawarty w normie [7] algorytm obliczania wytrzymałości gwarantowanej betonu opiera się na założeniu, że wytrzymałość betonu na ściskanie ma rozkład normalny. Z drugiej strony, w pracach dotyczących zmienności wytrzymałości betonu pojawiają się tezy, że cechę tę lepiej opisuje rozkład Pearsona III typu [6], a w pracy [3] pod uwagę brany był też rozkład logarytmno-normalny i rozkład Weibulla. Niestety, w żadnej z tych prac nie rozstrzygnięto jednoznacznie, który z wymienionych rozkładów najlepiej opisuje wytrzymałość betonu. Analiza wyników zawartych w przytoczonych pracach oraz dodatkowo w [2] pozwala za to stwierdzić, że rozkład wytrzymałości charakteryzuje się znaczną wartością współczynnika skośności. Decydując się na uwzględnienie tego faktu, w obliczeniach stajemy przed dylematem: jaki rozkład teoretyczny przypisać wytrzymałości betonu do celów obliczeniowych. Dylemat ten można próbować rozstrzygnąć w oparciu o wyniki testów statystycznych. Testy te nie dają jednak najczęściej jednoznacznej odpowiedzi, dlatego trzeba rozważyć także inne kryteria doboru.

Jednym z takich kryteriów może być analiza jakościowego i ilościowego wpływu przyjętego rozkładu na wynikowy rozkład nośności przekroju (lub niezawodności elementu). Analiza taka powinna nam również odpowiedzieć na pytanie o celowość uwzględniania w obliczeniach współczynnika skośności rozkładu wytrzymałości betonu.

Wyniki takiej właśnie analizy, przeprowadzonej w oparciu o model nośności żelbetowego przekroju zginanego, są przedmiotem niniejszego referatu.

2. Model, założenia oraz zakres przeprowadzonych obliczeń

Ogólne założenia metod symulacyjnych zaprezentowane zostały w pracach [4,1]. Przykład zastosowania tych metod do wymiarowania elementów żelbetowych znajduje się w pracy [10]. Ze względu na ograniczenia objętości niniejszego referatu zagadnienia te nie zostaną tutaj bliżej omówione.

Jednym z najważniejszych elementów każdego programu symulacyjnego jest zapisany w postaci wzoru model obliczeniowy. Model ten w przypadku projektowania symulacyjnego elementów żelbetowych powinien, zgodnie z zaleceniami CEB, CEN oraz ISO, dobrze aproksymować średnie wartości uzyskane z badań.

Jako model opisujący moment niszczący zginany przekrój żelbetowy przyjęto wzór w postaci (1). Jest on oparty na modelu przedstawionym w pracy [5], który został dostosowany do wartości f_c określanej na próbkach walcowych.

$$M_R = 0,5 [1 - \exp(-2,35\alpha)] b d^2 f_c \quad (1)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{A_s f_y}{b d f_c}$$

- przy oznaczeniach wg [8].

Przyjęto założenie, że wszystkie parametry występujące we wzorze (1), poza wytrzymałością betonu, opisane są rozkładami normalnymi. Parametry tych rozkładów zestawiono w tabeli 1. Obliczenia przeprowadzono dla dwóch wytrzymałości średnich betonu $f_{cm1}=28$ MPa i $f_{cm2}=48$ MPa odpowiadających klasom B 25 i B 50 wg [8]. W każdej z tych klas wykonano obliczenia przy wartościach parametru α z zakresu 0,05-0,45. Każdej z przyjętych do obliczeń wartości α odpowiadała inna wartość średnia przekroju zbrojenia, stąd w tabeli 1 wartości A_s podano w postaci przedziału.

Tabela 1

Parametry rozkładów zmiennych wejściowych

Zmienna	Parametry rozkładu zmiennej			Uwagi
	wartość średnia	odchylenie standardowe	współczynnik zmienności	
wysokość przekroju - h [m]	0,4	0,0104	0,026	-
szerokość przekroju - b [m]	0,2	0,0054	0,027	-
granica plastyczności stali - f_y [MPa]	495,0	44,6	0,09	stal A-III
pole przekroju zbrojenia - A_s [cm ²]	1,39 - 23,95	0,042 - 0,072	0,03	stała zmienność
grubość otuliny - a_1 [m]	0,035 - 0,051	0,003	0,086 - 0,059	stałe odchylenie

Wysokość użyteczną przekroju obliczano za każdym razem jako różnicę między wylosowanymi wartościami wysokości przekroju i otuliny zbrojenia, dlatego w zestawieniu danych występują te dwie wielkości. Grubość otuliny określano z warunków konstrukcyjnych dla każdego przyjmowanego przekroju zbrojenia, dlatego ta wartość również opisana jest przedziałem.

Wytrzymałość betonu na ściskanie opisano wariantowo trzema typami rozkładów: rozkładem normalnym, rozkładem Pearsona III typu oraz rozkładem będącym złożeniem rozkładów: normalnego i Gumbela, nazwany rozkładem NG. Uzasadnieniem przyjęcia rozkładu NG do symulacji jest jego duża zgodność z empirycznymi rozkładami wytrzymałości betonu, co zostało stwierdzone na podstawie danych znajdujących się w pracy [2]. Funkcja gęstości rozkładu NG zdefiniowana jest wzorem (2):

$$\varphi_{NG}(\mu, \sigma, \beta) = \beta N(\mu, \sigma) + (1 - \beta)G(\mu, \sigma) \quad (2)$$

gdzie:

β - parametr (przyjmujący wartości z przedziału od 0 do 1),

$N(\mu, \sigma)$, $G(\mu, \sigma)$ - funkcje gęstości rozkładów: normalnego i Gumbela o parametrach μ i σ .

Współczynnik skośności rozkładu NG przyjmuje wartości z przedziału od 0 do 1,1395 i jest zależny od parametru β zgodnie ze wzorem (3):

$$a = 1,1395(1 - \beta) \quad (3)$$

Zestawienie przyjętych do obliczeń parametrów rozkładów wytrzymałości betonu znajduje się w tabeli 2. Do rozkładu Pearsona III typu przyjęto współczynnik skośności równy podwojonemu współczynnikowi zmienności, co gwarantuje, że funkcja gęstości tego

Tabela 2

Parametry przyjętych rozkładów wytrzymałości betonu

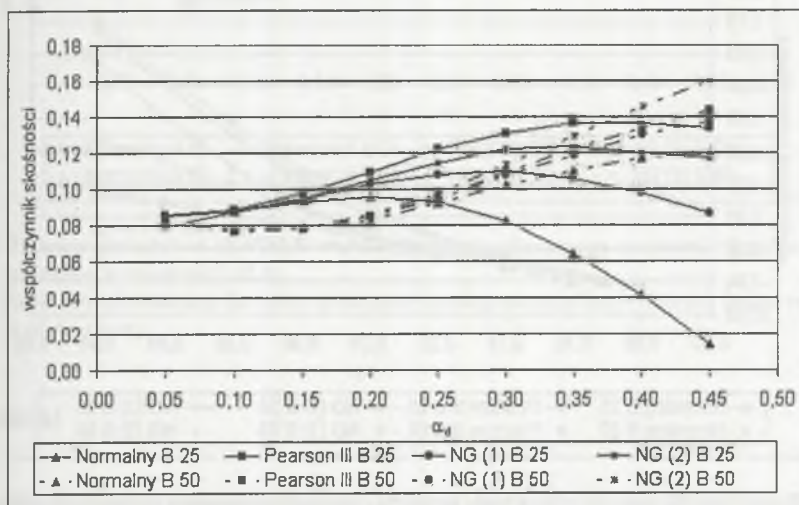
Klasa betonu	Typ rozkładu	Parametry rozkładu			
		wartość średnia [MPa]	odchylenie standardowe [MPa]	współczynnik skośności [-]	współczynnik zmienności [-]
B 25	normalny	28	5,04	-	0,18
	Pearsona III typu			0,36	
	NG (1)			0,36	
	NG (2)			0,50	
B 50	normalny	48	5,28	-	0,11
	Pearsona III typu			0,22	
	NG (1)			0,22	
	NG (2)			0,50	

rozkładu nie przyjmuje wartości ujemnych. Wartość współczynnika skośność rozkładu NG, przyjęto raz równą współczynnikowi skośności rozkładu Pearsona, a drugi raz zbliżoną do wartości współczynników skośności rozkładów empirycznych znajdujących się w pracy [2].

Dla każdego zestawu danych przeprowadzono 5 symulacji po 5.000.000 losowań każda. Otrzymane wyniki uśredniano. Obliczenia wykonane zostały za pomocą specjalnie w tym celu opracowanego programu komputerowego napisanego w języku Turbo Pascal 6.0. Założone rozkłady danych wejściowych uzyskiwano za pomocą procedur wykorzystujących generator liczb pseudolosowych o rozkładzie jednostajnym, stanowiący integralną część pakietu Borland Turbo Pascal.

3. Analiza wyników

Jako wynik działania programu symulacyjnego otrzymywano zbiór wartości momentu niszczącego żelbetowego przekroju zginanego obliczonego dla każdorazowo wylosowanych wartości parametrów. Dla zbioru tego, traktowanego jako dyskretna próbka nieznanego typu rozkładu zmiennej losowej, określano cztery parametry: wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe oraz współczynniki: skośności i spłaszczenia. Na podstawie dwóch pierwszych

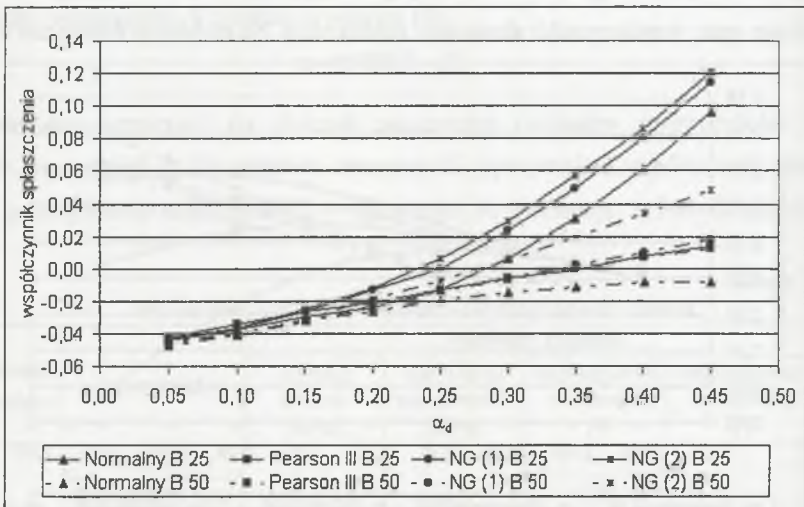


Rys. 1. Wartość współczynnika skośności rozkładu momentu niszczącego w zależności od α_d
 Fig. 1. Value of the coefficient of skewness of the ultimate moment distribution related to α_d

parametrów obliczano współczynnik β_R , który jest wyrażoną krotnością odchylenia standardowego miarą odległości wartości obliczeniowej momentu M_{Rd} od jego wartości średniej M_{Rm} . Ponadto zliczano w wygenerowanej populacji elementy, których wartość była mniejsza od M_{Rd} . Ich liczbę podzieloną przez liczebność całej populacji traktowano jako miarę prawdopodobieństwa nieosiągnięcia przez zginany przekrój żelbetowy nośności obliczeniowej. Wszystkie obliczone parametry poddano analizie.

Analiza wykazała, że typ przyjętego rozkładu wytrzymałości betonu ma znikomy wpływ na dwa pierwsze parametry rozkładu wynikowego. Względne różnice w wartości średniej kształtowały się około 0,2%. W przypadku odchylenia standardowego różnice między poszczególnymi rozkładami wyniosły od około 1% dla betonu klasy B 50 do około 2% dla betonu B 25. Największe różnice wystąpiły między rozrzutami wyników, uzyskanych przy wytrzymałości betonu opisanej rozkładem Pearsona III typu, a odchyleniami wyników, otrzymanych z wykorzystaniem rozkładu NG o współczynniku skośności równym 0,50.

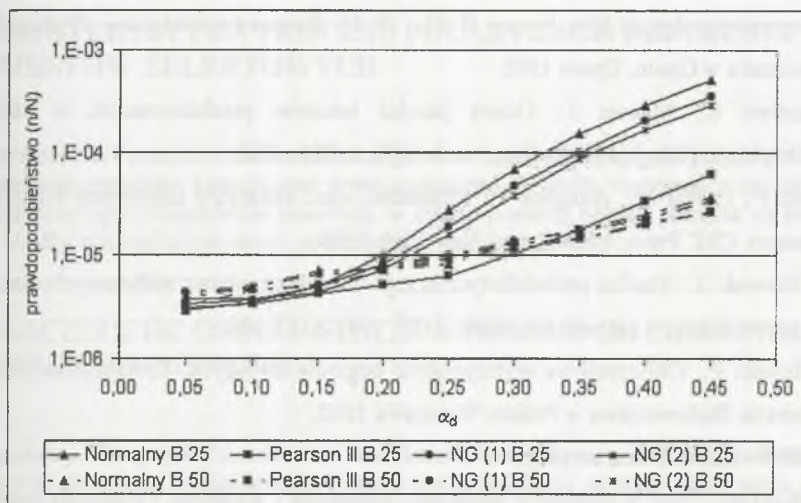
Niewielkie różnice wartości dwóch pierwszych parametrów rozkładu przełożyły się na podobnie niewielkie różnice w wartościach współczynnika β_R . Uzyskano tu wartości różniące się od siebie maksymalnie około 3% w przypadku betonu klasy B 25 i około 1% dla betonu B 50. Tym razem ekstremalne wartości otrzymano dla wytrzymałości betonu zadanych rozkładami: normalnym i Pearsona III typu.



Rys. 2. Wartość współczynnika spłaszczenia rozkładu momentu niszczonego w zależności od α_d
 Fig. 2. Value of the coefficient of excess of the ultimate moment distribution in relation to α_d

Pozostałe dwa parametry rozkładów momentu niszczonego (tj. współczynniki skośności oraz spłaszczenia) wykazały znacznie większe zróżnicowanie. Przebieg ich zmienności w zależności od parametru α_d dla wszystkich założonych rozkładów wytrzymałości betonu przedstawiono na rysunkach 1 oraz 2. Jak widać, rozrzut tych parametrów rośnie wraz ze wzrostem wartości α_d i jest większy dla betonu o niższej wytrzymałości.

Najważniejszym spośród analizowanych wyników jest prawdopodobieństwo osiągnięcia przez przekrój momentu niszczącego mniejszego od obliczeniowej nośności na zginanie. Zmienność tego prawdopodobieństwa w funkcji α_d została zobrazowana na rysunku 3 zarówno dla betonu klasy B 25 i B 50. Jak widać, wpływ rozkładu wytrzymałości betonu na to prawdopodobieństwo jest wyraźny w przypadku betonu o niższej wytrzymałości i praktycznie żaden w przypadku drugiego z analizowanych betonów.



Rys. 3. Prawdopodobieństwo uzyskania wartości momentu niszczącego mniejszej od nośności obliczeniowej w zależności od α_d

Fig. 3. Probability of obtaining the value of ultimate bending moment lower than the design resistance in relation to α_d

4. Wnioski

Analiza wyników przeprowadzonych obliczeń pozwala stwierdzić, że przyjęcie do obliczeń symulacyjnych wytrzymałości betonu opisanej rozkładem normalnym skutkuje uzyskaniem najwyższych wartości prawdopodobieństwa osiągnięcia momentu niszczącego zginany przekrój żelbetowy mniejszego od obliczeniowej wartości nośności. Uwzględnienie skośności rozkładu wytrzymałości betonu może dać efekt w postaci wzrostu zapasu bezpieczeństwa, przy czym rozkład Pearsona III typu daje znacznie większy wzrost tego zapasu niż rozkład NG. Efekt ten jest wyraźnie widoczny dla betonów niższych klas (np. B 25), ale praktycznie znika dla betonów o wyższej wytrzymałości (np. B 50).

LITERATURA

1. Jaskulski R.: Zastosowanie metod symulacyjnych w zagadnieniach inżynierskich. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, nr 1514, seria Budownictwo, z. 93, Gliwice 2001, s. 165-174.
2. Konopka E.: Probabilistyczny opis wytrzymałości betonu produkowanego w centralnych wytwórniach oraz określenie różnicy między projektowaną i empiryczną wytrzymałością gwarantowaną dwóch klas betonu B 35 i B 45. Rozprawa doktorska, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, Opole 1995.
3. Korzekwa S., Mames J.: Ocena jakości betonów produkowanych w zakładach prefabrykacji, Przegląd Budowlany, nr 5, 1976, s. 226 - 226.
4. Marek P., Guštar M., Anagnos T.: Simulated-based reliability assessment for structural engineers. CRC Press, Boca Raton, New York 1996.
5. Pawlikowski J.: Analiza probabilistyczna zapasu bezpieczeństwa żelbetowych elementów zginanych. Studia z zakresu inżynierii, z. 25, 1987, s. 87-106.
6. Pawłowski P.: Obliczeniowa wytrzymałość betonów zwykłych. Towarzystwo Naukowe Ekspertów Budownictwa w Polsce. Warszawa 1962.
7. PN-88/B-06250: Beton zwykły.
8. PN-B-03264:1999: Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie.
9. Wiczorkowski R., Zieliński R.: Komputerowe generatory liczb losowych. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.
10. Woliński Sz.: Wymiarowanie elementów żelbetowych metodą symulacji Monte Carlo. Inżynieria i Budownictwo, nr 6, 2002, s. 335-337.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Szczepan Woliński

Abstract

Influence of skewness of the distribution of concrete strength on distribution of the ultimate moment of reinforced concrete section under bending was analyzed. Three types of distributions were assumed: normal, Pearson III type and the combination of normal and Gumbel's distribution functions. Resultant distributions of the ultimate bending moment of the cross-section were obtained with use of Monte Carlo simulation method.