ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: ELEKTRYKA z. 138 Nr kol. 1245

Aleksander ŻYWIEC, Andrzej BOBOŃ, Jerzy KUDŁA

RÓWNANIA STANU ELEKTRODYNAMICZNEGO I ANALIZA MODALNA WIELOMASZYNOWEGO SYSTEMU ELEKTROENERGETYCZNEGO

Streszczenie. Przedstawiono model matematyczny wielomaszynowego systemu elektroenergetycznego, uwzględniający zastępczą sieć przesyłową oraz maszyny synchroniczne z ich układem wzbudzenia, wyposażonym w regulator napięcia i ewentualnie stabilizator systemowy. Przedstawiono w postaci modalnej ogólne rozwiązanie równań stanu systemu oraz rozwiązania szczególne dla pracy systemu elektroenergetycznego w stanie swobodnym , przy wymuszeniu impulsowym i przy wymuszeniu skokowym.

EQUATIONS OF ELECTRODYNAMIC STATE AND MODAL ANALYSIS OF MULTIMACHINE POWER SYSTEM

Summary. The paper presents a mathematical model of a multimachine power system, taking into account transmission lines and synchronous machines with their excitation systems equipped with a voltage regulator and a power system stabilizer. The modal form of the general solution of the power system equations as well as the solutions for a free state, with the Dirac impulse extortion and with the step function extortion are introduced.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МНОГОМАШИННОЙ ЭНЕРГОСИСТЕМЫ

Резюме. Приведена математическая модель энергосистемы, которая учитывает электроэнергетическую сеть передачи и синхронные машины с их системой возбуждения содержающей регулятор напряжения и возможно системный стабилизатор. Предложено общее решение уравнений состояния системы а также решения для работы энергосистемы в свободном состоянии, в режиме импульсного возмущения и в режиме скачкообразного возмущения.

1. UWAGI WSTĘPNE

Współczesne systemy elektroenergetyczne są złożone z dużej liczby elektrowni, które są połączone wzjemnie ze sobą oraz z różnymi odbiorcami energii elektrycznej za pomocą układu linii przesyłowych i urządzeń rozdzielczych. W systemie takim nieustannie występują rozmaite zakłócenia eksploatacyjne i awaryjne pracy ustalonej różnych elementów składowych systemu. Jest to powodem nieustalonej pracy całego systemu i przyczyną występowania składowych zaburzeniowych w przebiegach czasowych wielkości elektromechanicznych, charakteryzujących pracę systemu elektroenergetycznego. Składowe zaburzeniowe niekorzystnie wpływają na pracę systemu i dlatego wskazane jest ich ograniczanie, między innymi przez dobór odpowiednich układów regulacji zespołów wytwórczych zainstalowanych w poszczególnych elektrowniach, przez odpowiednią rozbudowę linii przesyłowych lub przez zainstalowanie dodatkowych "elementów tłumiących" w określonych punktach systemu elektroenergetycznego.

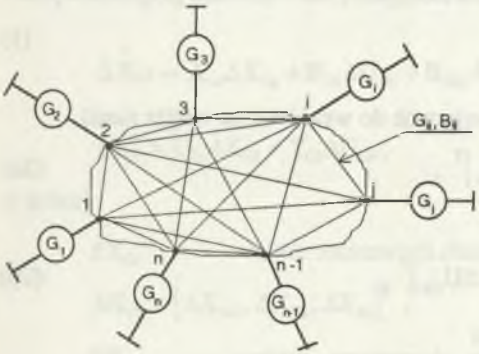
W badaniach stanów nieustalonych systemu elektroenergetycznego podstawowe znaczenie mają metody analityczne, wykorzystujące model matematyczny systemu, uwzględniający - z wymaganą dokładnością - strukturę układu oraz właściwości poszczególnych elementów składowych systemu. Rozwiązanie zestawu równań, składających się na model matematyczny systemu, umożliwia - przy narzuconych zakłóceniach - wyznaczenie przebiegów czasowych zmiennych stanu, jednoznacznie charakteryzujących pracę systemu elektroenergetycznego. Z kolei, badanie rozwiązań opisujących przebiegi nieustalone zmiennych stanu przy różnych zakłóceniach, umożliwia wyciągnięcie wniosków wskazujących, jak można wpływać na pracę systemu przez dobór struktury systemu i parametrów jego elementów składowych.

W niniejszej pracy przedstawiono zlinearyzowany model matematyczny wielomaszynowego systemu elektroenergetycznego. W modelu tym uwzględniono równania zastępczej sieci przesyłowej i równania maszyn synchronicznych z układem wzbudzenia zawierającym odpowiedni regulator napięcia i stabilizator systemowy. Przedstawiono w dziedzinie modalnej ogólne rozwiązanie równań stanu systemu oraz rozwiązania szczególne dla pracy systemu elektroenergetycznego w stanie swobodnym, przy wymuszeniu impulsowym i przy wymuszeniu skokowym. Ponadto przedyskutowano możliwości kształtowania charakteru przebiegów nieustalonych w systemie elektroenergetycznym.

2. MODEL MATEMATYCZNY SYSTEMU ELEKTROENERGETYCZNEGO

Do rozważań przyjęto system elektroenergetyczny zredukowany do węzłów generatorowych, połączonych ze sobą za pośrednictwem zastępczej sieci przesyłowej, pozbawionej węłów odbiorczych [2]. Każdy węzeł generatorowy połączony jest z zespołem wytwórczym, którym jest konkretna maszyna synchroniczna lub maszyna zastępcza, reprezentująca grupę maszyn synchronicznych. Przyjmuje się, że wszystkie zespoły wytwórcze są wyposażone w układ wzbudzenia z regulatorem napięcia i stabilizatorem systemowym (rys.1). Na rys. 1 przyjęto następujące oznaczenia:

- 1, 2,..., i, j,...,n -węzły generatorowe,
- G_1, G_2,...,G_i, G_j,...,G_n - zespoły wytwórcze z układem wzbudzenia,
- G_{Gij}, B_{Gij} - konduktancja i susceptancja gałęzi sieci łączącej węzły i-j,
- (i = 1, 2,...,n; j = 1, 2,...,n).



Rys. 1. System elektroenergetyczny wielomaszynowy

Fig. 1. A multimachine electric power system

Przy formułowaniu zlinearyzowanych (wokół określonego punktu pracy) równań stanu systemu pominięto napięcia transformacji w równaniach zastępczej sieci przesyłowej. Model matematyczny systemu elektroenergetycznego otrzymuje się przez połączenie równaniami więzów odpowiednio:

- równań algebraicznych zastępczej sieci przesyłowej systemu zredukowanego,
- równań algebraiczno-różniczkowych poszczególnych zespołów wytwórczych systemu zredukowanego, czyli równań maszyn synchronicznych (rzeczywistych bądź zastępczych) wraz z ich układem wzbudzenia zawierającym regulator napięcia i stabilizator systemowy.

Równania powyższe zapisuje się we wspólnym (sieciowym) układzie odniesienia współrzędnych prostokątnych D, Q.

2.1. Równania zastępczej sieci przesyłowej

Równania zastępczej sieci przesyłowej systemu zredukowanego (rys. 1) stanowią układ równań algebraicznych, wiążących ze sobą prądy i napięcia w węzłach generatorowych [2]. Przyjmując wspólny-sieciowy układ odniesienia współrzędnych prostokątnych D - Q otrzymuje się, na podstawie metody potencjałów węzłowych, następującą postać macierzową równań sieci zastępczej dla wielkości przyrostowych:

$$\Delta I_S = Y_S \Delta U_S \ , \tag{1}$$

w której

ΔI_S - wektor prądów węzłowych (dopływających do węzłów z zewnątrz sieci)

$$\Delta I_S = \left[\Delta I_{G1}, \Delta I_{G2}, \ldots\ldots \Delta I_{Gi}, \ldots\ldots \Delta I_{Gn}\right]^T , \tag{2a}$$

ΔU_S - wektor napięć węzłowych sieci

$$\Delta U_S = \left[\Delta U_{G1}, \Delta U_{G2}, \ldots\ldots \Delta U_{Gi}, \ldots\ldots \Delta U_{Gn}\right]^T , \tag{2b}$$

Y_S - macierz admitancji węzłowych sieci

$$Y_S = \begin{bmatrix} Y_{G1,1} & Y_{G1,2} \cdots & Y_{G1,i} \cdots & Y_{G1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{Gi,1} & Y_{Gi,2} & Y_{Gi,i} & Y_{Gi,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{Gn,1} & Y_{Gn,2} & Y_{Gn,i} & Y_{Gn,n} \end{bmatrix} . \tag{2c}$$

Elementy ΔI_{Gi}, ΔU_{Gi} wektorów prądów i napięć węzłowych sieci (2a, b) są wektorami, których elementami są odpowiednio składowe osiowe prądu (ΔI_{Di}, ΔI_{Qi}) bądź napięcia (ΔU_{Di}, ΔU_{Qi}) twornika i-tego zespołu wytwórczego

$$\Delta I_{Gi} = \left[\Delta I_{Di}, \Delta I_{Qi}\right]^T \quad \text{oraz} \quad \Delta U_{Gi} = \left[\Delta U_{Di}, \Delta U_{Qi}\right]^T . \tag{3a,b}$$

Elementami macierzy admitancji węzłowych sieci Y_{Gij} są macierze kwadratowe wyrażone za pomocą konduktancji G_{Gij} oraz susceptancji B_{Gij} gałęzi sieci łączącej węzły generatorowe i - j (rys. 1)

$$Y_{Gij} = \begin{bmatrix} G_{Gij} & -B_{Gij} \\ B_{Gij} & G_{Gij} \end{bmatrix} . \tag{4}$$

2.2. Równania i-tego zespołu wytwórczego

Zespół wytwórczy zawiera maszynę synchroniczną (rzeczywistą lub zastępczą) wraz z układem wzbudzenia z regulatorem napięcia i stabilizatorem systemowym. Traktując jako wymuszenia napięcie rzeczywiste, napięcie zadane twornika oraz moment mechaniczny turbiny równania stanu i-tego zespołu wytwórczego (i=1, 2,.....n) można zapisać w następującej postaci:

$$\Delta \dot{X}_{Gi} = A_{Gi}\Delta X_{Gi} + B_{Gi}\Delta U_{Gi} + B_{GZi}\Delta U_{GZi} + B_{GMi}\Delta M_{GMi} \ , \tag{5a}$$

$$\Delta I_{Gi} = C_{Gi}\Delta X_{Gi} + Y_{Gi}\Delta U_{Gi} \ , \tag{5b}$$

w której:

ΔX_{Gi} - wektor zmiennych stanu i-tego zespołu wytwórczego

$$\Delta X_{Gi} = \left[\Delta X_{Mi}, \Delta X_{Ri}, \Delta X_{Si}\right]^T \ , \tag{6}$$

ΔX_{Mi} - wektor zmiennych stanu i - tej maszyny synchronicznej,

ΔX_{Ri} - wektor zmiennych stanu układu wzbudzenia i regulatora napięcia i-tej maszyny synchronicznej,

ΔX_{Si} - wektor zmiennych stanu stabilizatora systemowego i-tej maszyny synchronicznej,

ΔU_{Gi}, ΔU_{GZi}, ΔM_{GMi}- wektory sterowań i-tego zespołu wytwórczego, którymi są wektor napięć twornika, napięcie zadane regulatora napięcia i moment mechaniczny,

A_{Gi}, B_{Gi}, B_{GZi}, B_{GMi} - macierz stanu oraz macierze sterowań i-tego zespołu wytwórczego,

C_{Gi}, Y_{Gi}, - macierz wyjścia oraz macierz transmisyjna i - tego zespołu wytwórczego,

ΔI_{Gi} - wektor wyjścia i-tego zespołu wytwórczego, równy wektorowi prądów twornika maszyny.

Postać poszczególnych macierzy, występujących w równaniach stanu i-tego zespołu wytwórczego, zależy od rzędu przyjętego modelu maszyny synchronicznej oraz od przyjętego rozwiązania układu wzbudzenia, tzn. od struktury jego obwodu siłowego, regulatora napięcia i stabilizatora systemowego [3], [5].

2.3. Równania stanu systemu elektroenergetycznego

Rozpatrywany system elektroenergetyczny (rys. 1) zawiera n-zespołów wytwórczych, zatem można przyjąć, że składowymi wektora stanu, wektorów sterowań i wektora wyjścia systemu są odpowiednio wektory stanu, sterowań i wyjścia poszczególnych zespołów wytwórczych. Stąd wynika następująca ogólna postać równań opisujących stan dynamiczny systemu:

$$\Delta \dot{X}_G = A_G \Delta X_G + B_G \Delta U_G + B_{GZ} \Delta U_{GZ} + B_{GM} \Delta M_{GM} , \tag{7a}$$

$$\Delta I_G = C_G \Delta X_G + Y_G \Delta U_G , \tag{7b}$$

w której poszczególne wektory i macierze wynikają z następujących zależności

$$\Delta X_G = \left[\Delta X_{G1}, \Delta X_{G2}, \ldots, \Delta X_{Gi}, \ldots \Delta X_{Gn}\right]^T , \tag{8a}$$

$$\Delta U_G = \left[\Delta U_{G1}, \Delta U_{G2}, \ldots, \Delta U_{Gi}, \ldots \Delta U_{Gn}\right]^T , \tag{8b}$$

$$\Delta U_{GZ} = \left[\Delta U_{GZ1}, \Delta U_{GZ2}, \ldots, \Delta U_{GZi}, \ldots \Delta U_{GZn}\right]^T , \tag{8c}$$

$$\Delta I_G = \left[\Delta I_{G1}, \Delta I_{G2}, \ldots, \Delta I_{Gi}, \ldots \Delta I_{Gn}\right]^T , \tag{8d}$$

$$\Delta M_{GM} = \left[\Delta M_{GM1}, \Delta M_{GM2}, \ldots, \Delta M_{GMi}, \ldots \Delta M_{GMn}\right]^T , \tag{8e}$$

$$A_G = \mathrm{diag}\left\{A_{G1}, A_{G2}, \ldots, A_{Gi}, \ldots A_{Gn}\right\} , \tag{8f}$$

$$B_G = \mathrm{diag}\left\{B_{G1}, B_{G2}, \ldots, B_{Gi}, \ldots B_{Gn}\right\} , \tag{8g}$$

$$B_{GZ} = \mathrm{diag}\left\{B_{GZ1}, B_{GZ2}, \ldots, B_{GZi}, \ldots B_{GZn}\right\} , \tag{8h}$$

$$B_{GM} = \mathrm{diag}\left\{B_{GM1}, B_{GM2}, \ldots, B_{GMi}, \ldots B_{GMn}\right\} , \tag{8i}$$

$$C_G = \mathrm{diag}\left\{C_{G1}, C_{G2}, \ldots, C_{Gi}, \ldots C_{Gn}\right\} , \tag{8j}$$

$$Y_G = \mathrm{diag}\left\{Y_{G1}, Y_{G2}, \ldots, Y_{Gi}, \ldots Y_{Gn}\right\} . \tag{8k}$$

W rozpatrywanym systemie elektroenergetycznym zespoły wytwórcze są ze sobą powiązane poprzez sieć przesyłową, a zatem równania więzów można zapisać w postaci:

$$\Delta U_G = \Delta U_S \quad \text{oraz} \quad \Delta I_G = \Delta I_S . \tag{9a,b}$$

Stąd po uwzględnieniu równań (1) i (7b) wynika następująca zależność:

$$\Delta U_G = \left(Y_S - Y_G\right)^{-1} C_G \, \Delta X_G . \tag{10}$$

Wprowadzając równość (10) do równań (7a,b) otrzymuje się następującą postać ogólną równań stanu systemu elektroenergetycznego (rys.1):

$$\Delta \dot{X} = A\,\Delta X + B\,\Delta U\,, \tag{11a}$$

$$\Delta Y = C\,\Delta X\,, \tag{11b}$$

w której:

ΔX, ΔY - wektor stanu i wektor wyjścia systemu elektroenergetycznego

$$\Delta X = \Delta X_G = \left[\Delta X_1, \Delta X_2, \ldots, \Delta X_i, \ldots \Delta X_m\right]^T\,, \tag{12a}$$

$$\Delta Y = \Delta Y_G = \left[\Delta Y_1, \Delta Y_2, \ldots, \Delta Y_j, \ldots \Delta Y_q\right]^T\,, \tag{12b}$$

ΔU - wektor sterowań (wymuszeń) systemu elektroenergetycznego

$$\Delta U = \left[\Delta U_{GZ}, \Delta M_{GM}\right]^T = \left[\Delta U_1, \Delta U_2, \ldots, \Delta U_k, \ldots \Delta U_p\right]^T\,, \tag{12c}$$

A - macierz stanu systemu elektroenergetycznego

$$A = A_G + B_G\left(Y_S - Y_G\right)^{-1} C_G = \left[A_{ir}\right]\Big|_{m\times m}\,, \tag{12d}$$

B - macierz sterowań (wymuszeń) systemu elektroenergetycznego

$$B = \left[B_{GZ}, B_{GM}\right] = \left[B_{ik}\right]\Big|_{m\times p}, \tag{12e}$$

C - macierz wyjść systemu elektroenergetycznego

$$C = C_G + Y_G\left(Y_S - Y_G\right)^{-1} C_G = \left[C_{ji}\right]\Big|_{q\times m}\,. \tag{12f}$$

3. POSTAĆ KANONICZNA JORDANA RÓWNAŃ STANU SYSTEMU ELEKTROENERGETYCZNEGO

Przy przekształcaniu równań (11a,b) stanu systemu elektroenergetycznego do postaci kanonicznej Jordana wykorzystuje się wartości własne oraz tzw. macierz modalną, która jest utworzona z wektorów własnych macierzy stanu A [1], [4].

Wartości własne λ_h macierzy stanu A (o wymiarze m×m) są równe pierwiastkom równania charakterystycznego tej macierzy

$$\det\left[A - \lambda 1\right] = 0\,. \tag{13}$$

Równanie to, w którym λ jest niewiadomą, jest równaniem m-tego stopnia, z którego po rozwiązaniu otrzymuje się wartości własne λ_1, λ_2,.....λ_h.....λ_m macierzy stanu. Każdej wartości własnej λ_h (h = 1, 2, ..., m) można przyporządkować wektor własny prawostronny bądź lewostronny.

W przypadku pojedynczych wartości własnych wektory te spełniają następujące równania:

– wektor własny prawostronny V_h

$$A\,V_h = \lambda_h\,V_h\,, \tag{14a}$$

– wektor własny lewostronny W_h

$$W_h^T A = W_h^T \lambda_h\,, \tag{14b}$$

z których po rozwiązaniu wyznacza się m-wymiarowe wektory własne

$$V_h = \left[V_{1h}, V_{2h}, \ldots, V_{ih}, \ldots V_{mh}\right]^T\,, \tag{15a}$$

$$W_h = \left[W_{1h}, W_{2h}, \ldots, W_{ih}, \ldots W_{mh}\right]^T\,. \tag{15b}$$

Równania (14a,b) można zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$A\,V = V\,\Lambda \quad \text{oraz} \quad W^T A = \Lambda\,W^T, \tag{16a,b}$$

w której:

V, W - macierze modalne prawostronne i lewostronne, których kolumnami są odpowiednio prawostronne i lewostronne wektory własne

$$V = \left[V_1, V_2, \ldots, V_h, \ldots V_m\right] = \left[V_{ih}\right]_{m\times m}\,, \tag{17a}$$

$$W = \left[W_1, W_2, \ldots, W_h, \ldots W_m\right] = \left[W_{ih}\right]_{m\times m}\,, \tag{17b}$$

Λ - macierz diagonalna wartości własnych

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_h\}\,. \tag{18}$$

Można udowodnić, że w przypadku normalizacji wektorów własnych ($W_h^T\,V_h = 1$) zachodzi następująca równość:

$$V^{-1} = W^T. \tag{19}$$

W przypadku wielokrotnych wartości własnych macierzy stanu A w równaniach (14a,b) i (18) zamiast λ_h występuje macierz Λ_h (nazywana "blokiem Jordana") o wymiarze $m_h \times m_h$, przy czym m_h jest krotnością h-tej wartości własnej [1].

Traktując, że znane są wektory własne, można z zależności (16a,b) wyznaczyć macierz stanu

$$A = V\,\Lambda\,V^{-1}.$$

Po wprowadzeniu tej zależności do równania (11a) otrzymuje się po przekształceniu

$$V^{-1}\,\Delta\dot{X} = \Lambda V^{-1}\Delta X + V^{-1}B\,\Delta U. \tag{20}$$

Definiując nowy wektor stanu ΔZ oraz nową macierz sterowań (wymuszeń) zgodnie z następującymi zależnościami:

$$\Delta Z = V^{-1}\Delta X = \left[\Delta Z_1, \Delta Z_2, \ldots, \Delta Z_h, \ldots \Delta Z_m\right]^T, \tag{21a}$$

$$\Gamma = V^{-1}B = W^T B, \tag{21b}$$

można równania (20), (21a) i (11b) zapisać w postaci:

$$\Delta\dot{Z} = \Lambda\,\Delta Z + \Gamma\,\Delta U, \tag{22a}$$

$$\Delta X = V\Delta Z, \tag{22b}$$

$$\Delta Y = CV\Delta Z\,. \tag{22c}$$

Równania (22 a,b,c) są postacią kanoniczną Jordana równań stanu systemu elektroenergetycznego, zaś wektor ΔZ jest modalnym wektorem stanu systemu elektroenergetycznego.

4. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ STANU SYSTEMU ELEKTROENERGETYCZNEGO

Rozwiązanie równań stanu systemu elektroenergetycznego umożliwia wyznaczenie przebiegów nieustalonych poszczególnych składowych wektora stanu i wektora wyjścia, charakteryzujących pracę systemu przy różnych zakłóceniach. Odpowiednie zależności wynikają z rozwiązania równań (22a,b,c) traktując, że w równaniach tych zadany jest konkretny przebieg czasowy wektora sterowań (wymuszeń).

4.1. Rozwiązanie ogólne równań stanu

Przyjmując w ogólnym przypadku, że zadany jest przebieg czasowy wektora sterowań (wymuszeń)

$$\Delta U = \Delta U(t) = \left[\Delta U_1(t), \Delta U_2(t), \ldots, \Delta U_k(t), \ldots \Delta U_p(t)\right]^T \tag{23a}$$

oraz że wektor stanu ΔX spełnia następujący warunek początkowy dla chwili $t = t_0$ rozpoczęcia stanu nieustalonego:

$$\Delta X(t = t_0) = \Delta X_0 = \left[\Delta X_{10}, \Delta X_{20}, \ldots, \Delta X_{i0}, \ldots \Delta X_{m0}\right]^T \tag{23b}$$

otrzymuje się rozwiązanie ogólne niejednorodnego układu równań (22a) w postaci:

$$\Delta Z = \Delta Z(t) = e^{A(t-t_0)}\Delta Z_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\Gamma\Delta U(\tau)d\tau, \tag{24a}$$

w której

ΔZ_0 - wartość początkowa modalnego wektora stanu w chwili $t = t_0$, wynikająca z zależności (22b) i (23b)

$$\Delta Z_0 = \Delta Z(t = t_0) = V^{-1}\Delta X(t = t_0). \tag{24b}$$

Zgodnie z zależnością (18) macierz **A** jest macierzą diagonalną, a zatem

$$e^{A(t-t_0)} = \mathrm{diag}\left\{e^{\lambda_h(t-t_0)}\right\} \quad \text{oraz} \quad e^{A(t-\tau)} = \mathrm{diag}\left\{e^{\lambda_h(t-\tau)}\right\}.$$

Wstawiając powyższe zależności do równania (24a) otrzymuje się następującą postać równań określających przebieg czasowy wektora modalnego:

$$\Delta Z(t) = \left[\Delta Z_1(t), \Delta Z_2(t), ..., \Delta Z_h(t), ...\Delta Z_m(t)\right]^T, \tag{25a}$$

przy czym h-ta współrzędna wektora modalnego wynosi:

$$\Delta Z_h(t) = e^{\lambda_h(t-t_0)}\sum_{i=1}^{m} W_{ih}\Delta X_{i0} + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_h(t-\tau)}\sum_{i=1}^{m} W_{ih}\sum_{k=1}^{p} B_{ik}\Delta U_k(\tau)d\tau. \tag{25b}$$

Można teraz na podstawie równań (22b,c) wyznaczyć przebieg czasowy wektora stanu $\Delta X(t)$ oraz wektora wyjścia $\Delta Y(t)$ przy czym po przekształceniach otrzymuje się:

$$\Delta X = \Delta X(t) = V\Delta Z(t) = \left[\Delta X_1(t), \Delta X_2(t), ..., \Delta X_i(t), ...\Delta X_m(t)\right]^T, \tag{26a}$$

$$\Delta Y = \Delta Y(t) = CV\Delta Z(t) = \left[\Delta Y_1(t), \Delta Y_2(t), ..., \Delta Y_j(t), ...\Delta Y_q(t)\right]^T, \tag{26b}$$

gdzie odpowiednie współrzędne tych wektorów są określone następującymi zależnościami:

$$\Delta X_i(t) = \sum_{h=1}^{m} V_{ih}\Delta Z_h(t) \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, ...m, \tag{26c}$$

$$\Delta Y_j(t) = \sum_{i=1}^{m} C_{ji}\Delta X_i(t) \qquad \text{dla} \quad j = 1, 2, ...q. \tag{26d}$$

Otrzymane zależności (25a),.....(26d), będąc rozwiazaniem ogólnym równań stanu (22a,b,c) systemu elektroenergetycznego można wykorzystać do wyznaczenia przebiegów nieustalonych w szczególnych stanach pracy, np w stanie swobodnym, przy wymuszeniu impulsowym, przy wymuszeniu skokowym itp.

4.2. Rozwiązanie równań dla pracy systemu w stanie swobodnym

System elektroenergetyczny pracuje w stanie swobodnym (system jest autonomiczny), jeśli nie działają na niego wymuszenia zewnętrzne, czyli gdy

$$\Delta U(t) = 0 \text{ lub } \Delta U_k(t) = 0 \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, p. \tag{27 a,b}$$

W tych warunkach, na podstawie zależności (25a).....(26d), otrzymuje się dla systemu autonomicznego następujące równania określające przebiegi nieustalone:

– współrzędnej h-tej wektora modalnego (h = 1, 2,....., m)

$$\Delta Z_{h0}(t) = \left(\Delta Z_h(t)\right)_{\Delta U_k(t)=0} = e^{\lambda_h(t-t_0)} \sum_{i=1}^{m} W_{ih} \Delta X_{i0}\,, \tag{28a}$$

– współrzędnej i-tej wektora stanu (i = 1, 2,....., m)

$$\Delta X_{i0}(t) = \left(\Delta X_i(t)\right)_{\Delta U_k(t)=0} = \sum_{h=1}^{m} V_{ih} \Delta Z_{h0}(t)\,, \tag{28b}$$

– współrzędnej j-tej wektora wyjścia (j = 1, 2,....., q)

$$\Delta Y_{j0}(t) = \left(\Delta Y_j(t)\right)_{\Delta U_k(t)=0} = \sum_{i=1}^{m} C_{ji} \Delta X_{i0}(t)\,. \tag{28c}$$

W zależnościach powyższych wprowadzono dodatkowy indeks 0 dla podkreślenia, że obowiązują one dla pracy systemu w stanie swobodnym.

4.3. Rozwiązanie równań dla pracy systemu przy wymuszeniu impulsowym

System elektroenergetyczny pracuje przy wymuszeniu impulsowym, jeśli warunki początkowe są zerowe, zaś składowe wektora sterowań (wymuszeń) mają postać funkcji impulsowej Diraca, czyli gdy

$$\Delta X_{i0} = 0 \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots m, \tag{29a}$$

$$\Delta U_k(t) = \Delta U_k\, \delta(t - t_0) \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots p. \tag{29b}$$

Wówczas, na podstawie zależności (25a)....(26d), otrzymuje się po przekształceniach następujące równania określające przebiegi nieustalone przy wymuszeniu impulsowym:

– współrzędnej h-tej wektora modalnego (h = 1, 2, ...m)

$$\Delta Z_{h\delta}(t) = \left(\Delta Z_h(t)\right)_{\substack{\Delta X_{i0}=0 \\ \Delta U_k(t)=\Delta U_k\delta(t-t_0)}} = \left(e^{\lambda_h(t-t_0)}\right)\sum_{i=1}^{m} W_{ih}\sum_{k=1}^{p} B_{ik}\Delta U_k \,, \tag{30a}$$

– współrzędnej i-tej wektora stanu (i = 1, 2, ...m)

$$\Delta X_{i\delta}(t) = \left(\Delta X_i(t)\right)_{\substack{\Delta X_{i0}=0 \\ \Delta U_k(t)=\Delta U_k\delta(t-t_0)}} = \sum_{h=1}^{m} V_{ih}\Delta Z_{h\delta}(t) \,, \tag{30b}$$

– współrzędnej j-tej wektora wyjścia (j = 1, 2, ...q)

$$\Delta Y_{j\delta}(t) = \left(\Delta Y_j(t)\right)_{\substack{\Delta X_{i0}=0 \\ \Delta U_k(t)=\Delta U_k\delta(t-t_0)}} = \sum_{i=1}^{m} C_{ji}\Delta X_{i\delta}(t) \,. \tag{30c}$$

W powyższych zależnościach wprowadzono dodatkowy indeks "δ" dla podkreślenia, że obowiązują one dla pracy systemu przy wymuszeniu impulsowym.

4.4. Rozwiązanie równań dla pracy systemu przy wymuszeniu skokowym

System elektroenergetyczny pracuje przy wymuszeniu skokowym, jeśli warunki początkowe są zerowe, zaś składowe wektora sterowań (wymuszeń) mają postać funkcji skokowej Heaviside'a, czyli gdy:

$$\Delta X_{i0} = 0 \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, ...m, \tag{31a}$$

$$\Delta U_k(t) = \Delta U_k\, 1(t - t_0) \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, ...p. \tag{31b}$$

Wówczas, na podstawie zależności (25a)....(26b), otrzymuje się po przekształceniach następujące równania określające przebiegi nieustalone przy wymuszeniu skokowym:

– współrzędnej h-tej wektora modalnego (h = 1, 2, ...m)

$$\Delta Z_{h1}(t) = \left(\Delta Z_h(t)\right)_{\substack{\Delta X_{i0}=0 \\ \Delta U_k(t)=\Delta U_k 1(t-t_0)}} = \frac{1}{\lambda_h}\left(e^{\lambda_h(t-t_0)}\right)\sum_{i=1}^{m} W_{ih}\sum_{k=1}^{p} B_{ik}\Delta U_k \,, \tag{32a}$$

– współrzędnej i-tej wektora stanu (i = 1, 2, ...m)

$$\Delta X_{i1}(t) = \left(\Delta X_i(t)\right)_{\substack{\Delta X_{i0}=0 \\ \Delta U_k(t)=\Delta U_k 1(t-t_0)}} = \sum_{h=1}^{m} V_{ih}\Delta Z_{h1}(t) \,, \tag{32b}$$

– współrzędnej j-tej wektora wyjścia (j = 1, 2, ...q)

$$\Delta Y_{j1}(t) = \left(\Delta Y_j(t)\right)_{\substack{\Delta X_{i0}=0 \\ \Delta U_k(t)=\Delta U_k 1(t-t_0)}} = \sum_{i=1}^{m} C_{ji}\Delta X_{i1}(t) \ . \tag{32c}$$

W powyższych zależnościach wprowadzono dodatkowy indeks "1" dla podkreślenia, że obowiązują one dla pracy systemu przy wymuszeniu skokowym.

5. ANALIZA PRZEBIEGÓW NIEUSTALONYCH W SYSTEMIE ELEKTROENERGETYCZNYM

Z przedstawionych w punkcie 4 rozwiązań równań stanu systemu elektroenergetycznego wynika, że przebiegi nieustalone dowolnej współrzędnej wektora stanu i wektora wyjścia są kombinacją liniową funkcji wykładniczych typu $e^{\lambda_h(t-t_0)}$, przy czym (h = 1, 2, ...m). Widać zatem, że o charakterze tych przebiegów nieustalonych decydują wartości własne λ_h macierzy stanu systemu, z których - jak to wynika z równania (13) - niektóre są liczbami rzeczywistymi a inne są liczbami zespolonymi parami sprzężonymi.

Z równań w punkcie 4 wynika, że rzeczywistym wartościom własnym odpowiadają w przebiegach nieustalonych składowe wykładnicze zanikające (jeśli $\lambda_h < 0$) bądź składowe stałe (jeśli $\lambda_h = 0$), bądź też składowe wykładnicze narastające (jeśli $\lambda_h > 0$).

Zespolonym i sprzężonym wartościom własnym odpowiadają w przebiegach nieustalonych składowe oscylacyjne. Jeśli bowiem rozpatruje się parę zespolonych i sprzężonych wartości własnych

$$\lambda_h = \underline{\lambda}_h = \alpha_h + j\omega_h \quad \text{i} \quad \lambda_{h+1} = \underline{\lambda}_h^* = \alpha_h - j\omega_h \ ,$$

to również odpowiadające im wektory własne są zespolone i parami sprzężone

$$V_h = \underline{V}_h \quad \text{i} \quad V_{h+1} = \underline{V}_h^* \quad \text{oraz} \quad W_h = \underline{W}_h \quad \text{i} \quad W_{h+1} = \underline{W}_h^* \ ,$$

a także zespolone i parami sprzężone są współrzędne wektora modalnego (25 a,b)

$$Z_h(t) = \underline{Z}_h(t) \quad \text{i} \quad Z_{h+1}(t) = \underline{Z}_h^*(t).$$

Kombinacja liniowa takich dwóch modów , która występuje w równaniach (26c), (28b), (30b), (32b), określających i-tą współrzędną wektora stanu

$$\Delta X_i^{\lambda_h}(t) = V_{ih}\Delta Z_h(t) + V_{i(h+1)}\Delta Z_{(h+1)}(t)$$

jest liczbą rzeczywistą i przyjmuje następującą postać:

– dla pracy systemu w stanie swobodnym

$$\Delta X_{i0}^{\underline{\lambda}_h}(t) = 2\left|\underline{V}_{ih}\sum_{j=1}^{m}\underline{W}_{jh}\Delta X_{j0}\right| e^{\alpha_h(t-t_0)}\cos\left[\omega_h(t-t_0)+\gamma_{0h}\right], \tag{33a}$$

gdzie

$$\gamma_{0h} = \arg\left\{\underline{V}_{ih}\sum_{j=1}^{m}\underline{W}_{jh}\Delta X_{j0}\right\}, \tag{33b}$$

– dla pracy systemu przy wymuszeniu impulsowym

$$\Delta X_{i\delta}^{\underline{\lambda}_h}(t) = 2\left|\underline{V}_{ih}\sum_{j=1}^{m}\underline{W}_{jh}\sum_{k=1}^{p}B_{jk}\Delta U_k\right| e^{\alpha_h(t-t_0)}\cos\left[\omega_h(t-t_0)+\gamma_{\delta h}\right], \tag{34a}$$

gdzie

$$\gamma_{\delta h} = \arg\left\{\underline{V}_{ih}\sum_{j=1}^{m}\underline{W}_{jh}\sum_{k=1}^{p}B_{jk}\Delta U_k\right\}, \tag{34b}$$

– dla pracy systemu przy wymuszeniu skokowym

$$\Delta X_{i1}^{\underline{\lambda}_h}(t) = 2\left|\frac{\underline{V}_{ih}}{\underline{\lambda}_h}\sum_{j=1}^{m}\underline{W}_{jh}\sum_{k=1}^{p}B_{jk}\Delta U_k\right| e^{\alpha_h(t-t_0)}\cos\left[\omega_h(t-t_0)+\gamma_{1h}\right]+$$
$$+2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\underline{V}_{ih}}{\underline{\lambda}_h}\sum_{j=1}^{m}\underline{W}_{jh}\sum_{k=1}^{p}B_{jk}\Delta U_k\right\}, \tag{35a}$$

gdzie $$\gamma_{1h} = \arg\left\{\frac{\underline{V}_{ih}}{\underline{\lambda}_h}\sum_{j=1}^{m}\underline{W}_{jh}\sum_{k=1}^{p}B_{jk}\Delta U_k\right\}. \tag{35b}$$

Podobnie wyznacza się składniki odpowiadające parze zespolonych i sprzężonych wartości własnych w j-tej współrzędnej wektora wyjścia .

Z równań (33a)...(35b) wynika, że każdej parze zespolonych i sprzężonych wartości własnych $\underline{\lambda}_h = \alpha_h \pm j\omega_h$ odpowiadają składowe sinusoidalnie przemienne, ujawniające się w przebiegach nieustalonych współrzędnych wektora stanu i wektora wyjścia systemu, przy czym:

– częstotliwość tych przebiegów jest określona przez część urojoną ω_h wartości własnej $\underline{\lambda}_h$,
– amplituda tych przebiegów zmienia się według krzywej wykładniczej $e^{\alpha_h(t-t_0)}$, czyli część rzeczywista α_h wartości własnej $\underline{\lambda}_h$ określa tłumienie tych przebiegów.

6. UWAGI KOŃCOWE

Z przedstawionych rozwiązań równań stanu systemu elektroenergetycznego wynikają następujące wnioski:

- nieustalone przebiegi współrzędnej j-tej wektora wyjścia $Y_j(t)$ są kombinacją liniową współrzędnych $i = 1, 2, ..., m$ wektora stanu $X(t)$, w której współczynnikami są elementy C_{ji} macierzy odpowiedzi C systemu,
- przebieg nieustalony i-tej współrzędnej wektora stanu $X_i(t)$ jest liniową kombinacją współrzędnych $h = 1, 2, ..., m$ wektora modalnego $Z(t)$, w której współczynnikami są współrzędne V_{ih} prawostronnych wektorów własnych V_h macierzy stanu A systemu,
- przebieg nieustalony h-tej współrzędnej wektora modalnego $Z_h(t)$ jest sumą liniowej kombinacji współrzędnych początkowych (w chwili t_0) wektora stanu i liniowej kombinacji współrzędnych wektora wymuszeń, w których to kombinacjach współczynnikami są współrzędne W_{ih} lewostronnego wektora własnego W_h macierzy stanu A systemu,
- wartości własne λ_h macierzy stanu decydują o charakterze przebiegów czasowych h-tego modu, a więc również o charakterze przebiegów czasowych współrzędnych wektora stanu i wektora wyjścia. W przypadku zespolonych wartości własnych $\underline{\lambda}_h = \alpha_h \pm j\omega_h$ w przebiegach nieustalonych występują składowe sinusoidalnie przemienne, przy czym część urojona ω_h określa ich częstotliwość, zaś część rzeczywista α_h określa ich tłumienie.

Widać zatem, że o charakterze przebiegów nieustalonych poszczególnych wielkości elektrodynamicznych systemu elektroenergetycznego decydują wartości własne λ_h i odpowiadające im wektory własne prawostronne V_h i lewostronne W_h macierzy stanu A systemu. Przedstawione rozwiązania umożliwiają wyciągnięcie wniosków wskazujących, jak można wpływać na przebiegi nieustalone przez odpowiedni dobór elementów macierzy A, czyli przez odpowiedni dobór struktury systemu i parametrów układów wzbudzenia poszczególnych węzłów wytwórczych.

LITERATURA

[1] Kaczorek T.: Teoria sterowania i systemów. PWN, Warszawa 1993.
[2] Machowski J., Bernas S.: Stany nieustalone i stabilność systemu elektroenergetycznego. WNT, Warszawa 1989.

[3] Paszek W.: Stany nieustalone maszyn elektrycznych prądu przemiennego, WNT, Warszawa 1986.
[4] Pełczewski W., Krynke M.: Metoda zmiennych stanu w analizie dynamiki układów napędowych. WNT, Warszawa 1984.
[5] Praca zbiorowa: Metody doboru lokalizacji oraz nastawień stabilizatorów systemowych. Opracowania nr 1, 2, 4/50/RE-4/92. Politechnika Śląska, Instytut Maszyn i Urządzeń Elektrycznych, Politechnika Śląska, Gliwice 1992 (praca nie publikowana).

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ernest Mendrela

Wpłynęło do Redakcji dnia 25 marca 1994

Abstract

The analytical methods based on a mathematical system model have the basic importance for the transient states analysis in power systems. The solutions analysis of the state equations which constitute the mathematical model for different disturbances enable us to draw conclusions on how to effect the power system performances through its structure and components selection.

A multimachine power system consisting of "n" generating nodes connected with each other through equivalent power transmission line and deprived of power consuming nodes (Fig.1) is assumed for consideration. During the formulation of linearized (around a fixed working point) power system state equations, the transformation voltages in synchronous machine equations and in power transmission line equations have been omitted. The state equations have been written using joint-network rectangular coordinate system D-Q.

The formula (1) forms a matrix equation describing the equivalent power transmission line obtained through node voltage method. The elements of the network node-admittance matrix Y_S are determined by formula (4) through the conductance and susceptance of the network branches joining the generating nodes (Fig. 1). The state equations of the i-th generating set are described by relations (5 a,b). The form of the respective matrices incorporated into the above mentioned relations depends on the accepted synchronous machine model and on the found excitation equation sets solution [3], [5]. The state equations of a power system have been put forward in chapter 2.3, allowing to obtain the outcome relations (11 a,b). The latter equations have been transformed into canonical form (22 a,b,c) using eigenvalues λ_h eigenvectors V_h i W_h, modal matrix Γ and diagonal eigenvalue matrix Λ.

The solution of the state equations of a power system are presented in chapter 4. The modal form is used for the presentation of the general solution (26 a,b,c,d) and a particular solution for unloaded system (27 a,b,c) for the impulse input function (29 a,b,c) and for the step input function (31 a,b,c).

In chapter 5 the transients occurring in power system work have been characterized. The conclusions following from the analyzed multimachine power system have been gathered in chapter 5 of this paper.