

Izabela MAJOR*
Politechnika Częstochowska

ZJAWISKA FALOWE W CIENKIM PRĘCIE O ZMIENNYM PRZEKROJU

Streszczenie. W niniejszej pracy użyto analizy opartej na założeniu jednowymiarowego stanu naprężenia do wyznaczenia równania transportu dla padającej, odbitej i transmitowanej fali przyspieszenia. Przeprowadzono analizę numeryczną w sprężystym pręcie o wolno zmieniającym się przekroju poprzecznym. Wyniki przedstawiono dla nieliniowo sprężystego materiału Murnaghana.

EFFECTS WAVES PROPAGATION IN SLENDER RODS OF VARIABLE CROSS-SECTION

Summary. This paper employs an approximate form of analysis based on the assumption of one-dimensional stress to find the transport equation for the incident, reflected and refracted of the acceleration wave. The numerical analysis in elastic rod of slowly varying area of cross-section was made. Results are illustrated in Murnaghana's nonlinear elastic materials.

1. Wprowadzenie

W niniejszej pracy rozważa się propagację fal przyspieszenia w cienkich dwumateriałowych prętach o wolno zmieniającym się przekroju poprzecznym (patrz (rys.1)). Fala przyspieszenia została dokładnie zbadana i omówiona między innymi w pracach P.B. Baileya i P.J. Chena [1] i [2] oraz P.J. Chena [3] i [4].

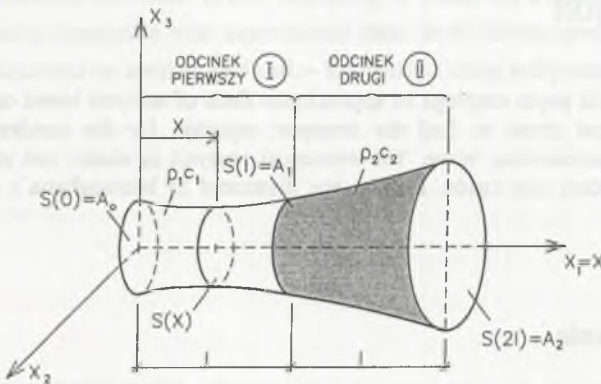
Podstawowe równania propagacji dla przypadku pręta o zmiennym przekroju podał A. Jeffrey w pracy [5]. Wykazał, że równanie transportu dla natężenia fali w przypadku propagacji fali przyspieszenia w pręcie z materiału hipersprężystego o zmiennym przekroju poprzecznym jest uogólnionym równaniem Riccatiego. Przyjmując do rozważań nieliniowo

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Sławomir Kosiński.

materiał Murnaghana w pracy I. Major [7] wykazano, że dla pręta o rosnącym przekroju poprzecznym natężenie fali przyspieszenia maleje, natomiast natężenie fali rośnie, w przypadku gdy przekrój pręta maleje. Ponadto z prac A. Jeffreya [5] oraz A. Jeffreya i R.P. Gilberta [6] wynika, że natężenie fali przyspieszenia opisuje równanie Bernoulliego dla ośrodka, w którym funkcja energii naprężenia $\Sigma(p)$ (tzw. potencjał sprężysty) spełnia warunek $\partial^3 \Sigma / \partial p^3 \neq 0$, gdzie (p) jest gradientem przemieszczenia.

2. Podstawowe zależności i oznaczenia

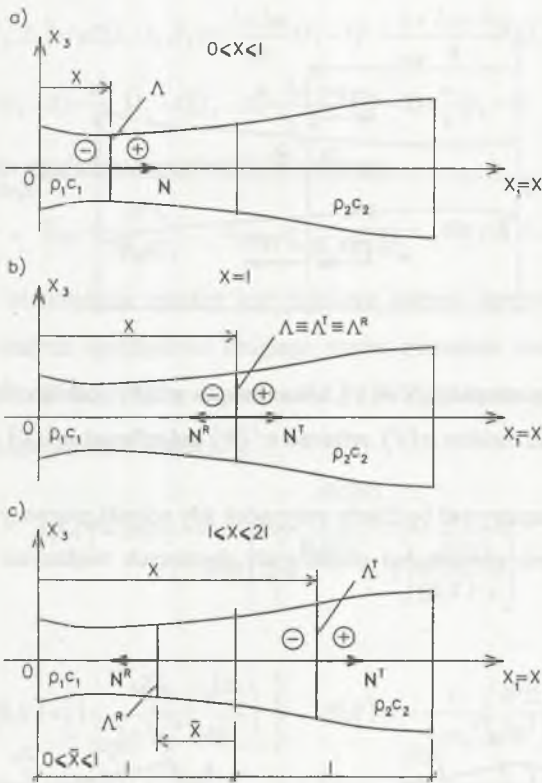
Rozważamy pręt sprężysty wykonany z dwóch jednorodnych i izotropowych odcinków o długości l (patrz (rys.1)). Przyjmujemy, że przekrój poprzeczny $S(X)$ jest osiowo symetryczny i zmienia się w funkcji odległości. Dla $X=0$ $S(X)=A_0$, w przypadku $X=l$ $S(X)=A_1$, natomiast dla $X=2l$ $S(X)=A_2$.



Rys. 1. Dwumateriałowy osiowo symetryczny pręt o wolno zmieniającym się przekroju poprzecznym
Fig. 1. Two-materials axis-symmetry rod of slowly varying cross-section area

Przez ρ_1 i ρ_2 oznaczymy gęstość ośrodka odpowiednio pierwszego i drugiego odcinka pręta, natomiast przez c_1 i c_2 prędkość propagacji fal podłużnych odpowiednio w pierwszym i w drugim odcinku osiowego pręta o zmiennym przekroju poprzecznym. Przyjmujemy ponadto, że $\sigma(X)$ oznacza natężenie propagującej się fali przyspieszenia w punkcie X pręta.

Natężenie z górnym indeksem R i T oznacza odpowiednio natężenie odbitej fali przyspieszenia - $\sigma^R(X)$ oraz transmitowanej fali przyspieszenia - $\sigma^T(X)$. W niniejszej pracy wszystkie wielkości z indeksami górnymi R i T odnosić się będą odpowiednio do odbitej i transmitowanej fali przyspieszenia.



Rys. 2. Kolejne położenia powierzchni nieciągłości Λ dla rozpatrywanego pręta
 Fig. 2. The following locations of slowness surface Λ for investigated rod

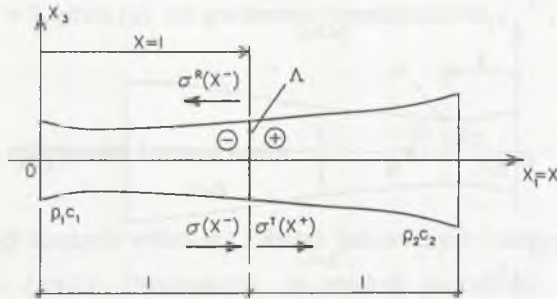
3. Natężenie fali przyspieszenia dla badanych przypadków pręta

Zgodnie z pracą P. J. Chena [4] możemy zapisać następujące warunki na powierzchni rozdziału warstw, tj. dla $X = l$ (patrz rys.3)).

$$\frac{\sigma^T(X^+)}{\sigma(X^-)} = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \tag{1}$$

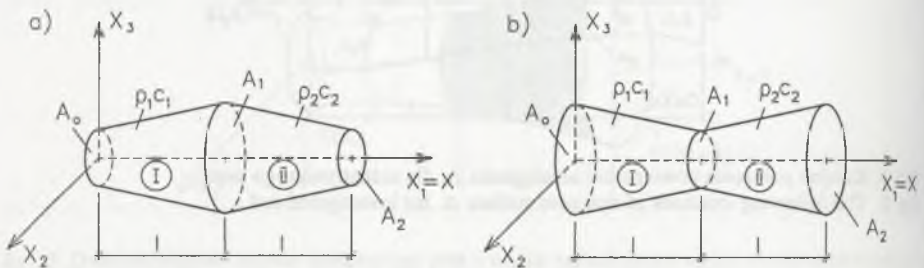
$$\frac{\sigma^R(X^-)}{\sigma(X^-)} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \quad (2)$$

X^+ oznacza współrzędną na powierzchni nieciągłości Λ przed frontem fali przyspieszenia, natomiast X^- jest współrzędną na tej samej powierzchni Λ za frontem fali przyspieszenia.



Rys. 3. Fala przyspieszenia: padająca $\sigma(X)$, transmitowana $\sigma^T(X)$ i odbita $\sigma^R(X)$ dla $X=l$
 Fig. 3. The acceleration: incident $\sigma(X)$, refracted $\sigma^T(X)$ and reflected $\sigma^R(X)$ wave for $X=l$

Jako pierwszy rozpatrywać będziemy przypadek gdy odcinki pierwszy (I) i drugi (II) pręta są w postaci ściętych powierzchni obrotowych związanych większymi podstawami (patrz (rys.4.a)).



Rys. 4. Rozpatrywane przypadki pręta: a) przypadek pierwszy; b) przypadek drugi
 Fig. 4. The investigated cases of the rod: a) first case, b) second case

Przypadek drugi obejmuje te same ścięte powierzchnie obrotowe związane ze sobą mniejszymi podstawami (rys.4.b).

4. Obliczenia

W niniejszej pracy przyjęto materiał sprężysty w sensie Greena, zwany materiałem hipersprężystym. Do analizy przyjęto dwa nieliniowe ściśle materiały sprężyste opisane potencjałem Murnaghana (porównaj Z. Wesołowski [10], s. 37):

$$W(I_1, I_2, I_3) = \rho \Sigma(I_1, I_2, I_3) = \frac{l+2m}{24} (I_1 - 3)^3 + \frac{\lambda + 2\mu + 4m}{8} (I_1 - 3)^2 + \frac{8\mu + n}{8} (I_1 - 3) - \frac{m}{4} (I_1 - 3)(I_2 - 3) - \frac{4\mu + n}{8} (I_2 - 3) + \frac{n}{8} (I_3 - 1) \quad (3)$$

dla którego pochodne względem niezmienników wynoszą:

$$\Sigma_{I_K} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_K}, \quad \Sigma_{KL} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_K \partial I_L}, \quad \Sigma_{KLM} = \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial I_K \partial I_L \partial I_M} \quad \text{dla } K, L, M = 1, 2, 3 \quad (4)$$

Materiał sprężysty Murnaghana opisany jest pięcioma stałymi sprężystości (m, n, l, λ, μ). Trzy pierwsze są stałymi sprężystości drugiego rzędu, pozostałe dwie stałymi Lamego. Przyjmując, że przekrój poprzeczny wynosi $S(X) = Ae^{-\gamma X}$, natężenie fali przyspieszenia $\sigma(X)$ będzie równe (porównaj I. Major [7]):

$$\sigma_1(X) = \sigma(0) \frac{e^{-\frac{Q(X)X\gamma}{2}}}{1 - \sigma(0) \left[2 \left(e^{-\frac{Q(X)X\gamma}{2}} - 1 \right) \frac{\beta(X)}{Q(X) \cdot \gamma} \right]} \quad (5)$$

gdzie:

$$Q(X) = \left[1 - \frac{T_0}{2\rho^2 c_0^4} \left(\frac{\partial^3 \Sigma}{\partial p^3} \right)_0 \right], \quad \beta(X) = -\frac{1}{4\rho c_0^4} \left(\frac{\partial^3 \Sigma}{\partial p^3} \right)_0 \quad (6)$$

natomiast zakładając, że $S(X) = Ae^{-\gamma X}$ (patrz I. Major [7]), natężenie fali przyspieszenia $\sigma(X)$ będzie równe:

$$\sigma_2(X) = \sigma(0) \frac{e^{-\frac{Q(X)X\gamma}{2}}}{1 + \sigma(0) \left[2 \left(e^{-\frac{Q(X)X\gamma}{2}} - 1 \right) \frac{\beta(X)}{Q(X) \cdot \gamma} \right]} \quad (7)$$

W powyższych wzorach c_0 jest prędkością propagacji frontu fali przyspieszenia, natomiast p jest gradientem przemieszczenia.

5. Analiza numeryczna

Podstawą do przeprowadzenia analizy numerycznej są równania (1) i (2). Przyjęto stałe materiałowe, zgodnie z pracą S. Kosińskiego, [9].

Wartości dla stali odpowiednio wynoszą:

$$m = -6,36 \cdot 10^6 [kG/cm^2], \quad n = -7,08 \cdot 10^6 [kG/cm^2], \quad l = -4,61 \cdot 10^6 [kG/cm^2],$$

$$\lambda = 1,11 \cdot 10^6 [kG/cm^2], \quad \mu = 0,821 \cdot 10^6 [kG/cm^2],$$

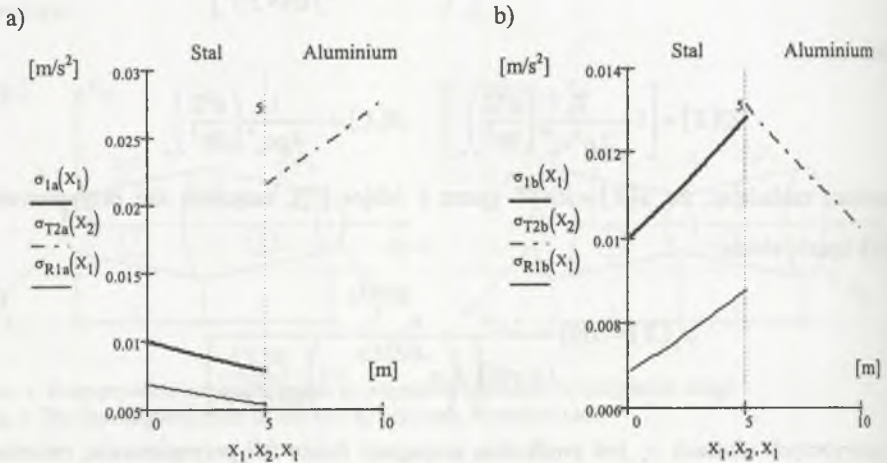
natomiast dla aluminium przyjmujemy:

$$m = -4,01 \cdot 10^6 [kG/cm^2], \quad n = -4,08 \cdot 10^6 [kG/cm^2], \quad l = -3,11 \cdot 10^6 [kG/cm^2],$$

$$\lambda = 0,57 \cdot 10^6 [kG/cm^2], \quad \mu = 0,276 \cdot 10^6 [kG/cm^2].$$

Zakładamy na początku, że materiał jest nieodkształcony, czyli $T_0 = 0$, oraz przyjmujemy, zgodnie z pracą J. Klepaczek [8], że $\sigma(0) = 10^{-2} [m/s^2]$. Ponadto, funkcja użyta do opisu zmiany przekroju poprzecznego pręta wymaga przyjęcia współczynnika γ , który w obliczeniach dla wolnej zmiany przekroju przyjmujemy jako równy $\gamma = 0,5 [1/m]$.

Zakładając, że odcinek pierwszy wykonany jest ze stali, natomiast drugi z aluminium, to otrzymujemy zależności przedstawione poniżej:



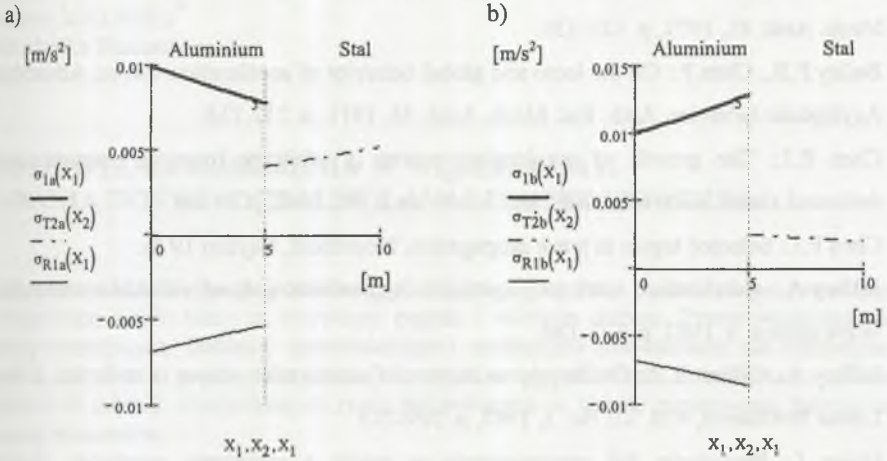
Rys. 5. Wykresy natężenia fali przyspieszenia: a) dla $S(X) = Ae^{rX}$, b) dla $S(X) = Ae^{-rX}$.

Przyjmujemy, że: $\{X \in \langle 0m; 10m \rangle, X_1 \in \langle 0m; 5m \rangle, X_2 \in \langle 5m; 10m \rangle\}$

Fig. 5. The diagrams of the acceleration wave intensity: a) for $S(X) = Ae^{rX}$, b) for $S(X) = Ae^{-rX}$.

We assume that: $\{X \in \langle 0m; 10m \rangle, X_1 \in \langle 0m; 5m \rangle, X_2 \in \langle 5m; 10m \rangle\}$

Przyjmując odwrotnie, tzn. że odcinek pierwszy wykonany jest z aluminium, a odcinek drugi ze stali, otrzymujemy następujące zależności:



Rys. 6. Wykresy natężenia fali przyspieszenia: a) dla $S(X) = Ae^{rX}$, b) dla $S(X) = Ae^{-rX}$.

Przyjmujemy, że: $\{X \in \langle 0m; 10m \rangle, X_1 \in \langle 0m; 5m \rangle, X_2 \in \langle 5m; 10m \rangle\}$

Fig. 6. The diagrams of the acceleration wave intensity: a) for $S(X) = Ae^{rX}$, b) for $S(X) = Ae^{-rX}$.

We assume that: $\{X \in \langle 0m; 10m \rangle, X_1 \in \langle 0m; 5m \rangle, X_2 \in \langle 5m; 10m \rangle\}$

6. Wnioski

Przeprowadzona analiza numeryczna wykazała, że wraz ze zmianą przekroju poprzecznego rozpatrywanego pręta zmienia się natężenie padającej, odbitej i transmitowanej fali przyspieszenia. Dla pręta o rosnącym na odcinku pierwszym przekroju poprzecznym (por. rys.4a) natężenie fali przyspieszenia maleje (patrz rys.5a i rys.6a). Natomiast w przypadku gdy przekrój poprzeczny pręta na tym odcinku maleje (por. rys.4b), natężenie padającej i odbitej fali przyspieszenia rośnie (patrz rys. 5b i rys.6b). Podobna zależność ma miejsce dla transmitowanej fali przyspieszenia. Malejący przekrój poprzeczny na drugim odcinku (por. rys.4a) powoduje wzrost natężenia fali transmitowanej (patrz rys.5a i rys.6a), natomiast przekrój rosnący (por. rys.4b) jej spadek (patrz rys.5b i rys.6b).

Istotny jest również fakt, iż natężenie fali transmitowanej jest większe niż fali padającej przy przejściu ze stali do aluminium. Dla odwrotnej budowy pręta, tzn. przy przejściu z aluminium do stali, mniejsze jest natężenie transmitowanej fali przyspieszenia.

LITERATURA

1. Bailey P.B., Chen P.: On the local and global behavior of acceleration waves. Arch. Rat. Mech. Anal. 41, 1971, p. 121-131.
2. Bailey P.B., Chen P.: On the local and global behavior of acceleration waves: Addendum, Asymptotic behavior, Arch. Rat. Mech. Anal. 44, 1971, p. 212-216.
3. Chen P.J.: The growth of acceleration waves in arbitrary from in homogeneously deformed elastic materials. Arch. Rat. Mech. Anal. 30, 1968, p. 81-89.
4. Chen P.J.: Selected topics in wave propagation. Noordhoff, Layden 1976.
5. Jeffrey A.: Acceleration wave propagation in hyperelastic rods of variable cross-section. Wave motion 4, 1982, p. 173-180.
6. Jeffrey A., Gilbert R.P.: On the approximation of acceleration waves in rods, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 22, No. 3, 1987, p. 209-215.
7. Major I.: Propagacja fali przyspieszenia w pręcie o zmiennym przekroju. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Nr 1559, 2002, p. 379-386.
8. Klepaczko J.: Doświadczalne badania sprężysto-plastycznych procesów falowych w metalach. IPPT PAN, Warszawa 1970.
9. Kosiński S.: Odbicie i ewolucja fali uderzeniowej w wybranych materiałach hipersprężystych. IPPT PAN, Warszawa 1995.
10. Wesołowski Z.: Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości, PWN, Warszawa 1974.

Recenzent: Prof dr hab. inż. Józef Nizol

Abstract

The problem discussed in this paper run on propagation of disturbances in the rod of slowly varying cross-section area. This paper employs an approximate form of analysis based on the assumption of one-dimensional stress to find the transport equation for the intensity of the incident, reflected and refracted acceleration wave. The numerical analysis of the problem of propagation of the acceleration wave in elastic rod of slowly varying area was made. Results are illustrated for Murnaghana's nonlinear elastic materials.