ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2003
Seria: BUDOWNICTWO z. 101 Nr kol. 1595

Tomasz LISZKA *
Politechnika Śląska

ZASTOSOWANIA METODY PERTURBACJI DO OSZACOWANIA WARTOŚCI WŁASNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH O PARAMETRACH NIEPEWNYCH

Streszczenie. Metoda perturbacji pozwala na szybkie oszacowanie wartości własnych w układach poddanych zaburzeniom. Uogólniając tę metodę na liczby przedziałowe, można wykorzystać ją do oszacowania wszystkich wartości własnych przedziałowego zadania własnego $[\mathbf{A}]\mathbf{x}=\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}$, a także zadania własnego drugiego stopnia $\lambda^2[\mathbf{A}]\mathbf{x}+\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}+[\mathbf{C}]\mathbf{x}=\mathbf{0}$. W teorii konstrukcji tę metodę możemy wykorzystać do oszacowania częstości drgań własnych wielowymiarowych układów dynamicznych o parametrach niepewnych oraz częstości drgań swobodnych w układach z tłumieniem.

APPLICATION OF METHOD OF PERTURBATION TO EIGENVALUES ESTIMATION OF DYNAMIC SYSTEMS WITH UNCERTAIN PARAMETERS

Summary. Method of perturbation makes possible quick estimation of eigenvalues of systems under disturbances. Extension of this method over interval numbers gives possibility to estimate all eigenvalues of interval generalized eigenvalue problem $[\mathbf{A}]\mathbf{x}=\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}$ and second degree eigenvalue problem $\lambda^2[\mathbf{A}]\mathbf{x}+\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}+[\mathbf{C}]\mathbf{x}=\mathbf{0}$. In theory of structures this method can be used for eigenfrequency estimation of multidimensional dynamic systems with interval parameters and frequency of free vibration in systems with damping.

1. Wykorzystanie metody perturbacji do oszacowania wartości własnych macierzy przedziałowych

Jedną z rozpowszechnionych metod przybliżonego wyznaczania wartości własnych w teorii drgań są metody perturbacyjne. Mogą one być stosowane do przekształceń liniowych zarówno w przestrzeni rzeczywistej, jak i zespolonej. Jeżeli znamy wartości własne i wektory własne pewnego przekształcenia samosprzężonego $\mathbf{A}$, możemy poszukiwać przybliżonych wartości własnych przekształcenia $\mathbf{A}+\delta\mathbf{A}$, gdzie $\delta\mathbf{A}$ jest dowolnym przekształceniem

*Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Jerzy Skrzypczyk.

samosprzężonym. Wówczas poszukiwane wektory i wartości własne są funkcjami perturbacji δA. Można wykazać, że przy δA →0, wartości własne i wektory własne przekształcenia A+δA dążą do wartości własnych przekształcenia A.

W układach dynamicznych o parametrach niepewnych zadanie sprowadza się do obliczenia wartości własnych i wektorów własnych układu niezaburzonego, a następnie znalezienia „poprawek" do obliczonych wielkości spowodowanych niepewnościami parametrów opisujących rozpatrywany układ. Niepewności parametrów opisujących układ będą modelowane przy użyciu liczb przedziałowych. W pracy przedstawione zostaną sposoby wyznaczenia tych poprawek dla uogólnionych zagadnień własnych przy wykorzystaniu metody perturbacji [1].

1.1. Zastosowanie metody perturbacji do oszacowania spektrum wartości własnych uogólnionego przedziałowego zagadnienia własnego $[\mathbf{A}]\mathbf{x} = \lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}$

Metodę perturbacji można zastosować do przybliżonego wyznaczenia wartości własnych przedziałowego uogólnionego zagadnienia własnego $[\mathbf{A}]\mathbf{x}=\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}$. Wykorzystując własności liczb przedziałowych, macierze $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$ zapiszemy w postaci:

$$[\mathbf{A}] = \left(\hat{\mathbf{A}} + [\Delta\mathbf{A}]\right), \quad [\mathbf{B}] = \left(\hat{\mathbf{B}} + [\Delta\mathbf{B}]\right)$$

gdzie:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathrm{mid}([\mathbf{A}]), \quad [\Delta\mathbf{A}] = [-\mathrm{rad}([\mathbf{A}], \mathrm{rad}([\mathbf{A}])], \tag{1}$$
$$\hat{\mathbf{B}} = \mathrm{mid}([\mathbf{B}]), \quad [\Delta\mathbf{B}] = [-\mathrm{rad}([\mathbf{B}], \mathrm{rad}([\mathbf{B}])].$$

Oraz w dalszych obliczeniach wprowadzimy macierze perturbacji

$$[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon] = \frac{[\Delta\mathbf{A}]}{\varepsilon}, \quad [\mathbf{A}] = \hat{\mathbf{A}} + \varepsilon[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon], \tag{2}$$
$$[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon] = \frac{[\Delta\mathbf{B}]}{\varepsilon}, \quad [\mathbf{B}] = \hat{\mathbf{B}} + \varepsilon[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon].$$

Uogólnione równanie własne zgodnie z teorią perturbacji zapiszemy:

$$(\hat{\mathbf{A}} + \varepsilon[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon])[x_k](\varepsilon) = [\lambda_k](\varepsilon)(\hat{\mathbf{B}} + \varepsilon[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon])[x_k](\varepsilon). \tag{3}$$

Wówczas wartości własne są funkcjami argumentu ε, tzn. $\lambda_1(\varepsilon)$, $\lambda_1(\varepsilon)$, ..., $\lambda_n(\varepsilon)$, podobnie wektory własne $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$, ..., $x_n(\varepsilon)$. Można wykazać, że $\lambda_k(\varepsilon)$ i $x_k(\varepsilon)$ są funkcjami ciągłymi i różniczkowalnymi argumentu ε, przy czym $\lambda_k(0)= \lambda_k$, $x_k(0)= x_k$. Jeżeli odrzucimy składniki stopnia wyższego niż pierwszy ze względu na ε, funkcje te możemy zapisać:

$$\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_k + \varepsilon[\Delta\lambda_k] + \ldots \tag{4}$$
$$x_k(\varepsilon) = x_k + \varepsilon[\Delta x_k] + \ldots$$

Jeżeli do równania (3) podstawimy wielkości z równania (4), to otrzymamy

$$(\hat{\mathbf{A}}+\varepsilon[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon])(\hat{\mathbf{x}}_k+\varepsilon[\Delta\mathbf{x}_k]+\ldots)=(\hat{\lambda}_k+\varepsilon[\Delta\lambda_k]\ldots)(\hat{\mathbf{B}}+\varepsilon[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon])(\hat{\mathbf{x}}_k+\varepsilon[\Delta\mathbf{x}_k]+\ldots) \tag{5}$$

Dokonując przekształceń tego równania, otrzymamy następujące związki:

$$\begin{aligned}&\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}_k+\hat{\mathbf{A}}\varepsilon[\Delta\mathbf{x}_k]+\varepsilon[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon]\hat{\mathbf{x}}_k+\varepsilon^2[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon][\Delta\mathbf{x}_k]=\\&=\hat{\lambda}_k\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{x}}_k+\varepsilon\hat{\lambda}_k\hat{\mathbf{B}}[\Delta\mathbf{x}_k]+\hat{\lambda}_k\varepsilon[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon]\hat{\mathbf{x}}_k+\varepsilon^2\hat{\lambda}_k[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon][\Delta\mathbf{x}_k]+\varepsilon[\Delta\lambda_k]\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{x}}_k+\\&+\varepsilon^2[\Delta\lambda_k]\hat{\mathbf{B}}[\Delta\mathbf{x}_k]+\varepsilon^2[\Delta\lambda_k][\Delta\mathbf{B}_\varepsilon]\hat{\mathbf{x}}_k+\varepsilon^3[\Delta\lambda_k][\Delta\mathbf{B}_\varepsilon][\Delta\mathbf{x}_k]\end{aligned} \tag{6}$$

Po pominięciu wyrazów stopnia wyższego niż pierwszy ze względu na ε wyrażenie (6) upraszcza się i po pomnożeniu lewostronnie przez wektor $\hat{\mathbf{x}}_k^T$ mamy

$$\begin{aligned}&\hat{\mathbf{x}}_k^T\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}_k+\varepsilon\hat{\mathbf{x}}_k^T\hat{\mathbf{A}}[\Delta\mathbf{x}_k]+\varepsilon\hat{\mathbf{x}}_k^T[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon]\hat{\mathbf{x}}_k=\\&=\hat{\lambda}_k\hat{\mathbf{x}}_k^T\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{x}}_k+\varepsilon\hat{\lambda}_k\hat{\mathbf{x}}_k^T\hat{\mathbf{B}}[\Delta\mathbf{x}_k]+\varepsilon\hat{\lambda}_k\hat{\mathbf{x}}_k^T[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon]\hat{\mathbf{x}}_k+\varepsilon\hat{\mathbf{x}}_k^T[\Delta\lambda_k]\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{x}}_k\end{aligned} \tag{7}$$

Po przyrównaniu do siebie wyrażeń o tym samym stopniu ze względu na ε po obu stronach powyższego równania dochodzimy do związków

$$\begin{aligned}&\varepsilon^0:\quad \hat{\mathbf{x}}_k^T\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}_k=\hat{\lambda}_k\hat{\mathbf{x}}_k^T\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{x}}_k\\&\varepsilon^1:\quad \hat{\mathbf{x}}_k^T\hat{\mathbf{A}}[\Delta\mathbf{x}_k]+\hat{\mathbf{x}}_k^T[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon]\hat{\mathbf{x}}_k=\hat{\lambda}_k\hat{\mathbf{x}}_k^T\hat{\mathbf{B}}[\Delta\mathbf{x}_k]+\hat{\lambda}_k\hat{\mathbf{x}}_k^T[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon]\hat{\mathbf{x}}_k+\hat{\mathbf{x}}_k^T[\Delta\lambda_k]\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{x}}_k\end{aligned} \tag{8}$$

Przekształcając równania (8), możemy oszacować perturbacje wartości własnych, a dzięki temu oszacować wartości własne $\lambda([\mathbf{A}],[\mathbf{B}])$ przedziałowego uogólnionego zagadnienia własnego $[\mathbf{A}]\mathbf{x}=\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}$

$$\begin{aligned}&[\Delta\lambda_k]=\frac{\hat{\mathbf{x}}_k^T[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon]\hat{\mathbf{x}}_k-\hat{\lambda}_k\hat{\mathbf{x}}_k^T[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon]\hat{\mathbf{x}}_k}{\hat{\mathbf{x}}_k^T\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_k}\\&\lambda_k([\mathbf{A}],[\mathbf{B}])=\hat{\lambda}_k+\varepsilon[\Delta\lambda_k]=[\lambda_k^-,\lambda_k^+].\end{aligned} \tag{9}$$

1.2. Zastosowanie metody perturbacji do oszacowania spektrum wartości własnych uogólnionego przedziałowego zagadnienia własnego II stopnia $\lambda^2[\mathbf{A}]\mathbf{x}+\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}+[\mathbf{C}]\mathbf{x}=\mathbf{0}$

Podobnie jak w przypadku klasycznego zadania i uogólnionego problemu własnego również do oszacowania wartości własnych zagadnienia własnego drugiego stopnia $\lambda^2[\mathbf{A}]\mathbf{x}+\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}+[\mathbf{C}]\mathbf{x}=\mathbf{0}$ możemy wykorzystać metodę perturbacji. Postępując analogicznie jak w punkcie 1.1, przedziałowe macierze i wektory własne zapiszemy:

$$[\mathbf{A}] = \left(\hat{\mathbf{A}} + [\Delta\mathbf{A}]\right),\quad [\mathbf{B}] = \left(\hat{\mathbf{B}} + [\Delta\mathbf{B}]\right),\quad [\mathbf{C}] = \left(\hat{\mathbf{C}} + [\Delta\mathbf{C}]\right)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \mathrm{mid}([\mathbf{A}]),\quad [\Delta\mathbf{A}] = [-\mathrm{rad}([\mathbf{A}]), \mathrm{rad}([\mathbf{A}])],\\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathrm{mid}([\mathbf{B}]),\quad [\Delta\mathbf{B}] = [-\mathrm{rad}([\mathbf{B}]), \mathrm{rad}([\mathbf{B}])],\\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathrm{mid}([\mathbf{C}]),\quad [\Delta\mathbf{C}] = [-\mathrm{rad}([\mathbf{C}]), \mathrm{rad}([\mathbf{C}])]. \end{aligned} \tag{10}$$

Wprowadzając macierze perturbacji:

$$\begin{aligned} [\Delta\mathbf{A}_\varepsilon] &= \frac{[\Delta\mathbf{A}]}{\varepsilon},\quad [\mathbf{A}] = \hat{\mathbf{A}} + \varepsilon[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon],\\ [\Delta\mathbf{B}_\varepsilon] &= \frac{[\Delta\mathbf{B}]}{\varepsilon},\quad [\mathbf{B}] = \hat{\mathbf{B}} + \varepsilon[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon],\\ [\Delta\mathbf{C}_\varepsilon] &= \frac{[\Delta\mathbf{C}]}{\varepsilon},\quad [\mathbf{C}] = \hat{\mathbf{C}} + \varepsilon[\Delta\mathbf{C}_\varepsilon], \end{aligned} \tag{11}$$

uogólnione równanie własne drugiego stopnia zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} &(\hat{\lambda}_k + \varepsilon[\Delta\delta\lambda_k]\ldots)^2(\hat{\mathbf{A}} + \varepsilon[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon])(\hat{x}_k + \varepsilon[\Delta x_k] + \ldots) +\\ &+ (\hat{\lambda}_k + \varepsilon[\Delta\delta\lambda_k]\ldots)(\hat{\mathbf{B}} + \varepsilon[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon])(\hat{x}_k + \varepsilon[\Delta x_k] + \ldots) +\\ &+ (\hat{\mathbf{C}} + \varepsilon[\Delta\mathbf{C}_\varepsilon])(\hat{x}_k + \varepsilon[\Delta x_k] + \ldots) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Po przekształceniach otrzymujemy następujące równanie:

$$\begin{aligned} &(\hat{\lambda}_k^2\hat{\mathbf{A}} + \varepsilon\hat{\lambda}_k^2[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon] + 2\hat{\lambda}_k[\Delta\lambda_k]\hat{\mathbf{A}} + [\Delta x_k^{(1)}] + \varepsilon^2 2\hat{\lambda}_k[\Delta\lambda_k][\Delta\mathbf{A}_\varepsilon] + \hat{\lambda}_k\hat{\mathbf{B}} +\\ &+ \hat{\lambda}_k\varepsilon[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon] + \varepsilon[\Delta\lambda_k]\hat{\mathbf{B}} + \varepsilon^2[\Delta\lambda_k][\Delta\mathbf{B}_\varepsilon] + \hat{\mathbf{C}} + \varepsilon[\Delta\hat{\mathbf{C}}_\varepsilon])\hat{x}_k +\\ &+ (\varepsilon\hat{\lambda}_k^2\hat{\mathbf{A}} + \varepsilon^2\hat{\lambda}_k^2[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon] + \varepsilon^2 2\hat{\lambda}_k[\Delta\lambda_k]\hat{\mathbf{A}} + \varepsilon^3 2\hat{\lambda}_k[\Delta\lambda_k][\Delta\mathbf{A}_\varepsilon] + \varepsilon\hat{\lambda}_k\hat{\mathbf{B}} + \varepsilon^2\hat{\lambda}_k[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon] +\\ &+ \varepsilon^2[\Delta\lambda_k]\hat{\mathbf{B}} + \varepsilon^3[\Delta\lambda_k][\Delta\mathbf{B}_\varepsilon] + \varepsilon\hat{\mathbf{C}} + \varepsilon^2[\Delta\hat{\mathbf{C}}_\varepsilon])[\Delta x_k] = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Postępując analogicznie jak w poprzednich przypadkach, pomijamy wyrażenia, w których ε występuje w wyższej potędze niż pierwsza i porównujemy po obu stronach równania wyrażenia o tej samej potędze ze względu na ε. Po tych uproszczeniach mnożymy lewostronnie przez wektor $\hat{x}_k^T$ i powyższe równanie zapiszemy teraz w postaci:

$$\begin{aligned} &\hat{\lambda}_k^2\hat{x}_k^T\hat{\mathbf{A}}\hat{x}_k + \hat{\lambda}_k\hat{x}_k^T[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon]\hat{x}_k + [\Delta\lambda_k]\hat{x}_k^T\hat{\mathbf{B}}\hat{x}_k + \hat{x}_k^T[\Delta\mathbf{C}_\varepsilon]\hat{x}_k =\\ &= -2\hat{\lambda}_k[\Delta\lambda_k]\hat{x}_k^T\hat{\mathbf{A}}\hat{x}_k - [\Delta\lambda_k]\hat{x}_k^T\hat{\mathbf{B}}\hat{x}_k \end{aligned} \tag{14}$$

Przekształcając równanie (14), możemy oszacować perturbacje wartości własnych:

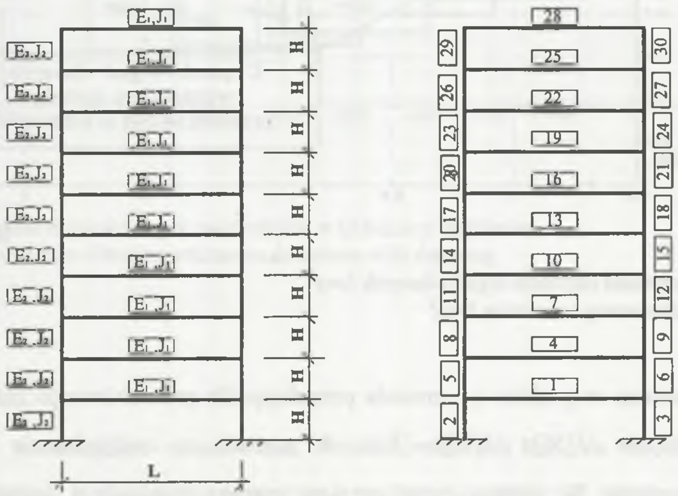
$$[\Delta\lambda_k] = \frac{-(\hat{\lambda}^2\hat{x}_k^T[\Delta\mathbf{A}_\varepsilon]\hat{x}_k + \hat{\lambda}_k\hat{x}_k^T[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon]\hat{x}_k + \hat{x}_k^T[\Delta\mathbf{C}_\varepsilon]\hat{x}_k)}{2\hat{\lambda}_k\hat{x}_k^T\hat{\mathbf{B}}\hat{x}_k + \hat{x}_k^T[\Delta\mathbf{B}_\varepsilon]\hat{x}_k} \tag{15}$$

To ostatecznie pozwala nam na oszacowanie wartości własnych $\lambda([\mathbf{A}],[\mathbf{B}],[\mathbf{C}])$ przedziałowego zagadnienia własnego:

$$\lambda_k([\mathbf{A}],[\mathbf{B}],[\mathbf{C}]) = \hat{\lambda}_k + \varepsilon[\Delta\lambda_k] = [\lambda_k^-, \lambda_k^+]. \tag{16}$$

2. Przykłady zastosowania metod perturbacyjnych do szacowania wartości własnych układów o parametrach niepewnych

Rozważamy układ prętowy przedstawiony na rysunku 1.



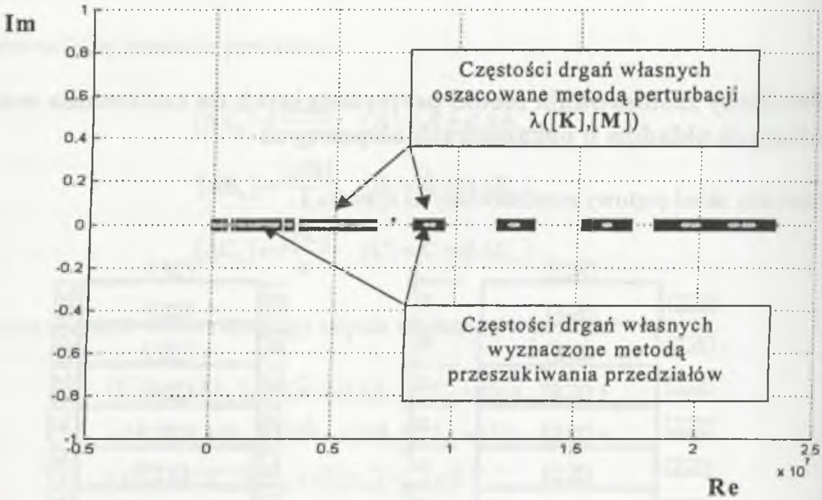
Rys.1. Schemat statyczny konstrukcji
Fig. 1. Scheme of static structure

Dla tej konstrukcji o parametrach niepewnych, wykorzystując metodę perturbacji, oszacujemy wartości własne uogólnionego przedziałowego zagadnienia własnego $[\mathbf{K}]\mathbf{x}=\lambda[\mathbf{M}]\mathbf{x}$.

W obliczeniach przyjęto następujące dane liczbowe: $E_1=2.05\cdot10^{11}$ [Pa], $E_2=2.05\cdot10^{11}$ [Pa], $J_1= 28300\cdot10^{-8}$ [m^4], J_2 $38389\cdot10^{-8}$ [m^4], $A_1=[105.73\cdot10^{-4}, 112.27\cdot10^{-4}]$ [m^2] $A_2=244.5\cdot10^{-4}$ [m^2], L=6 [m], H=3 [m], $\rho_1=[82.998, 88.132]$ [kg/m], $\rho_2=191.9$ [kg/m].

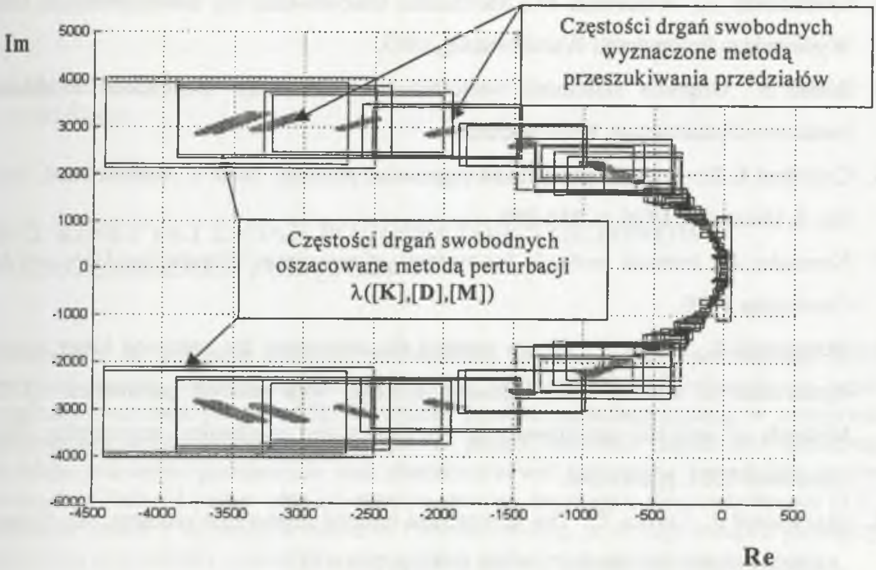
Wykorzystując metodę elementów skończonych i dokonując dyskretyzacji jak na rysunku 1, zbudowano przedziałowe macierze sztywności [**K**] i bezwładności [**M**].

Stosując wzory przedstawione w punkcie 1.1., oszacowano przedziały zawierające poszczególne wartości własne. Wyznaczone zbiory przedstawiono na rys. 2. Dla pokazania poprawności oszacowań naniesiono zbiory wartości własnych wyznaczone metodą przeszukiwania przedziałów. Przedstawione oszacowania zawierają wszystkie wygenerowane w ten sposób wartości własne.



Rys. 2. Oszacowanie częstości drgań własnych $\lambda=\omega^2$
Fig. 2. Eigenfrequency estimation $\lambda=\omega^2$

Przedstawiona w punkcie 1.2. metoda perturbacji dla przedziałowego zadania własnego drugiego stopnia $\lambda^2[\mathbf{M}]\mathbf{x}+\lambda[\mathbf{D}]\mathbf{x}+[\mathbf{K}]\mathbf{x}=\mathbf{0}$ pozwala na uwzględnienie w konstrukcji wpływu tłumienia. W analizie drgań przyjęto macierz tłumienia o postaci $\mathbf{D}=\mu\mathbf{M}+\kappa\mathbf{K}$. Współczynniki tłumienia κ, μ obliczono na podstawie bezwymiarowego współczynnika tłumienia γ, którego wartość dla konstrukcji stalowych przyjęto $\gamma=0.0175$. Ze względu na to, że proces tłumienia drgań dla konstrukcji budowlanych jest trudny do dokładnego określenia, przyjęto współczynniki tłumienia z 5% niepewnościami. W obliczeniach przyjęto przedziałowe wartości współczynników tłumienia $[\mu]=[0.164825,\ 0.182175]$ $[s^{-1}]$, $[\kappa]=[0.00030666,\ 0.00033894]$ [s]. Otrzymane oszacowania częstości drgań swobodnych konstrukcji o niepewnych parametrach z uwzględnieniem tłumienia wraz z wartościami własnymi wyznaczonymi metodą przeszukiwania interwałów przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Oszacowanie częstości drgań swobodnych w układzie z tłumieniem
Fig. 3. Frequency of free vibration estimation in system with damping

3. Wnioski

Porównując poszczególne oszacowania wartości własnych, nasuwa się wniosek, że zastosowanie metody perturbacji do oszacowania wartości własnych jest słuszne i daje dobre wyniki dla małych niepewności parametrów opisujących konstrukcje. Podejście to pozwala na oszacowanie już nie tylko zbioru, w którym zawarto wszystkie wartości własne, lecz na oszacowanie takiego zbioru dla każdej przedziałowej wartości własnej. Niewątpliwą zaletą tej metody poszukiwania wartości własnych macierzy przedziałowych jest mała złożoność obliczeniowa.

LITERATURA

1. Gelfand I.M.: Wykłady z algebry liniowej. PWN, Warszawa 1971.
2. Moore R.E.: Interval analysis. Engelwood Cliffs, New Jork 1985.
3. Chmielewski T., Zembaty Z.: Podstawy dynamiki budowli. Arkady, Warszawa 1998.

4. Gomuliński A., Witkowski M.: Mechanika budowli-kurs dla zawansowanych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1993.
5. Białas S.: Odporna stabilność wielomianów i macierzy. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, Kraków 2002.
6. Crawford C.R.: A stable generalized eigenvalue problem. Siam J. Number Anal., Vol. 13, No. 6, December 1976, p. 854-860.
7. Neumaier A.: Interval methods for systems of equations. Cambridge University Press, Cambridge 1990.
8. Skrzypczyk J., Liszka T.: A new method for computing the uper and lower bounds on eigenvalues of second order dynamic systems with interval parameters. AI-MECH Methods of artificial intelligence in mechanics and mechanical engineering, Gliwice, November 2001, p. 243-248.
9. Skrzypczyk J., Liszka T.: The generalized interval eigenvalue problem. XL Sympozjon „Modelowanie w mechanice", Wisła 2001, p. 235-238.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Stefan Jendo

Abstract

In this paper extension of method of perturbation over interval numbers is presented. New results give a possibility to estimate all eigenvalues of interval generalized eigenvalues problem $[\mathbf{A}]\mathbf{x}=\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}$ and second degree eigenvalue problem $\lambda^2[\mathbf{A}]\mathbf{x}+\lambda[\mathbf{B}]\mathbf{x}+[\mathbf{C}]\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Technical applications are illustrated by an example from the theory of structures and lead to estimations of eigenfrequencies of dynamic systems with interval parameters. Presented results give best approximations for systems with parameters of not large tolerances. The great advantage of that method is its low complexity of computer calculations.