

Dariusz KĘDZIOR*
Politechnika Krakowska

TRÓJWYMIAROWA ANALIZA SZORSTKIEGO KONTAKTU CIAŁ SPRĘŻYSTYCH PRZY DUŻYCH DEFORMACJACH

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposób formułowania i rozwiązywania zadań nieliniowej dynamiki szorstkiego kontaktu ciał sprężystych poddanych w warunkach dużych przemieszczeń i odkształceń. Jako przykład obliczono wykonane z materiału gumopodobnego łożysko walcowe z trzpieniem prowadzącym.

3D ANALYSIS OF FRICTIONAL CONTACT OF ELASTIC BODIES UNDERGOING LARGE DEFORMATIONS

Summary. In the paper, a description and analysis of motion of elastic bodies experiencing large displacements and finite strains in terms of unilateral frictional contact is presented. Cylindrical lead rubber bearing is calculated as an example.

1. Wstęp

Ciągły rozwój technologii oraz inżynierii materiałowej sprawia, że, obok klasycznych materiałów konstrukcyjnych: stali, betonu czy drewna, często korzysta się z materiałów, takich jak: kompozyty, geosyntetyki, laminaty, zbrojone ceramiki itp. Wśród nich dużą popularnością cieszą się materiały gumopodobne, znajdujące zastosowanie w takich elementach konstrukcyjnych, jak: łożyska mostowe, podkładki tłumiące, wibroizolatory, kompozyty gumowo-metalowe, izolacje antysejsmiczne, uszczelki, powłoki pneumatyczne czy też odbojnice (bufory). Jednocześnie gwałtowny rozwój nanotechnologii sprawia, że coraz łatwiej i z coraz większą precyzją można uzyskiwać materiały o pożądanym właściwościach, np. materiały o ujemnej liczbie Poissona. Metody obliczeń i wymiarowania powinny uwzględniać

* Opiekun naukowy: Prof. zw. dr hab. inż. Gwidon Szefer.

dominujące cechy fizyczne materiałów, z których wykonana jest konstrukcja bądź element konstrukcyjny, jakimi w przypadku materiałów gumopodobnych są duże (kilkadziesiąt procent i więcej) odkształcenia oraz nieściśliwość.

W oparciu o istniejący stan wiedzy z zakresu mechaniki elastomerów, a także prowadzone analizy numeryczne [1] [2] w niniejszej pracy przedstawiono lokalne oraz wariacyjne sformułowanie problemu brzegowego dynamiki kontinuum poparte przykładem liczbowym - obliczeniem łożyska. W zamieszczonym przykładzie guma potraktowana jest najpierw jak tradycyjny materiał Hooke'a, a następnie, zakładając istnienie stosownej mikrostruktury materiału, jako kompozyt o ujemnym współczynniku Poissona ν .

2. Dynamiczne zagadnienie brzegowe przy dużych deformacjach

Niech ciało sprężyste B obciążone siłami masowymi $\mathbf{b}(t)$ oraz powierzchniowymi $\mathbf{p}(t)$ będzie w jednostronnym kontakcie ze sztywnym podłożem. Oznaczając przez S , E , \mathbf{u} odpowiednio II tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa, tensor odkształcenia Greena i wektor przemieszczenia, zaś przez \mathbf{t}_n i \mathbf{t}_T normalny i styczny wektor naprężeń kontaktowych, otrzymamy – korzystając z zasady mocy wirtualnych – sformułowanie brzegowo-początkowego problemu kontaktowego w następującej postaci

$$\int_{B_R} \delta E dV_R = \int_{B_R} \mathbf{b} \delta \mathbf{u} dV_R + \int_{S_R} \mathbf{p}_R \delta \mathbf{u} dS_R - \int_{B_R} \rho_R \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dV_R + \int_{\Gamma_C} \mathbf{t}_n \delta \mathbf{u}_n dS + \int_{\Gamma_C} \mathbf{t}_T \delta \mathbf{u}_T dS, \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in B_R$$

gdzie:

B_R – konfiguracja odniesienia,

$S_R = \partial B_R \setminus \Gamma_C$ – część brzegu z zadaniem w konfiguracji odniesienia obciążeniem,

Γ_C – nie znana strefa kontaktu.

Sformułowanie (1) musi zostać uzupełnione warunkami kontaktu, które przyjmą postać:

i) dla naprężeń normalnych

$$\begin{aligned} g_n \geq 0 &\Rightarrow t_n \geq 0 \\ g_n > 0 &\Rightarrow t_n = 0 \\ g_n = 0 &\Rightarrow t_n > 0, \quad t_n g_n = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ii) dla naprężeń stycznych (przyjmując prawo tarcia Coulomba)

$$\mathbf{t}_T = -\mu t_n \frac{\dot{\mathbf{u}}_T}{|\dot{\mathbf{u}}_T|} \quad (3)$$

gdzie:

g_n – miara odległości punktu na brzegu ciała od podłoża,

t_n – wektor naprężeń normalnych w strefie kontaktu,

\dot{u}_T – prędkość poślizgu,

μ – współczynnik tarcia.

Ograniczając rozważania do materiałów hipersprężystych, tensor naprężenia w związku (1) rozumiany jest jako funkcja $\mathbf{S} = \partial W / \partial \mathbf{E}$, gdzie $W(\mathbf{E})$ jest potencjałem sprężystym. Zważywszy na silną nieliniowość problemu (1) – (3), zastosowano podejście przyrostowe.

3. Sformułowanie przyrostowe

Stosując opis Lagrangea, rozważmy ciąg konfiguracji $B_0 = B_R, B_1, \dots, B_N, B_{N+1}, \dots, B_k$ odpowiadających różnym chwilom czasu $t_0, t_1, \dots, t_N, t_{N+1}, \dots, t_k$. Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\mathbf{u}_{N+1} = \mathbf{u}_N + \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{E}_{N+1} = \mathbf{E}_N + \Delta \mathbf{E}, \quad \mathbf{S}_{N+1} = \mathbf{S}_N + \Delta \mathbf{S} \quad (4)$$

Zlinearyzowany układ równań opisujący rozważany problem przyjmie postać

$$\begin{aligned} \text{Div}[\Delta \mathbf{S}(\mathbf{1} + \mathbf{H}) + \mathbf{S} \Delta \mathbf{H}] + \rho_R \Delta \mathbf{b} &= \rho_R \Delta \ddot{\mathbf{u}} \\ \Delta \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{H} + \Delta \mathbf{H}^T + \Delta \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \mathbf{H} \Delta \mathbf{H}^T) \\ \Delta \mathbf{S} &= \mathbf{C}^t \Delta \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

$\mathbf{H} = \nabla \mathbf{u}$ – gradient przemieszczenia,

\mathbf{C}^t – tensor siecznych modułów sprężystości w chwili t .

Biorąc pod uwagę związki (3) oraz uwzględniając fakt, że podczas procesu nadawania przyrostów również strefa kontaktu Γ_C ulega zmianie (wyrażenie $\delta L_{\Delta \Gamma_C}$), otrzymujemy następującą postać zasady mocy wirtualnych

$$\begin{aligned} \int_{B_R} (\Delta \mathbf{S} : \delta \Delta \mathbf{E} + \mathbf{S} \Delta \mathbf{H} : \delta \Delta \mathbf{H}) dV_R &= \int_{B_R} \rho_R \Delta \mathbf{b} \delta \Delta \mathbf{u} dV_R + \int_{S_R} \Delta \mathbf{p}_R \delta \Delta \mathbf{u} dS_R + \\ &\quad \forall \delta \Delta \mathbf{u} \quad (6) \\ - \int_{B_R} \rho_R \Delta \ddot{\mathbf{u}} \delta \Delta \mathbf{u} dV_R &+ \int_{\Gamma_C} (\Delta t_n \delta \Delta \mathbf{u}_n + \Delta t_T \delta \Delta \mathbf{u}_T) dS + \delta L_{\Delta \Gamma_C} \end{aligned}$$

4. Analiza numeryczna

Do rozwiązania problemu brzegowo-początkowego (4)-(6) zastosowano standardową dyskretyzację obszaru B_R Metodą Elementów Skończonych

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{X})\mathbf{q}(t), \quad \Delta\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{X})\Delta\mathbf{q}(t), \quad (7)$$

gdzie:

$\mathbf{N}(\mathbf{X})$ – funkcje kształtu,

$\mathbf{q}(t)$ – przemieszczenia węzłowe.

całkując równania ruchu metodą Newmarka. Otrzymano równanie macierzowe

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_T(\mathbf{q})\Delta\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_S(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_{nT}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_{CN}] \Delta\mathbf{q} = \Delta\mathbf{F}^{\text{ext}} + \Delta\mathbf{F}_C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (8)$$

w którym:

\mathbf{M} – macierz mas,

\mathbf{K}_T – macierz tłumienia pochodząca od tarcia,

\mathbf{K}_0 – macierz sztywności,

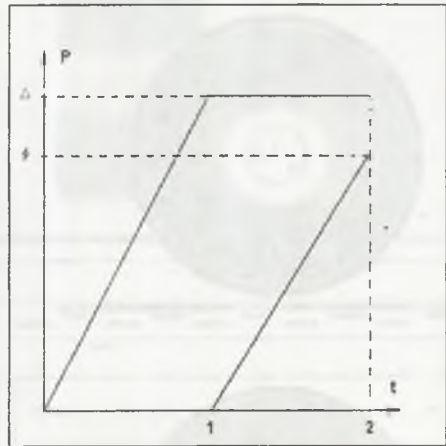
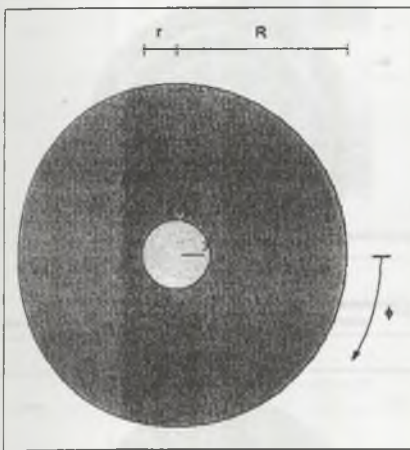
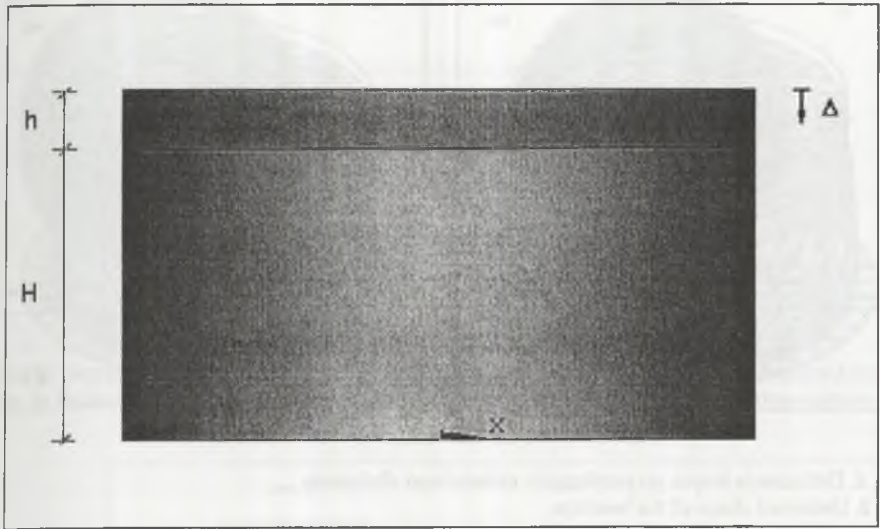
\mathbf{K}_{NL} , \mathbf{K}_S , \mathbf{K}_{nT} , \mathbf{K}_{CN} – dodatkowe macierze sztywności pochodzące odpowiednio od nieliniowości geometrycznej, naprężeń w chwili t , tarcia (macierz niesymetryczna) oraz naprężeń kontaktowych normalnych,

$\Delta\mathbf{F}^{\text{ext}}$ – wektor obciążeń zewnętrznych,

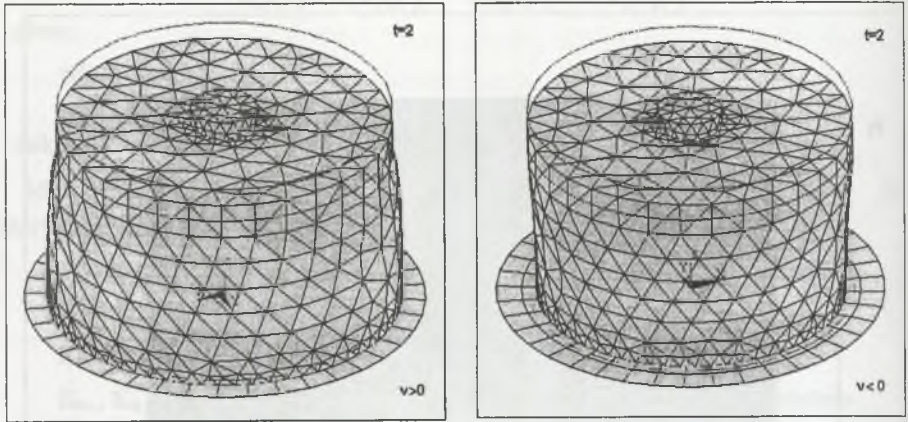
$\Delta\mathbf{F}_C$ – wektor wynikający ze zmian strefy kontaktu.

Jako przykład analizy dynamicznej rozważono gumowe łożysko. Przyjęty model łożyska walcowego (rys.1) składa się z trzech części: stalowej płytki z otworem na trzpień, części gumowej oraz stalowego rdzenia (trzpienia) prowadzącego o następujących wymiarach: $h = 0.02\text{m}$, $H = 0.1\text{m}$, $r = 0.02\text{m}$, $R = 0.1\text{m}$. Zarówno gumę, jak i stal opisano związkami konstytutywnymi Hooke'a, przyjmując dla stali: $E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.48$, $\rho = 7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, a dla gumy: $E = 1.7 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.48$ (-0.48), $\rho = 1.7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Tarcie między gumą a podłożem zamodelowano wzorem Coulomba (3), przyjmując $\mu = 0.5$, a tarcie między płytką a rdzeniem oraz gumą a rdzeniem pominięto.

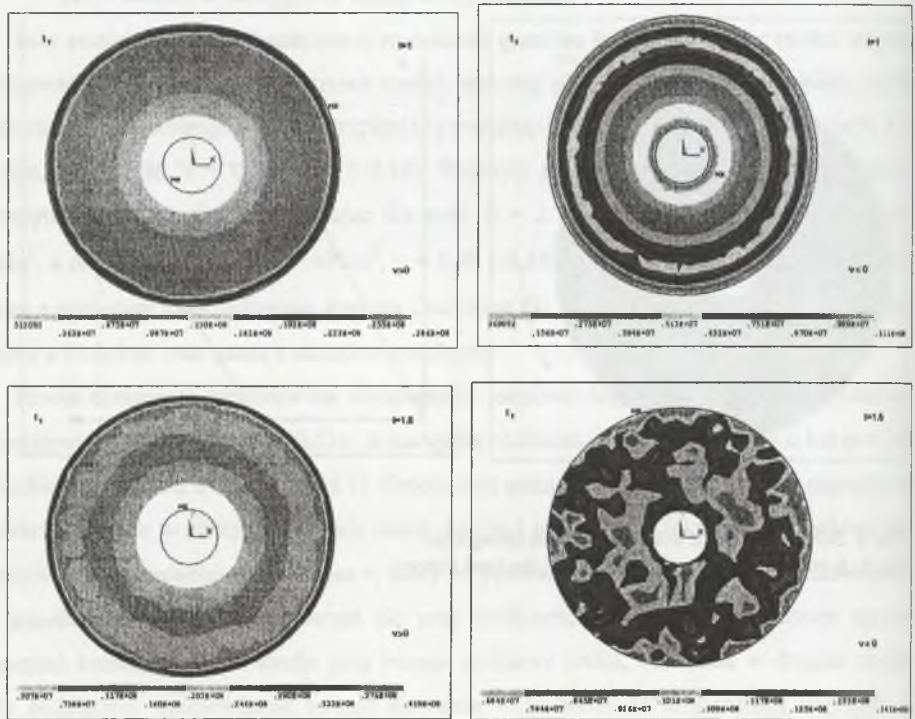
Proces obciążenia zrealizowano dwuetapowo: najpierw łożysko ściśnięto, przemieszczając stalową płytkę w dół o $\Delta = 0.01\text{m}$, a następnie obrócono ją wokół osi walca o kąt $\varphi = 30^\circ$ (przebieg obciążenia w czasie – rys.1). Deformację pokazano na rys.2, a rozkład naprężeń w strefach kontaktu w różnych chwilach czasu na rys.3 oraz rys.4. Ciekawym zjawiskiem jest zachowanie się materiału o ujemnym ν , który po pierwszym etapie obciążenia zachowuje się w sposób oczekiwany, tj. przewęża się przy ściskaniu, powodując tym samym spadek naprężeń kontaktowych w strefie przy brzegu podstawy walca, natomiast w drugim etapie, gdy dodatkowo wprowadzone zostaje skręcanie – dochodzi do koncentracji naprężeń w strefie, w której poprzednio były one niewielkie. Dla kontaktu pomiędzy gumą a rdzeniem (rys.4) w przypadku ujemnego ν można zaobserwować wzdłuż wysokości na przemian powstawanie szczeliny, przyleganie i ponowny brak kontaktu.



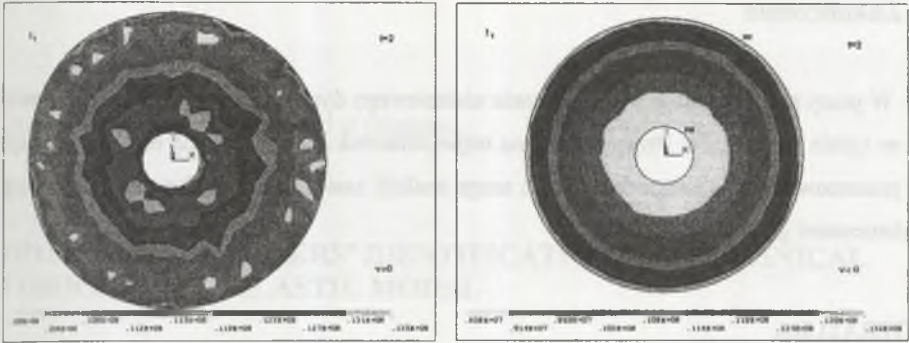
Rys. 1. Schemat łożyska wraz z procesem obciążenia
 Fig. 1. A scheme of the lead bearing and the load history



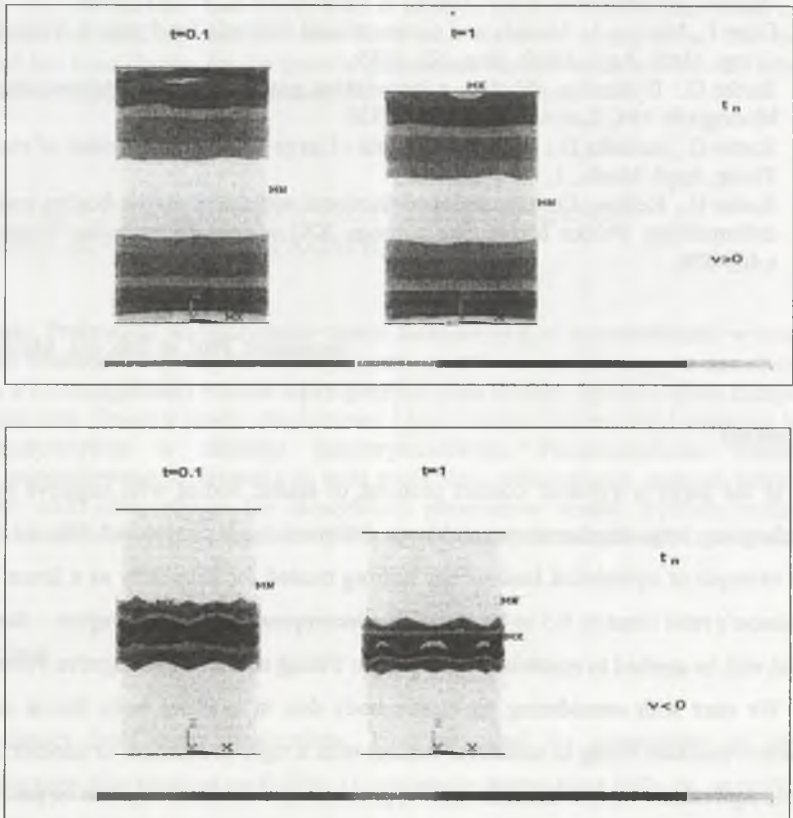
Rys. 2. Deformacja łożysk po przyłożeniu całkowitego obciążenia
 Fig. 2. Deformed shape of the bearings



Rys. 3a. Naprężenia kontaktowe styczne w strefie kontaktu guma - podłoże dla różnych chwil czasu
 Fig. 3a. Friction stress distribution in rubber – foundation contact zone for different time instants



Rys. 3b. Naprężenia kontaktowe styczne w strefie kontaktu guma - podłoże dla różnych chwil czasu
 Fig. 3b. Friction stress distribution in rubber – foundation contact zone for different time instants



Rys. 4. Rozkład naprężeń kontaktowych normalnych w strefie kontaktu gumy z trzpieniem
 Fig. 4. Normal stress distribution in rubber – lead contact zone for different time instants

5. Zakończenie

W pracy przedstawiono sformułowanie nieliniowego dynamicznego problemu brzegowego w opisie Lagrange'a. Przeprowadzona trójwymiarowa analiza zadania łożyska pokazuje, że prezentowany opis i metoda obliczeń mogą znaleźć zastosowanie w dynamice konstrukcji z elementami gumopodobnymi.

LITERATURA

1. van Campen D.H., Koppens W., Sauren A., Veldpaus F.: The dynamics of a deformable body experiencing large displacements. *Transaction of ASME*, 55, 1998, p. 676-680.
2. Klarbing A.: Large displacement frictional contact: a continuum framework for finite element discretization, *Eur. J. Mech., A – Solids*, 14,2,237-253, 1995.
3. Oden J., Martins J.: Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 52, 1985.
4. Szefer G.: Dynamika układów z materiałów gumopodobnych. Politechnika Krakowska, Monografia 194, Kraków 1995, s. 319-330.
5. Szefer G., Jasińska D.: Dynamic analysis of large deformation contact of elastic bodies, *J. Theor. Appl. Mech.*, 1, 40, p.235-257.
6. Szefer G., Kędzior D.: Dynamics of frictional contact of elastic bodies undergoing large deformations. *Polska Mechanika u progu XXI wieku*, Politechnika Warszawska, 2001, s.469-476.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Sławomir Kosiński

Abstract

In the paper a dynamic contact problem of elastic bodies with negative Poisson's ratio undergoing large displacements and large deformations is considered. We solve numerically an example of cylindrical lead rubber bearing treated for simplicity as a linear material with Poisson's ratio close to 0.5 to be near to the incompressibility. To compare – the same type of load will be applied to material with the same Young modulus but negative Poisson's number.

We start with considering an elastic body due to external body forces and prescribed surface tractions being in unilateral contact with a rigid foundation or another flexible body. Two equivalent ways to describe such a problem are: nonlinear system of partial differential equations with all suitable conditions or variational formulation – more convenient from numerical point of view. Finite element method (FEM) is used to solve presented examples, so the solution is approximated in terms of shape functions and nodal values.