

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI, Marek JOHR

**WŁASNOŚCI FUNKCJI OPISUJĄCEJ GEOMETRIĘ  
OBUSTRONNIE UŻŁOBKOWANEJ SZCZELINY POWIETRZNEJ  
SILNIKA INDUKCYJNEGO**

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono funkcję oraz szereg Fouriera funkcji, opisującej obustronnie użłobkowanie szczeliny powietrznej maszyny indukcyjnej. Opisano różne własności tej funkcji i scharakteryzowano je na odpowiednio dobranych przykładach.

**PROPERTIES OF FUNCTION DESCRIBING GEOMETRY OF TWO-SIDE  
SLOTTED AIR-GAP OF INDUCTION MACHINE**

**Summary.** In the paper the function and Fourier series of the function describing the length of two-side slotted air-gap of an induction motor is presented. Different properties of this function are described and characterized by means of properly chosen examples.

**СВОЙСТВА ФУНКЦИИ УЧИТЫВАЮЩЕЙ НЕРАВНОМЕРНОСТЬ ВОЗДУШНОГО  
ЗАЗОРА ИНДУКЦИОННОГО ДВИГАТЕЛЯ**

**Резюме.** В статье описывается функция и её разложение в ряд Фурье с учётом неравномерности воздушного зазора индукционного двигателя. Представленные примеры расчёта позволяют оценить различные свойства данной функции и выявить её особенности.

## 1. WPROWADZENIE

Uwzględnienie zjawisk pasożytniczych, występujących podczas pracy silnika indukcyjnego, a mianowicie: momentów pasożytniczych, drgań skrętnych wału, wibracji korpusu, hałasów magnetycznych itp. wymaga uwzględnienia niesinusoidalnego rozkładu przestrzennego przepływu magnetycznego poszczególnych uzwojeń stojana i wirnika oraz obustronnego użłobkowania szczeliny powietrznej. Problem opisu grubości szczeliny powietrznej posiada bogatą literaturę. Nowe możliwości w badaniach tego zagadnienia wiążą się z zastosowaniem metod numerycznych oraz komputerowych technik obliczeniowych, które umożliwiają ponadto przejrzystą graficzną prezentację wyników. Poszczególne prace, dotyczące użłobkowanej szczeliny powietrznej, skupiają się przede wszystkim na coraz to dokładniejszym opisie funkcji grubości. Odmienny jest cel niniejszej pracy, poświęconej przede wszystkim ciekawym własnościom matematycznym tej funkcji. Wynikają one z tego, że liczby żłobków stojana i wirnika w silniku indukcyjnym różnią się, jednak stosunkowo nieznacznie (najczęściej o kilka lub kilkanaście żłobków), co prowadzi do ciekawego efektu, znanego w teorii fal jako "zjawisko dudnienia". W artykule zwraca się szczególną uwagę na to, że wartość różnicy w liczbie żłobków stojana i wirnika jest istotną cechą, w zasadniczy sposób rzutującą na przebieg i charakter funkcji grubości szczeliny powietrznej.

## 2. FUNKCJA OPISUJĄCA GRUBOŚĆ OBUSTRONNIE UŻŁOBKOWANEJ SZCELINY POWIETRZNEJ.

Rozkład przestrzenny pola magnetycznego, wymuszonego przepływem magnetycznym o stałym rozkładzie przestrzennym wzdłuż obwodu jednostronnie użłobkowanej szczeliny powietrznej w przedziale kąta odpowiadającym pojedynczej podziałce żłobkowej, może być opisany z dobrym przybliżeniem funkcją (kąt  $\alpha=0^\circ$  odpowiada osi zęba)[1]:

$$B(\alpha) = \left[ 1 - \beta - \beta \cos \left( \frac{\pi}{0.8\alpha_0} - \left( \alpha - \frac{1}{2}\alpha_d \right) \right) \right] \times B_{\max} \quad (1)$$

dla kątów zawartych w obrębie otwarcia żłobka:

$$\alpha \in \left\langle \frac{1}{2}\alpha_d - 0.8\alpha_0, \frac{1}{2}\alpha_d + 0.8\alpha_0 \right\rangle \quad (2)$$

oraz:

$$B(\alpha) = B_{\max} \quad (3)$$

dla pozostałych wartości kątów:

$$\alpha \in \left( 0, \frac{1}{2} \alpha_d - 0.8 \alpha_o \right) \cup \left( 0, \frac{1}{2} \alpha_d + 0.8 \alpha_o \right) \quad (4)$$

gdzie:

- $\alpha_o$  - kąt odpowiadający otwarciu żłobka (rys. 1a - przy założeniu, że użłobkowany jest stojan lub rys. 1b przy założeniu, że użłobkowany jest wirnik),
- $\alpha_d$  - kątowa podziałka żłobkowa,
- $B_{\max}$  - wartość indukcji przy założeniu, że szczelina jest nieużłobkowana i ma stałą grubość  $\delta$ ,
- $\beta$  - współczynnik, którego wartość określa się z wykresu przedstawionego na rys. 2 ( $\alpha_o$  - otwarcie żłobka,  $\alpha_d$  - podziałka żłobkowa),
- $B_n$  - ubytek indukcji magnetycznej w strefie szczeliny powietrznej nad żłobkiem.

Rozkład ten przedstawia rys. 3.

Dla maszyny posiadającej  $Q_s$  żłobków na obwodzie stojana i gładki wirnik rozkład przestrzenny indukcji pola magnetycznego wzdłuż pełnego obwodu szczeliny można opisać za pomocą funkcji (1), (3) w następujący sposób ( $\alpha_s$  - układ odniesienia związany ze stojanem):

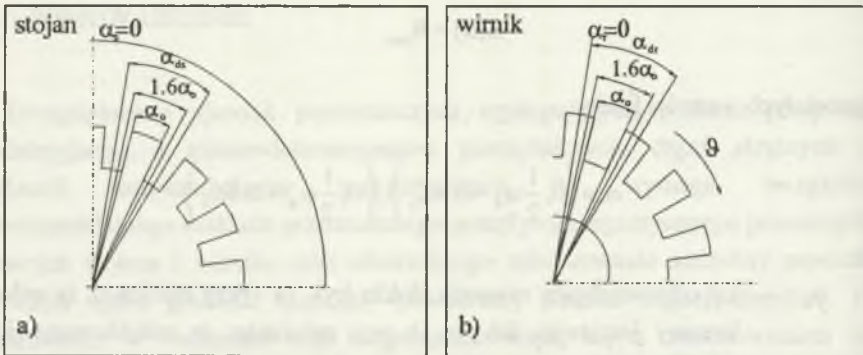
$$B_s(\alpha_s) = \left[ 1 - \beta_s - \beta_s \cos \left( \frac{\pi}{0.8 \alpha_o} - \left( \alpha_s - k \alpha_{ds} - \frac{1}{2} \alpha_{ds} \right) \right) \right] \cdot B_{s_{\max}} \quad (5)$$

dla kątów zawartych w obrębie otwarcia żłobka oraz:

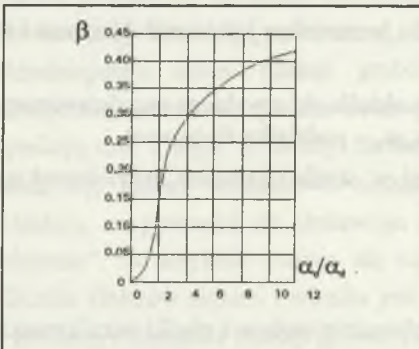
$$B_s(\alpha_s) = B_{s_{\max}} \quad (6)$$

dla pozostałych wartości kąta, gdzie  $k$  jest częścią całkowitą z ilorazu

$$k = \left[ \frac{\alpha_s}{\alpha_d} \right]$$

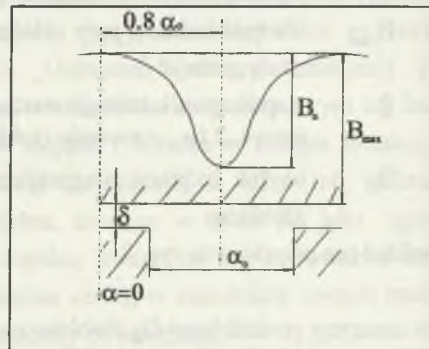


Rys.1. Charakterystyczne wymiary szczeliny powietrznej; a) stojana, b) wirnika  
 Fig. 1. Characteristic dimensions of air-gap; a) side of stator, b) side of rotor



Rys.2. Współczynnik  $\beta$  jako funkcja stosunku  $\alpha_0 / \alpha_d$

Fig. 2. Coefficient  $\beta$  as a function of the ratio  $\alpha_0 / \alpha_d$



Rys.3. Rozkład przestrzenny indukcji magnetycznej w obrębie podziałki żłobkowej

Fig. 3. Space distribution of magnetic flux density above the slot pitch

Dla maszyny posiadającej  $Q_r$  żłobków na obwodzie wirnika i gładki stojan ( przy założeniu, że wirnik jest skręcony względem stojana o kąt  $\theta$  ) odpowiednio otrzymamy w układzie odniesienia związanym z wirnikiem:

$$B_r(\alpha_r) = \left[ 1 - \beta_r - \beta_r \cos \left( \frac{\pi}{0.8\alpha_{o_r}} - \left( (\alpha_r - k\alpha_{dr}) - \frac{1}{2}\alpha_{dr} \right) \right) \right] \times B_{r_{max}} \quad (7)$$

w układzie odniesienia związanym ze stojanem ( $\alpha_s = \alpha_r + \vartheta$ ):

$$B_r(\alpha_s, \vartheta) = \left[ 1 - \beta_r - \beta_r \cos \left( \frac{\pi}{0.8\alpha_{dr}} - \left( (\alpha_s - \vartheta - k\alpha_{dr}) - \frac{1}{2}\alpha_{dr} \right) \right) \right] \times B_{r_{max}} \quad (8)$$

dla kątów zawartych w obrębie otwarcia żłobka oraz:

$$B_r(\alpha_r) = B_{r_{max}} \quad \text{lub} \quad B_r(\alpha_s, \vartheta) = B_{r_{max}} \quad (9)$$

dla pozostałych wartości kątów.

Przy uwzględnieniu użłobkowania powierzchni wirnika funkcja (8), (9) opisująca rozkład indukcji pola magnetycznego we współrzędnych związanych ze stojanem jest zależna od kąta położenia wirnika  $\vartheta$ .

Z symetrii rozłożenia żłobków wynika, że funkcje  $B_s(\alpha_s)$  i  $B_r(\alpha_r)$ , opisujące rozkład indukcji w jednostronnie użłobkowanej szczelinie powietrznej, są funkcjami cyklicznymi o okresie odpowiednio  $\alpha_{ds}$  i  $\alpha_{dr}$ .

Na podstawie znajomości rozkładu przestrzennego pola magnetycznego w szczelinie maszyny o użłobkowanym stojanie i gładkim wirniku, wymuszonego siłą magnetomotoryczną o stałym, jednostkowym rozkładzie przestrzennym  $\Theta(\alpha_s) = 1$ , można określić zastępczą grubość szczeliny wg następującej relacji:

$$\delta_s = \frac{\mu_0}{B_s(\alpha_s)} \quad (10)$$

Odpowiednio zastępcza szczelina powietrzna uwzględniająca użłobkowanie wirnika w maszynie o gładkim stojanie może być wyznaczona z relacji:

$$\delta_r = \frac{\mu_0}{B_r(\alpha_s, \vartheta)} \quad (11)$$

Wypadkowa grubość szczeliny, uwzględniająca obustronne użłobkowanie maszyny, jest opisana następującą funkcją (przy założeniu, że kąt  $\alpha_s = 0$  odpowiada osi zęba zarówno stojana, jak i wirnika):

$$\delta(\alpha_s, \vartheta) = \delta_s(\alpha_s) + \delta_r(\alpha_s, \vartheta) = \frac{\mu_0}{B_s(\alpha_s)} + \frac{\mu_0}{B_r(\alpha_s, \vartheta)} - \delta, \quad (12)$$

gdzie:

$\delta$  - grubość szczeliny powietrznej pomiędzy zębem stojana i wirnika (minimalna grubość szczeliny).

## 2. WŁASNOŚCI FUNKCJI OPISUJĄCEJ GRUBOŚĆ SZCZELINY

Funkcja (12), opisująca geometrię obustronnie użłobkowanej szczeliny powietrznej, jest funkcją okresową ze względu na obie zmienne:  $\alpha_s$  i  $\vartheta$ . Można wykazać matematycznie, że ze względu na współzrzedną kąta  $\alpha_s$  funkcja (12) jest przebiegiem cyklicznym o okresie:

$$T = \frac{2\pi}{\text{NWD}(Q_s, Q_r)} \quad (13)$$

Dowód:

$$Q_s = \text{NWD}(Q_s, Q_r) \cdot c_s, \quad (a)$$

$$Q_r = \text{NWD}(Q_s, Q_r) \cdot c_r, \quad (b)$$

$$Q_r \alpha_{dr} = Q_s \alpha_{ds} = 2\pi, \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \frac{Q_s}{Q_r} = \frac{\alpha_{dr}}{\alpha_{ds}}, \quad (d)$$

$$(a), (b), (c) \Rightarrow \frac{Q_s}{Q_r} = \frac{\alpha_{dr}}{\alpha_{ds}} = \frac{c_s}{c_r}, \quad (e)$$

$$c_s \cdot \alpha_{ds} = c_r \cdot \alpha_{dr} = T, \quad (f)$$

$$(a)(f) \Rightarrow T = c_s \alpha_s = \frac{Q_s}{\text{NWD}(Q_s, Q_r)} \cdot \frac{2\pi}{Q_s} = \frac{2\pi}{\text{NWD}(Q_s, Q_r)}$$

Ze względu na drugą zmienną: współzrzedną kątową  $\vartheta$  - okres funkcji (12) wynosi:

$$T_\vartheta = \alpha_{dr}. \quad (14)$$

Zwróćmy uwagę na interesującą własność funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$ . Jeżeli kąt obrotu  $\vartheta$  jest wielokrotnością różnicy kątowych podziałek stojana i wirnika, a więc:

$$\vartheta = k(\alpha_{dr} - \alpha_{ds}), \quad k \in \mathbb{C} \quad (15)$$

gdzie:  $\mathbb{C}$  - zbiór liczb całkowitych,

wówczas w wyniku obrotu wirnika następuje wyłącznie przesunięcie (bez jakiegokolwiek zmiany kształtu) funkcji opisującej szczelinę  $\delta(\alpha_s, 0)$  o kąt:

$$\alpha_{przes} = \vartheta \frac{\alpha_{ds}}{(\alpha_{dr} - \alpha_{ds})} = k \alpha_{ds}, \quad k \in \mathbb{C}. \quad (16)$$

Matematycznie własność tę można zapisać w następujący sposób:

$$\delta(\alpha_s, \vartheta) = \delta(\alpha_s + k \alpha_{ds}, 0) \quad (17)$$

dla  $\vartheta = k(\alpha_{dr} - \alpha_{ds}), \quad k \in \mathbb{C}$ .

Jeśliby więc w trakcie analizy numerycznej rozpatrywać funkcję grubości szczeliny tylko dla dyskretnej wartości kąta wirnika  $\vartheta = \vartheta_0 + k(\alpha_{dr} - \alpha_{ds})$ ,  $k \in C$ , wówczas do jej określenia wystarczająca byłaby znajomość funkcji dla jednego tylko położenia wirnika  $\delta(\alpha_s, \vartheta_0)$ , albowiem grubość szczeliny dla innych dyskretnych położeni wirnika jest opisana relacją:

$$\delta(\alpha_s, \vartheta) = \delta(\alpha_s + k \cdot \alpha_{ds}, \vartheta_0) \quad (18)$$

Zilustrujmy wskazane wyżej własności funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$ , opisującej geometrię obustronnie uźłobkowanej szczeliny powietrznej na wybranych przykładach.

Dla dobrego wyeksponowania omawianych własności rozważmy na wstępie prosty, teoretyczny przypadek maszyny o liczbie żłobków stojana  $Q_s = 6$  i liczbie żłobków wirnika  $Q_r = 4$  ( $\alpha_{ds} = \frac{\pi}{3}$ ,  $\alpha_{dr} = \frac{\pi}{2}$ ). Ze względu na współzrzedną kątową  $\alpha_s$  funkcja  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  posiada okres:

$$T = \frac{2\pi}{\text{NWD}(Q_s, Q_r)} = \frac{2\pi}{\text{NWD}(6, 4)} = \pi, \quad (19)$$

zaś ze względu na współzrzedną  $\vartheta$  - okres:

$$T_\vartheta = \alpha_{dr} = \frac{2\pi}{Q_r} = \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

Na rys. 4a, 4b przedstawiono odpowiednio przebieg funkcji  $\delta_s(\alpha_s)$ ,  $\delta_r(\alpha_r, \vartheta = 0)$ , a następnie na rys. 4c - przebieg funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta = 0)$ . Ze względu na to, że okres funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  wynosi  $\pi$ , wykres funkcji powtarza się dwukrotnie na pełnym obwodzie maszyny. Wartości kąta obrotu wirnika, przy których funkcja  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  ulega wyłącznie przesunięciu wynoszą:

$$\vartheta = k(\alpha_{dr} - \alpha_{ds}) = k\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = k\frac{\pi}{6}, \quad k \in C. \quad (21)$$

Dla wszystkich innych wartości kąta obrotu wirnika kształt funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  (w stosunku do funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta = 0)$ ) ulega deformacji. Przykładowo na rys. 5a-j przedstawiono wykresy funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  dla 10 różnych wartości kąta obrotu:

$$c \frac{\pi}{18} \quad c = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Wykresy funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta = 0)$  (rys.5a) i  $\delta(\alpha_s, \vartheta = 9\frac{\pi}{18})$  (rys.5j) pokrywają się, albowiem okres funkcji wynosi  $T_\vartheta = \alpha_{dr} = \frac{2\pi}{Q_r} = \frac{\pi}{2}$ . Wykresy funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  dla  $\vartheta = 3\frac{\pi}{18}, 6\frac{\pi}{18}$  (rys. 5d, 5g) odpowiadają wykresowi funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta = 0)$  (rys. 5a), przesuniętemu o kąty  $\frac{\pi}{3}$  i  $2\frac{\pi}{3}$ . Podobnie wykresy funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  dla  $\vartheta = 4\frac{\pi}{8}$  (rys. 5e) i  $\vartheta = 7\frac{\pi}{18}$  (rys. 5h) są odpowiednio przesuniętym wykresem funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta = \frac{\pi}{18})$  (rys. 5b), zaś wykresy funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  dla  $\vartheta = 5\frac{\pi}{18}$  (rys. 5f) i  $\vartheta = 8\frac{\pi}{18}$  (rys. 5i) są przesuniętym wykresem funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta = 2\frac{\pi}{18})$  (rys.5c).

Wykresy funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  dla wartości  $\vartheta = 0, \frac{\pi}{18}, 2\frac{\pi}{18}$ , podobnie jak wykresy funkcji  $\vartheta = 3\frac{\pi}{18}, 4\frac{\pi}{18}, 5\frac{\pi}{18}$  oraz  $\vartheta = 6\frac{\pi}{18}, 7\frac{\pi}{18}, 8\frac{\pi}{18}$ , są względem siebie zdeformowane.

Rozważmy kolejny przykład maszyny o  $Q_s = 36$  i  $Q_r = 40$  ( $\alpha_{ds} = 10^\circ, \alpha_{dr} = 9^\circ$ ). Ze względu na współrzędną  $\alpha_s$  okres funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  wynosi:

$$T = \frac{2\pi}{\text{NWD}(36, 40)} = 4, \quad (22)$$

co oznacza, że wykres grubości szczeliny powtarza się na pełnym obwodzie maszyny czterokrotnie (rys.6). Charakterystyczne wartości kąta obrotu wirnika, dla których występuje wyłącznie przesunięcie funkcji szczeliny, wynoszą:

$$\vartheta = k(10^\circ - 9^\circ) = k \cdot 1^\circ, \quad k \in \mathbb{C} \quad (23)$$

Wykresy funkcji dla 3 wartości kąta obrotu:  $\vartheta = 0^\circ, 0.5^\circ, 1^\circ$  zestawiono na rys.6a,6b,6c. Wykres funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta = 0^\circ)$  pokrywa się z wykresem funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta = 1^\circ)$ . Wykres funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta = 0.5^\circ)$  jest odkształcony.

Jeśli w trakcie analizy numerycznej rozpatrywać powyższą funkcję grubości szczeliny tylko dla dyskretnych wartości kąta wirnika  $\vartheta = \vartheta_0 + k \cdot 1^\circ, k \in \mathbb{C}$ , wówczas do jej określenia wystarczająca byłaby znajomość funkcji dla jednego tylko położenia wirnika  $\delta(\alpha_s, \vartheta_0)$ , ponieważ grubość szczeliny dla innych dyskretnych położenia wirnika jest opisana relacją:

$$\delta(\alpha_s, \vartheta) = \delta(\alpha_s + k \cdot 10^\circ, \vartheta_0). \quad (24)$$



#### 4. ANALIZA HARMONICZNA FUNKCJI OPISUJĄCEJ GRUBOŚĆ SZCELINY POWIETRZNEJ MASZYNY

Funkcja  $\delta(\alpha, \vartheta)$ , opisująca rozkład szczeliny powietrznej wzdłuż rozwiniętego obwodu maszyny (12), zawiera trzy składniki: składnik opisujący szczelinę powietrzną przy użłobkowanym stojanie i gładkim wirniku  $\delta_s(\alpha_s)$ , składnik opisujący szczelinę powietrzną przy użłobkowanym wirniku i gładkim stojanie  $\delta_r(\alpha_r, \vartheta)$  oraz minimalną grubość szczeliny ( $-\delta$ ). Dwa pierwsze z tych składników posiadają w swoim widmie harmoniczne o rzędach będących wielokrotnościami liczby żłobków odpowiednio: stojana ( $v=cQ_s$ ) i wirnika ( $v=cQ_r, c$  - liczba całkowita). Trzeci składnik jest wyrazem stałym szeregu.

Szereg Fouriera funkcji opisującej wypadkową szczelinę powietrzną przy użłobkowanym stojanie oraz wirniku jest równy sumie szeregów składników (12), a więc zawiera harmoniczne o rzędach równych wielokrotnościom liczby żłobków stojana i wirnika (długość fali odniesiona jest do pełnego obwodu maszyny, a więc harmoniczna o rzędzie  $v=1$  posiada okres równy całkowitemu obwodowi maszyny):

$$\delta(\alpha_s, \vartheta) = A_{\delta 0} + \sum_v A_{\delta v} \cos(v\alpha_s + \alpha_v(\vartheta)), \quad (25)$$

$$v = cQ_s, cQ_r, \quad c \in \mathbb{C}, \quad (26)$$

gdzie wyraz stały  $A_{\delta 0}$  oraz wartości amplitud poszczególnych harmonicznych przestrzennych grubości szczeliny  $A_{\delta v}$  nie zależą od kąta obrotu wirnika. Przy obrocie wirnika o kąt  $\vartheta$  następuje przesunięcie wszystkich harmonicznych o rzędach  $v = cQ_r$  o kąt  $v\vartheta = cQ_r\vartheta$ , natomiast harmoniczne przestrzenne o rzędach  $v = cQ_s$  pozostają nieruchome.

Rozważmy własność funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$ , opisaną relacją (17) na bazie analizy harmonicznej. Z punktu widzenia analizy harmonicznej powyższa własność oznacza, że przy kącie obrotu

$$\vartheta = k(\alpha_{dr} - \alpha_{ds}) \quad (27)$$

wszystkie harmoniczne o rzędach  $v = cQ_r$  muszą ulec przesunięciu o wielokrotności podziałki żłobkowej stojana, bo tylko w takim przypadku nie nastąpi zmiana kształtu funkcji grubości szczeliny. Sprawdźmy powyższy wniosek:

Harmoniczne o rzędach  $v = cQ_r$ , ulegają przy obrocie wirnika o kąt  $\vartheta$  przesunięciu o kąt  $v\vartheta$ . Dla kąta  $\vartheta$  opisanego relacją (27) przesunięcie to wynosi:

$$\begin{aligned} v\vartheta &= cQ_r k(\alpha_{dr} - \alpha_{ds}) = \\ &= c \cdot Q_r \cdot k \left( \frac{2\pi}{Q_r} - \frac{2\pi}{Q_s} \right) = c \cdot k \cdot Q_r \cdot \frac{2\pi(Q_s - Q_r)}{Q_r Q_s} = \\ &= c \cdot k \cdot (Q_s - Q_r) \alpha_{ds}, \end{aligned}$$

a więc jest wielokrotnością podziałki żłobkowej stojana (przy założeniu, że  $Q_r \neq Q_s$ ).

## 5. KSZTAŁT FUNKCJI GRUBOŚCI SZCZELINY A KROK CAŁKOWANIA W ANALIZIE NUMERYCZNEJ MODELU

Własność funkcji grubości szczeliny opisana relacją (17) i (18) posiada istotne znaczenie dla analizy numerycznej silnika przy uwzględnieniu obustronnego użłobkowania szczeliny i rzutuje na problem doboru kroku całkowania, zapewniającego uchwycenie istotnych cech pracy silnika, wynikających z nierównomierności szczeliny.

Jeśli przy założeniu stałej prędkości wirnika  $\Omega_m$  krok całkowania odpowiadać będzie kątowi  $(\alpha_{dr} - \alpha_{ds})$  (lub jego wielokrotnościom), a więc będzie wynosił:

$$\Delta t_c = \frac{|\alpha_{ds} - \alpha_{dr}|}{\Omega_m}, \quad (28)$$

wówczas szczelina powietrzna będzie postrzegana jako funkcja o stałym, niezmiennym w czasie kształcie, wirującym względem obwodu maszyny z prędkością kątową:

$$\Omega_{przes} = \Omega_m \frac{\alpha_{ds}}{(\alpha_{dr} - \alpha_{ds})}. \quad (29)$$

Jeśli chcemy więc uchwycić zjawiska wynikające ze zmieniającego się w czasie kształtu funkcji grubości szczeliny, krok całkowania musi być odpowiednią krotnością razy mniejszy od charakterystycznego kroku całkowania (28). Jeśli przyjmiemy krok

całkowania większy od charakterystycznego kroku całkowania (28), wówczas obserwowana w czasie zmiana kształtu szczeliny powietrznej będzie zupełnie przypadkowa, a to oznacza, że uzyskiwane przy takim kroku całkowania wyniki będą również przypadkowe i pozbawione sensu. Należy podkreślić, że charakterystyczny krok całkowania (28) jest różny dla maszyn o różnych liczbach zębów:

$$\Delta t_c = 2\pi \frac{|Q_s - Q_r|}{\Omega_m Q_s Q_r}, \quad (30)$$

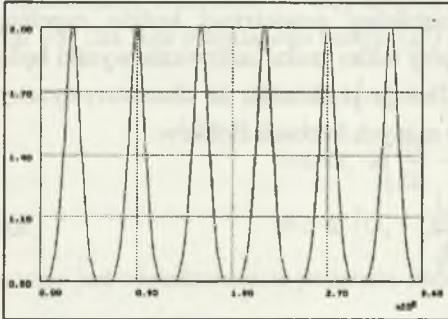
Przedstawione powyżej rozważania dobrze ilustruje poniższy przykład.

Dla rozpatrywanej już maszyny o  $Q_s = 6$  i  $Q_r = 4$  ( $\alpha_{ds} = 60^\circ$ ,  $\alpha_{dr} = 90^\circ$ ) i przy założeniu, że wirnik wiruje z prędkością  $\Omega_m = 2\pi \cdot 50$  rad/s, zestawiono funkcje grubości szczeliny dla ciągu chwil czasowych  $t_k = k \frac{1}{6} 10^{-2}$ ,  $k = 1, 2$  (rys. 7a),  $t_k = k \frac{1}{6} 10^{-3}$ ,  $k = 1, 2$  (rys. 7b) oraz dla chwil czasowych  $t_k = k \frac{1}{8} 10^{-2}$ ,  $k = 1, 2$  (rys. 7c). Ze względu na to, że charakterystyczny krok całkowania wynosi  $\Delta t_c = \frac{1}{6} 10^{-2}$ , dla pierwszego przypadku (rys. 7a) otrzymamy stały kształt szczeliny, przesuwaną się wzdłuż obwodu maszyny z prędkością  $\Omega_{przes} = 200\pi$ , a więc z prędkością 4-krotnie większą od prędkości wirowania wirnika, w drugim przypadku (rys. 7b) - zmieniający się w czasie "rzeczywisty" kształt szczeliny, zaś w trzecim przypadku (rys. 7c) - kształt szczeliny zmieniający się w sposób przypadkowy, w zależności od wyboru kroku całkowania.

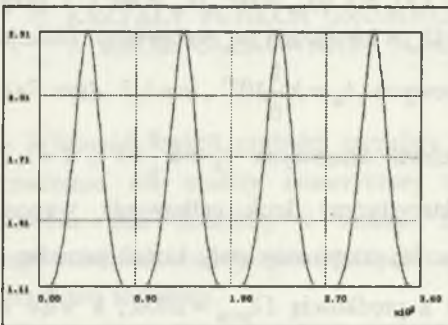
## 6. PODSUMOWANIE

Przy analizie numerycznej modelu maszyny indukcyjnej, uwzględniającej obustronne uzębienie szczeliny powietrznej, istotne znaczenie dla poprawności rozwiązania i poprawności oceny wpływu uzębienia na własności maszyny ma zapewnienie właściwego kroku całkowania. Krok całkowania powinien być odpowiednio małym dzielnikiem charakterystycznego kroku całkowania, zależnego od liczby zębów stojana oraz wirnika.

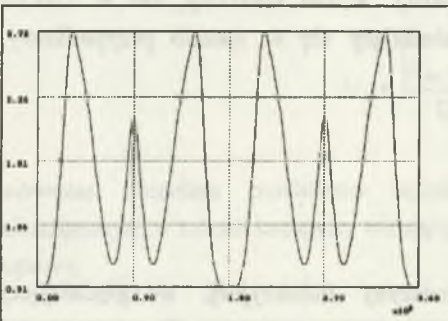
4a)



4b)

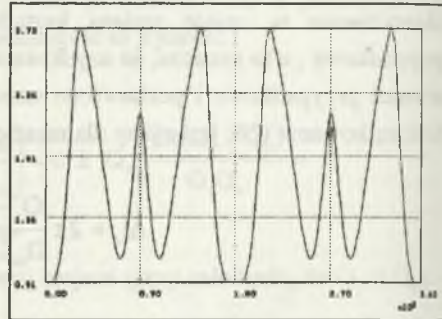
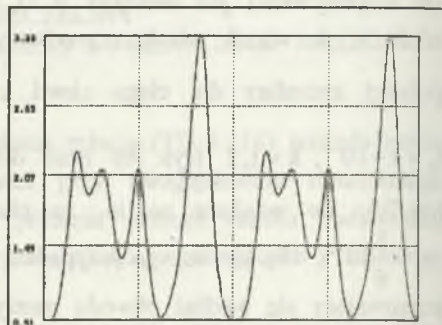
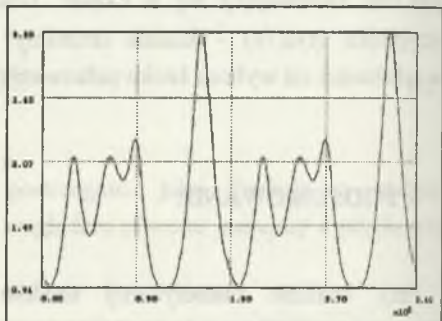


4c)



Rys.4. Rozkład przestrzenny szczeliny:  
a) uźłobkowany stojan, b) uźłobkowany wirnik, c) obustronne  $Q_s = 6$ ,  $Q_r = 4$

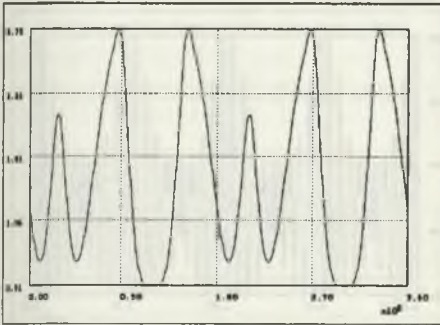
Fig.4. Space distribution of length of air-gap; a) slotted stator, b), slotted rotor, c) two-sided slotting  $Q_s = 6$ ,  $Q_r = 4$

5a)  $\vartheta = 0^\circ$ 5b)  $\vartheta = \frac{\pi}{18}$ 5c)  $\vartheta = 2 \frac{\pi}{18}$ 

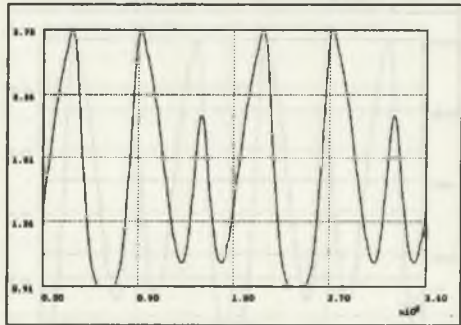
Rys.5. Grubość szczeliny powietrznej dla maszyny  $Q_s = 6$ ,  $Q_r = 4$  dla różnych kątów obrotu wirnika

Fig.5 Thickness of air-gap for the machine with  $Q_s = 6$ ,  $Q_r = 4$  for different rotor angles

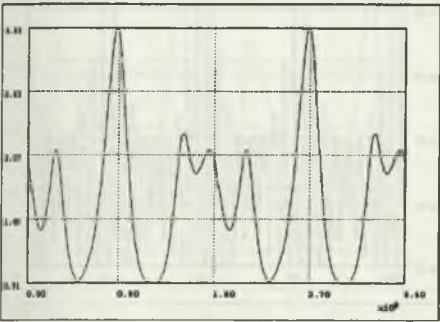
5d)  $\vartheta = 3 \frac{\pi}{18}$



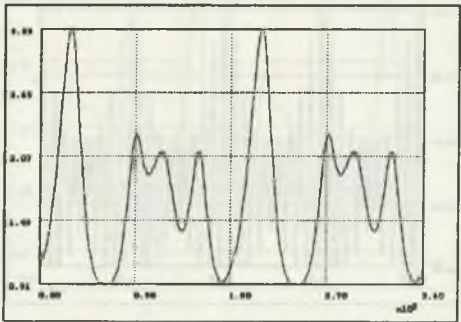
5g)  $\vartheta = 6 \frac{\pi}{18}$



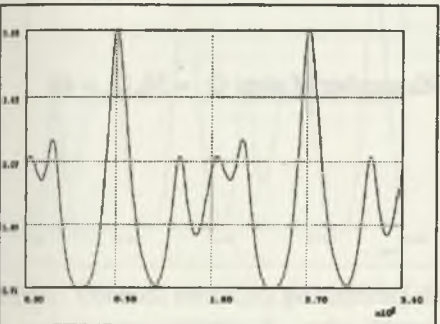
5e)  $\vartheta = 4 \frac{\pi}{18}$



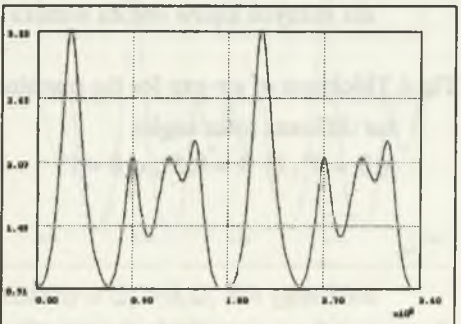
5h)  $\vartheta = 7 \frac{\pi}{18}$



5f)  $\vartheta = 5 \frac{\pi}{18}$



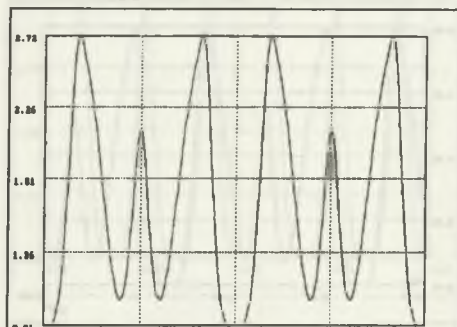
5i)  $\vartheta = 8 \frac{\pi}{18}$



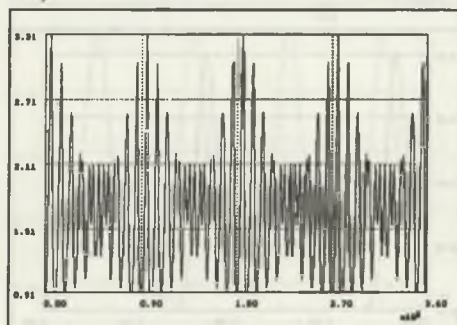
Rys. 5. Grubość szczeliny powietrznej dla różnych kątów obrotu wirnika - c, d

Fig. 5. Thickness of air-gap for different rotor angles - continue

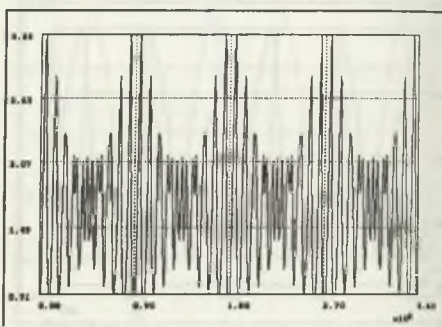
$$5j) \vartheta = 9 \frac{\pi}{18} \text{ (cd)}$$



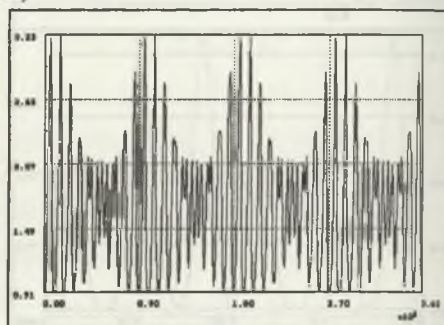
6b)



6a)



6c)

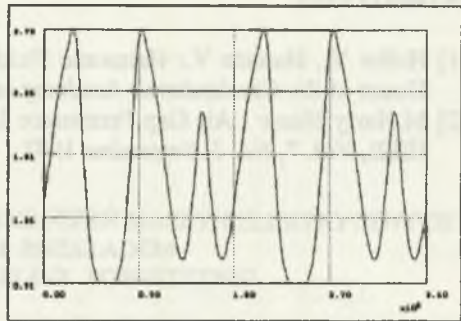
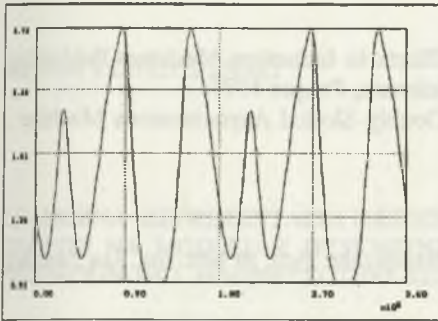


Rys.6. Grubość szczeliny dla maszyny o liczbie żłobków  $Q_s = 36, Q_r = 40$   
dla różnych kątów obrotu wirnika

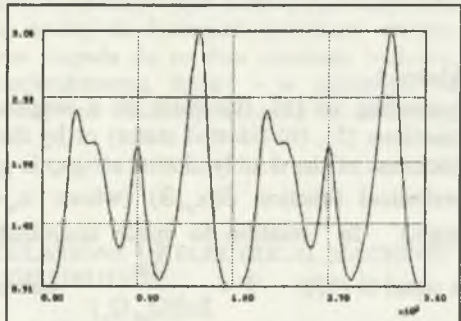
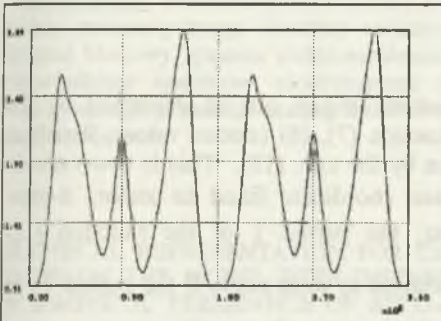
Fig.6 Thickness of air-gap for the machine with number of slots  $Q_s = 36, Q_r = 40$   
for different rotor angles

a)  $\vartheta = 0^\circ$ , b)  $\vartheta = 0.5^\circ$ , c)  $\vartheta = 1^\circ$

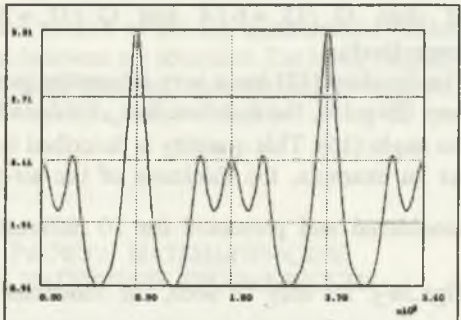
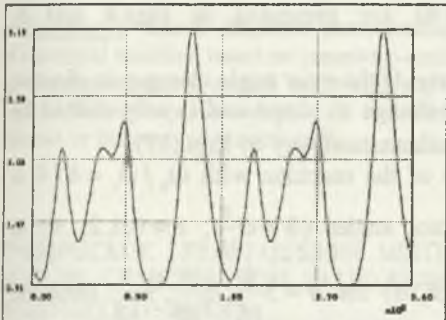
7a)



7b)



7c)



Rys.7. Grubość szczeliny powietrznej dla maszyny o  $Q_s = 6, Q_r = 4$  (prędkość kątowna wirnika  $\Omega_m = 2\pi \cdot 50$  rad/s) dla różnych chwil czasowych

Fig.7. Thickness of air-gap for the machine with  $Q_s = 6, Q_r = 4$  (rotor angular velocity  $\Omega_m = 2\pi \cdot 50$  rad/s) for different instants of time;

a)  $t_1 = \frac{1}{6} \cdot 10^{-2}, t_2 = \frac{2}{6} \cdot 10^{-2}$ , b)  $t_1 = \frac{1}{6} \cdot 10^{-3}, t_2 = \frac{2}{6} \cdot 10^{-3}$  c)  $t_1 = \frac{1}{8} \cdot 10^{-2}, t_2 = \frac{2}{8} \cdot 10^{-2}$

## LITERATURA

- [1] Heller V., Hamata V.: Harmonic Field Effects in Induction Machines. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague 1977.
- [2] M. Harry Hesse : Air Gap Permeance In Doubly-Slotted Asynchronous Machine , IEEE, Vol. 7, No. 3, September 1992.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Zawilak

Wpłynęło do Redakcji dnia 25 marca 1994

## Abstract

According to [1], thickness of a single slotted air-gap can be described by the functions (5), (6) (slotted stator) or by the function (7), (8) (slotted rotor). Resultant thickness of the doubly slotted air-gap is given by the exp. (12). This is two-variable periodical function  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  (where:  $\alpha_s$ -space coordinate fixed to stator,  $\vartheta$ -rotor angle). In relation to space coordinate  $\alpha_s$  the period  $T$  of the function (12)

is equal to (13):  $T = \frac{2\pi}{\text{lcd}(Q_s, Q_r)}$  and in relation to rotor angle  $\vartheta$  the period  $T_\vartheta$  is

equal to (14) (where  $\alpha_{dr}$ -rotor slot pitch). Two examples for the machine with number of slots  $Q_s/Q_r = 6/4$  and  $Q_s/Q_r = 36/40$  are presented in Figs.4 and 6, respectively.

The function (12) has a very interesting property. If the rotor angle changes in discrete way (Exp.15), the function  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  does not change its shape and is only shifted by the angle (16). This quantity is described in mathematical way by Eqn.(17).

As an example, the thickness of the air-gap of the machine with  $Q_s/Q_r = 6/4$  is considered and presented for 10 different rotor angles ( $\vartheta = c \frac{\pi}{18}$ ,  $c = 0, 1, 2, \dots, 9$ ) in

Figs.5a-j. As may be seen, the functions  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  for  $\vartheta = 3 \frac{\pi}{18}, 6 \frac{\pi}{18}, 9 \frac{\pi}{18}$  have the same form as the function  $\delta(\alpha_s, \vartheta = 0^\circ)$  and are shifted by the angle

$\alpha_{przes} = \frac{\pi}{3}, 2 \frac{\pi}{3}, 0$ , respectively.

This leads to the conclusion that if one wants to consider the influence of slotting on the behaviour of a machine it is necessary to choose during numerical analysis the step of integration many times shorter than characteristic step described by the relation (28) (where:  $\Omega_m$  - rotor angular velocity).

It should be emphasized that the characteristic step of integration depends on the number of the stator and rotor slots (Exp.(30)).