ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: ELEKTRYKA z. 138 Nr kol 1245

Dariusz SPAŁEK

RÓWNOWAŻNOŚĆ OBWODOWEJ I POLOWEJ DEFINICJI INDUKCYJNOŚCI WZAJEMNEJ

Streszczenie. W artykule przedstawiono uzasadnienie równoważności obwodowej i polowej definicji współczynnika indukcyjności wzajemnej na przykładzie uzwojeń maszyny elektrycznej. Pokazano również symetrię współczynników indukcyjności wzajemnej bez powoływania się na zasadę wzajemności i własności funkcji stanu.

EQUIVALENCE OF CIRCUIT AND FIELD DEFINITIONS OF MUTUAL INDUCTANCE COEFFICIENT

Summary. In this paper a proof of the equivalence of both the circuit (lumped parameter) and field definitions of mutual inductance coefficients for windings of electrical machine has been presented. The symmetry of mutual inductance coefficients regardless of the mutual theorem and state function peculiarities has been proved.

DIE ÄQUIVALENZ DER KREIS- UND FELDDEFINITIONEN DER GEGENINDUKTIVITÄT

Zusammenfassung. In diesem Artikel wurde die Äquivalenz der Kreis (konzentrierte Konstante) und Feld Gegeninduktivitätsdefinitionen für Wicklungen der elektrischer Maschine gezeigt. Außerdem wurde die Symmetrie der Gegeninduktivitätskoeffizienten bewiesen ohne Berücksichtigung des Umkehrungssätzes und der Eigenschaft der Zustandsfunktion.

1. DEFINICJE WSPÓŁCZYNNIKA INDUKCYJNOŚCI WŁASNEJ I WZAJEMNEJ

Indukcyjności własne i wzajemne można określać na podstawie definicji:

$$M_{ij} = \frac{\Psi_{ij}}{I_j}, \tag{1}$$

gdzie: Ψ_{ij} - strumień skojarzony z i-tym uzwojeniem wytworzony przez j-te uzwojenie, w którym płynie prąd I_j indeksy i oraz j oznaczają numery rozważanych obwodów (i, j = 1,..., N; N - liczba obwodów).

Z powyższej definicji nie korzysta się jednak często przy wyznaczaniu indukcyjności wzajemnych obwodów o niepomijalnej grubości uzwojeń ze względu na konieczność obliczania złożonych całek przy określaniu strumienia skojarzonego z rozważanym uzwojeniem. W tym przypadku dla układów liniowych ($H_i=k_iI_i$, gdzie współczynnik k_i można określać na podstawie znajomości konfiguracji obwodów oraz np. prawa Savarta-Laplace'a) indukcyjności wyznacza się przez sprowadzenie energii magnetycznej układu z postaci :

$$E_\mu = \frac{1}{2}\int_V \mu(\sum_{i=1}^{N} H_i)^2 dV = \frac{1}{2}\int_V \mu(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} H_iH_j)dV \tag{2a}$$

do postaci:

$$E_\mu = \frac{1}{2}\sum_{i=1, j\neq i}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}I_iI_j\right), \tag{2b}$$

będącej formą kwadratową prądów obwodów rozważanego układu,

gdzie a_{ij} - są współczynnikami przy iloczynach prądów I_iI_j (współczynniki a_{ij} dla $i\neq j$ są symetryczne ze względu na oba wskaźniki $a_{ij}=a_{ji}$).

Porównanie relacji (2a) oraz (2b) pozwala na określanie współczynników a_{ij} przez porównanie odpowiednich wyrażeń obu form kwadratowych, mianowicie:

$$a_{ij}I_iI_j = 2\int_V \mu H_iH_j dV . \tag{2c}$$

Na podstawie relacji (2c) możliwe jest określanie (definicja polowa) współczynników a_{ij} formy kwadratowej (2b), jeżeli znany jest rozkład przestrzenny pola magnetycznego w rozpatrywanym obszarze.

Za wartość indukcyjności wzajemnej ($i \neq j$) przyjmuje się :

$$\overline{M_{ij}} = \frac{1}{2}\left(a_{ij}\right), \tag{2d}$$

a indukcyjności własnej ($i=j$):

$$\overline{M_{ii}} = a_{ii}. \tag{2e}$$

Wyznaczanie wartości $\overline{M_{ij}}$ jako wielkości wynikających z wartości współczynników formy kwadratowej (2c) narzuca ich symetrię: $\overline{M_{ij}} = \overline{M_{ji}}$.

2. WYRAŻENIE INDUKCYJNOŚCI POPRZEZ FUNKCJE ROZKŁADU PRZEPŁYWU UZWOJEŃ MASZYNY

Rozważmy maszynę elektryczną o uzwojeniach wytwarzających przepływ $\Theta(\alpha,\vartheta)$. Indukcja pola magnetycznego w szczelinie powietrznej maszyny związana jest z przepływem uzwojeń [3] (przy założeniu nieskończonej wartości przenikalności magnetycznej ferromagnetyka, zbliżonego do radialnego biegu linii pola magnetycznego w szczelinie powietrznej maszyny oraz stałości natężenia pola wzdłuż linii pola w szczelinie) relacją:

$$B(\alpha,\vartheta) = \lambda(\alpha,\vartheta)\cdot\left\{\Theta(\alpha,\vartheta) - \frac{\int_0^{2\pi}\lambda(\alpha,\vartheta)\Theta(\alpha,\vartheta)d\alpha}{\int_0^{2\pi}\lambda(\alpha,\vartheta)d\alpha}\right\}, \tag{3}$$

gdzie: α - współrzędna kątowa na obwodzie maszyny,
ϑ - kąt obrotu wirnika maszyny,
λ - przewodność magnetyczna ($\lambda = \mu/\delta$, δ - grubość szczeliny powietrznej maszyny, μ - przenikalność magnetyczna powietrza).

Niech w rozważanej maszynie rozkład przewodności magnetycznej oraz przepływy uzwojeń będą do siebie ortogonalne na przedziale $[0,2\pi]$ - rozkłady indukcji magnetycznej w szczelinie i przepływu nie są przesunięte wzajemnie.

Wprowadźmy (pomocniczą) funkcję rozkładu przepływu, określoną jako:

$$f_i(\alpha,\vartheta) = \frac{\Theta_i(\alpha,\vartheta)}{I_i}, \tag{4}$$

gdzie: I_i - prąd płynący w i-tym uzwojeniu fazowym maszyny wytwarzającym przepływ $\Theta_i(\alpha,\vartheta)$.

Indukcyjności własne i wzajemne można określać następująco:

– na podstawie definicji obwodowej (1):

$$M_{ij} = \int_{A_i} \lambda(\alpha,\vartheta) f_j(\alpha,\vartheta) rl d\alpha, \tag{5}$$

– na podstawie definicji polowej (2d,e):

$$\overline{M}_{ij} = \frac{1}{2}\int_{A_V} \lambda(\alpha,\vartheta) f_i(\alpha,\vartheta) f_j(\alpha,\vartheta) rl\delta d\alpha, \tag{6}$$

gdzie: A_i - przedział kątowy obejmujący obszar rozłożenia bieguna (umownie) N wytworzonego przez rozpatrywane i-te uzwojenia maszyny,

A_V - przedział kątowy obejmujący cały obszar występowania pola magnetycznego wytworzonego przez i-te uzwojenie maszyny ($A_i \subset A_V$).

Przekształcając relacje (5) oraz (6) uzyskuje się następujące zależności na wartości indukcyjności wzajemnych (oraz własnych dla i=j) uzwojeń maszyny:

– z definicji obwodowej:

$$M_{ij} = \pi rl \int_{X_i} \lambda(x,\vartheta) f_j(x,\vartheta) dx, \tag{7a}$$

– z definicji polowej:

$$\overline{M}_{ij} = \frac{1}{2}\pi rl \int_{X_V} \lambda(x,\vartheta) f_i(x,\vartheta) f_j(x,\vartheta) dx. \tag{7b}$$

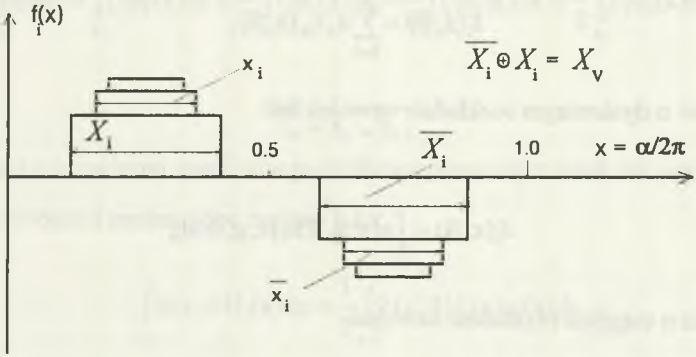
gdzie: x - zmienna kątowa odniesiona do kąta pełnego 2π: $x=\alpha/2\pi$,

X_i - przedział odpowiadający rozłożeniu bieguna N i-tego uzwojenia fazowego maszyny (wynikający ze zmiany zmiennych $x=\alpha/2\pi$),

X_V - przedział obejmujący cały obszar rozłożenia i-tego uzwojenia fazowego maszyny,

l - długość maszyny.

Relacje (7a) i (7b) pozwalają obliczać indukcyjności wzajemne i własne na podstawie odpowiednio definicji obwodowej (1) oraz polowej (2d,e).



Rys. 1. Przykładowy rozkład funkcji f(x) oraz obszarów całkowania X_i, x_i
Fig. 1. Example function f(x) and integration areas X_i, x_i

3. RÓWNOWAŻNOŚĆ OBWODOWEJ ORAZ POLOWEJ DEFINICJI INDUKCYJNOŚCI WZAJEMNYCH UZWOJEŃ MASZYNY

Obie definicje obwodowa i polowa określają indukcyjności własne i wzajemne obwodów w dwojaki sposób. Rozważmy, czy obie definicje - obwodowa (1) oraz polowa (2d,e) są równoważne.

Jeżeli założymy, iż energia magnetyczna układu uzwojeń maszyny jest w danym przypadku funkcją stanu układu, to można natychmiast wnioskować [2] o symetrii indukcyjności wzajemnych:

$$M_{ij} = M_{ji}. \tag{8}$$

Równoważności obu definicji oraz własność symetrii indukcyjności (8) można również dowieść powołując się tylko na własność bezźródłowości pola magnetycznego.

Mianowicie, załóżmy, że funkcja rozkładu przepływu uzwojenia jest dana jako:

1°

$$f_i(x,\vartheta) = \sum_{k=1}^{k} a_k s_{ik}(x,\vartheta), \tag{9a}$$

dla obwodów o dyskretnym rozkładzie uzwojeń lub:

2°

$$f_i(x,\vartheta) = \int_G a(x,g,\vartheta) s_i(x,g,\vartheta) dg \tag{9b}$$

w przypadku o ciągłym rozkładzie uzwojeń.

We wzorach (9a) i (9b) funkcja a( ) jest odpowiednio liczbą zwojów elementarnego zezwoju (9a) lub jego gęstością zwojową (9b) w danym fragmencie uzwojenia. Funkcja s(·) przyjmuje wartość +1 dla punktów x na obwodzie maszyny, które znajdują się w obszarze po dodatnio zorientowanej stronie powierzchni zezwoju uzwojenia (elementarne bieguny N zezwojów). Funkcja s(·) przyjmuje wartość 0, gdy rozpatrywany punkt nie znajduje się w obszarze objętym uzwojeniem, w pozostałych zaś punktach przyjmuje wartość równą -1 (elementarne bieguny S zezwojów). Zmienna g określa położenie rozważanego elementarnego zezwoju w ramach danego uzwojenia rozłożonego w sposób ciągły. Symbol G oznacza obszar ciągłego rozłożenia rozważanego uzwojenia maszyny.

Korzystając z bezźródłowości pola magnetycznego można zapisać:

$$\int_{x_V} \lambda(x,\vartheta) f_i(x,\varphi) dx = 0 = \int_{x_i} \lambda(x,\vartheta) f_i(x,\varphi) s_i(x) dx - \int_{\bar{x}_i} \lambda(x,\vartheta) f_j(x,\varphi) s_i(x) dx, \tag{10}$$

gdzie: x_V - obszar rozłożenia rozważanego elementarnego zezwoju i-tego uzwojenia fazowego maszyny,

x_i - obszar obejmujący elementarny biegun N wytworzony przez elementarny zezwój i-tego uzwojenia maszyny,

$\bar{x}_i$ - obszar obejmujący elementarny biegun S wytworzony przez elementarny zezwój i-tego uzwojenia (dopełnienie obszaru x_i do obszaru x_V).

Ponieważ funkcja $s_i(x)$ przyjmuje wartość +1 w obszarze x_i, a w obszarze $\overline{x}_i$ wartość równą: -1, to zachodzi:

$$\int_{x_i}(\cdot)dx = \int_{x_i}(\cdot)s_i(x)dx = \frac{1}{2}\int_{x_i}(\cdot)s_i(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\overline{x}_i}(\cdot)s_i(x)dx = \frac{1}{2}\int_{x_V}(\cdot)s_i(x)dx,$$

gdyż:

$$x_V = x_i \cup \overline{x}_i,$$

gdzie przez (·) oznaczono wyrażenie podcałkowe pierwszej z całek we wzorze (10).

Ostatnią z równości można więc zapisać jako:

$$\int_{x_i}\lambda(x,\vartheta)f_j(x)dx = \frac{1}{2}\int_{x_V}\lambda(x,\vartheta)f_j(x)s_i(x)dx. \tag{11}$$

Dokonując sumowania (w przypadku dyskretnego rozkładu uzwojenia -1°) lub całkowania (w przypadku ciągłego rozkładu uzwojenia - 2°) relacji (11) odnoszących się do elementarnych zezwojów i-tego uzwojenia maszyny, a odpowiednio przemnożonych przez liczby zwojów w zezwoju (wzór (9a)) lub gęstości zwojowe (wzór (9b)) uzyskujemy zależność:

$$\int_{x_i}\lambda(x,\vartheta)f_j(x)dx = \frac{1}{2}\int_{x_V}\lambda(x,\vartheta)f_i(x)f_j(x)dx, \tag{12}$$

gdzie: X_i - przedział będący sumą (zbiorów) obszarów obejmujących części elementarnych zezwojów i-tego uzwojenia fazowego maszyny, tworzących bieguny określone wyżej jako bieguny N zezwojów elementarnych,

X_V - przedział będący sumą obszarów obejmujących wszystkie elementarne kontury zezwojów i-tego uzwojenia fazowego maszyny.

Na podstawie relacji (12) wobec relacji (7a) oraz (7b) otrzymujemy równość:

$$\underbrace{M_{ij}}_{\text{z definicji obwodowej}} = \underbrace{\overline{M_{ij}}}_{\text{z definicji polowej}}. \tag{13}$$

Równość (13) dowodzi równoważności definicji obwodowej i polowej indukcyjności wzajemnej oraz własnej, a nadto uzasadnia ich symetrię (symetria

współczynników - wzór (8)) przy powołaniu się jedynie na własność bezźródłowości pola magnetycznego dla przypadku obwodów będących uzwojeniami maszyny (rozkład przepływu i indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej maszyny są nieprzesunięte wzajemnie) rozłożonymi w sposób dyskretny (wzór (9a)) lub sposób ciągły (wzór (9b)).

LITERATURA

[1] Bolkowski.S.: Elektrotechnika teoretyczna. WNT. Warszawa 1986.

[2] Brodzki.M.: Wstęp do teorii liniowych obwodów elektrycznych w ujęciu geometrycznym.Kompendium dla doktorantów. Skrypt Politechniki Śląskiej nr 847, Gliwice.1979.

[3] Kuhlman.K.: Theoretische Elektrotechnik t.III.Verlag Birkhäuser Basel.1951.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Tadeusz J. Sobczyk

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 marca 1994r.

Abstract

In this paper both circuit (lumped parameter) and field definitions of mutual inductance coefficient are presented. The problem of equivalence of these two definitions (1) and (2d) is considered. The circuit definition (1) of the mutual inductance coefficient needs considering a suitable surface of integration of magnetic flux density. The field definition enables to evaluate only the mean value (7) of the coefficient in the square-term formula which defines the mutual inductance coefficient. The equivalence of the definitions (1) and (2d) is proved. Additionally, the symmetry (8) of the mutual inductance coefficient (13) is shown without application of the mutual law and state function peculiarities.