ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: ELEKTRYKA z. 138 Nr kol. 1245

Andrzej CIOSKA

ROZKŁADY PRZESTRZENNE INDUKCJI MAGNETYCZNEJ W SZCZELINIE POWIETRZNEJ NIESYMETRYCZNYCH MASZYN INDUKCYJNYCH

Streszczenie. Przeprowadzono analizę rozkładów indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej dla niesymetrycznych maszyn indukcyjnych. Wyprowadzono i przedstawiono zależność na rozkład przestrzenny kwadratów amplitud pola indukcji.

SPATIAL DISTRIBUTION OF MAGNETIC INDUCTION IN AIR-GAP OF ASYMMETRICAL INDUCTION MACHINES

Summary. The spatial distribution of magnetic induction in an air-gap of asymmetrical induction machines is evaluated. The relation of spatial distribution of square values of induction field amplitudes has been derived and presented.

DIE RÄUMLICHEN VERTEILUNGEN DER MAGNETISCHEN INDUKTION IM LUFTSPALT ASYMMETRISCHER INDUKTIONSMASCHINEN

Zusammenfassung. Die Analyse betrifft die Berechnung räumlicher Verteilungen der magnetischen Induktion im Luftspalt asymmetrischer Induktionsmaschinen. Die Abhängigkeit der räumlichen Verteilung von Quadratamplituden des Induktionsfeldes wurde ermittelt.

1. ROZKŁAD PRZESTRZENNY KWADRATÓW WARTOŚCI MAKSYMALNEJ ELIPTYCZNEGO POLA INDUKCJI MAGNETYCZNEJ DLA PIERWSZEJ HARMONICZNEJ PRZESTRZENNEJ

Zakładając dla pierwszej harmonicznej przestrzennej wektory składowej zgodnej $\bar{B}_a^1$ i przeciwnej $\bar{B}_b^1$ indukcji magnetycznej o różnych amplitudach, wirujące w przeciwnych kierunkach ze stałą prędkością kątową ω_1 (rys.1a), o rozkładach przestrzenno-czasowych [1],[2]

$$b_a^1(x,t) = B_a^1 \cos\left(x + \alpha_a^1 - \omega_1 t\right), \tag{1}$$

$$b_b^1(x,t) = B_b^1 \cos\left(x + \alpha_b^1 + \omega_1 t\right), \tag{2}$$

gdzie: $B_a^1 = \left|\bar{B}_a^1\right|$, $B_b^1 = \left|\bar{B}_b^1\right|$ - odpowiednie moduły tych wektorów,

można określić wypadkowe pole eliptyczne pierwszej harmonicznej przestrzennej o rozkładzie przestrzenno-czasowym jako sumę pól z relacji (1) i (2)

$$b^1(x,t) = b_a^1(x,t) + b_b^1(x,t) = B_a^1 \cos\left(x + \alpha_a^1 - \omega_1 t\right) + B_b^1 \cos\left(x + \alpha_b^1 + \omega_1 t\right). \tag{3}$$

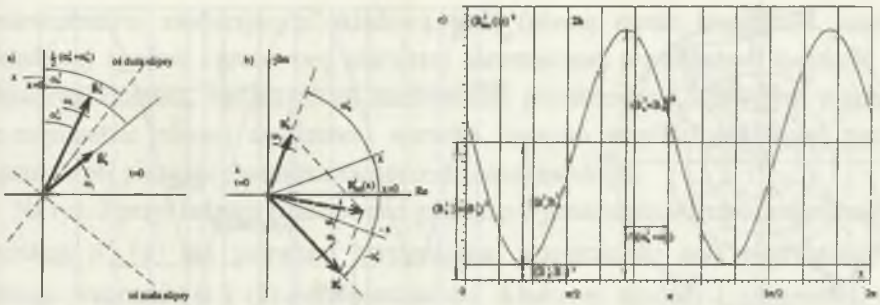
Ze względu na parzystość funkcji cosinus w relacji (1) argument funkcji cosinus zmienia się na przeciwny, zatem równanie (3) przyjmuje postać:

$$b^1(x,t) = B_a^1 \cos\left(-x - \alpha_a^1 + \omega_1 t\right) + B_b^1 \cos\left(x + \alpha_b^1 + \omega_1 t\right) . \tag{4}$$

Zauważa się, że rozkład przestrzenno-czasowy pierwszej harmonicznej przestrzennej indukcji z równania (4) można przedstawić na płaszczyźnie Gaussa (rys.1b) jako dwa wektory $\bar{B}_a^1$ i $\bar{B}_b^1$ o różnych amplitudach, wirujące w tym samym kierunku z prędkością kątową ω_1.

Na rys.1b dla chwili $t = 0$ przedstawiono wzajemne położenie tych wektorów, określone odpowiednimi kątami początkowymi $\left(\alpha_a^1, \alpha_b^1\right)$ z relacji (1) i (2) oraz kątami $\pm x$ (-x dla składowej zgodnej, +x dla składowej przeciwnej) zmiennej obwodowej x. Można zauważyć, że przedstawiony na rys.1b wektor $\bar{B}_{mx}^1(x)$ jako suma dwóch wektorów $\bar{B}_a^1$ i $\bar{B}_b^1$ dla konkretnego x wiruje na płaszczyźnie Gaussa z tą samą prędkością kątową ω_1 co jego składowe, dając w rezultacie wartość maksymalną indukcji (pierwszej harmonicznej przestrzennej) niezależną od czasu.

Wykonując odpowiednie sumowanie tych składowych wektorów dla różnych x obwodu maszyny, otrzymuje się wartość maksymalną zależną tylko od bieżącego x obwodu maszyny.



Rys. 1. Wektory indukcji magnetycznej składowej zgodnej $\bar{B}_a^1$ i przeciwnej $\bar{B}_b^1$ dla pierwszej harmonicznej przestrzennej rozkładu przestrzennego pola na płaszczyźnie związanej z maszyną (a), odpowiednie zależności tych wektorów na płaszczyźnie zespolonej (b) oraz kwadrat amplitud tego pola $\left[B_{mx}^1(x)\right]^2$ w rozkładzie przestrzennym na rozwiniętym obwodzie maszyny (c)

Fig. 1. Magnetic induction vectors of positive-sequence component $\bar{B}_a^1$ and negative-sequence component $\bar{B}_b^1$ for the 1-st spatial harmonic of spatial field distribution on the plane related to the machine (a), the adequate dependence of these vectors on the complex plane (b), the second power of amplitudes of this field $\left[B_{mx}^1(x)\right]^2$ in the spatial distribution on the uncoiled machine circuit (c)

Wektory składowej zgodnej i przeciwnej indukcji $\bar{B}_a^1$, $\bar{B}_b^1$ oraz ich suma $\bar{B}_{mx}^1(x)$, przedstawione na rys.1b, rozkłada się na części rzeczywiste i urojone na płaszczyźnie Gaussa, zatem porównując części rzeczywiste i urojone tych wektorów, kwadrat wartości maksymalnej $\left[B_{mx}^1(x)\right]^2$ pierwszej harmonicznej przestrzennej indukcji przedstawia się w postaci:

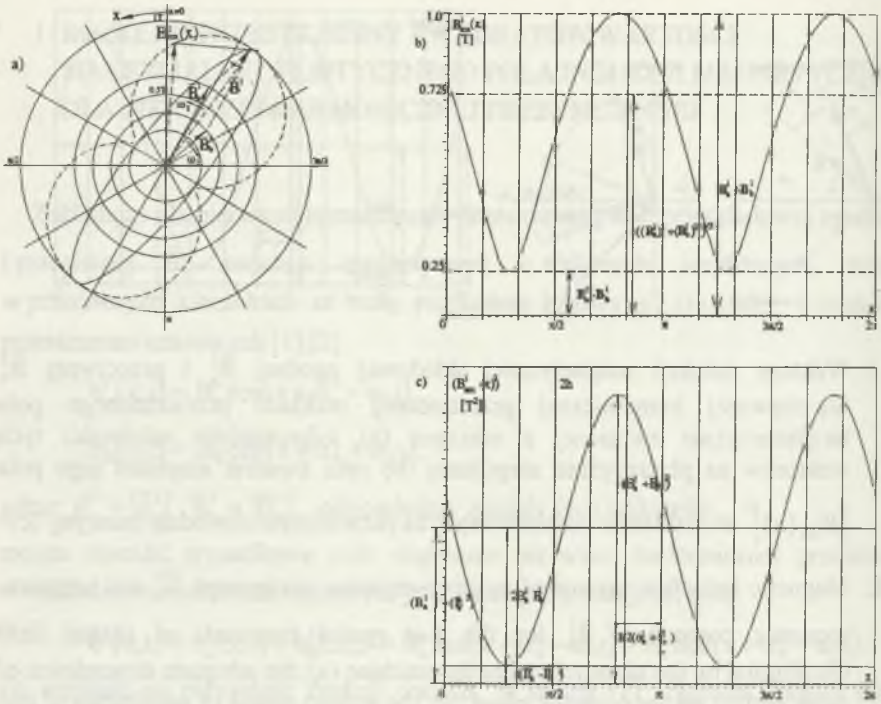
$$\left[B_{mx}^1(x)\right]^2 = \left[B_a^1\cos\left(-x-\alpha_a^1+\omega_1 t\right)+B_b^1\cos\left(x+\alpha_b^1+\omega_1 t\right)\right]^2 +$$

$$+\left[B_a^1\sin\left(-x-\alpha_a^1+\omega_1 t\right)+B_b^1\sin\left(x+\alpha_b^1+\omega_1 t\right)\right]^2. \qquad (5)$$

Dokonując odpowiednich przekształceń wzoru (5), otrzymuje się relację na kwadrat wartości maksymalnej indukcji pierwszej harmonicznej przestrzennej w rozkładzie przestrzennym (x), nie zawierającym czynnika czasowego ($\omega_1 t$)

$$\left[B_{mx}^1(x)\right]^2 = \left(B_a^1\right)^2+\left(B_b^1\right)^2+2B_a^1B_b^1\cos\left(2x+\alpha_a^1+\alpha_b^1\right) \quad , \qquad (6)$$

co przedstawiono na rys.1c.



Rys.2. Graficzne wyznaczenie rozkładu przestrzennego wartości maksymalnej indukcji $B^1_{mx}(x)$ dla wektorów $\bar{B}^1_a$ i $\bar{B}^1_b$ (rys.1) pola eliptycznego 1 harmonicznej przestrzennej (a), rozkład przestrzenny $B^1_{mx}(x)$ wartości maksymalnej indukcji (b) i rozkład przestrzenny $\left[B^1_{mx}(x)\right]^2$ kwadratów wartości maksymalnych indukcji (c) tego pola na rozwiniętym obwodzie maszyny

Fig.2. Graphical determination of the spatial distribution of the maximal induction value $B^1_{mx}(x)$ for the vectors $\bar{B}^1_a$ and $\bar{B}^1_b$ (fig.1) of elliptic field of the 1-st spatial harmonic (a), the spatial distribution $B^1_{mx}(x)$ of the maximal induction value (b) the spatial distribution $\left[B^1_{mx}(x)\right]^2$ of the second power of maximal induction values (c) of this field on the uncoiled machine circuit

Zauważa się z relacji (6), że rozkład przestrzenny kwadratów wartości maksymalnych indukcji $\left[B^1_{mx}(x)\right]^2$ dla pierwszej harmonicznej przestrzennej zgodnej B^1_a i przeciwnej B^1_b pola eliptycznego, danych relacjami (1) i (2), jest rozkładem

przestrzennym zawierającym składową stałą (równą sumie kwadratów amplitud składowej zgodnej i przeciwnej pierwszej harmonicznej przestrzennej indukcji) oraz składową zmienną, będącą drugą harmoniczną przestrzenną (2x) w tym rozkładzie (o amplitudzie równej dwukrotnej wartości iloczynu amplitud składowej zgodnej i przeciwnej pierwszej harmonicznej przestrzennej indukcji).

Na rys. 2 przykładowo zilustrowano graficzne wyznaczanie wartości maksymalnych indukcji $B^1_{mx}(x)$ dla pierwszej harmonicznej przestrzennej pola eliptycznego [1] danego wzorami (1) i (2) odpowiednio dla składowej zgodnej i przeciwnej, czyli odpowiednio dla dwóch wektorów indukcji $\vec{B}^1_a$ i $\vec{B}^1_b$. Na rys.2a w układzie współrzędnych biegunowych linią przerywaną oznaczono rozkład przestrzenny wartości maksymalnych $B^1_{mx}(x)$, wyznaczony graficznie przez przecięcie się danej każdej rzędnej promieniowej układu współrzędnych biegunowych (x) z jej normalną, będącą styczną do elipsy pola. Zależność $B^1_{mx}(x)$ wyznaczoną graficznie (rys.2a) przedstawiono na rozwiniętym obwodzie maszyny na rys.2b, zaś po podniesieniu do kwadratu przedstawiono na rys.2c jej kwadratowy odpowiednik jako kwadrat wartości maksymalnej $\left[B^1_{mx}(x)\right]^2$ pierwszej harmonicznej przestrzennej, co jest równoznaczne z relacją (6) przedstawioną na rys.1c.

2. ROZKŁAD PRZESTRZENNY KWADRATÓW WARTOŚCI MAKSYMALNEJ ELIPTYCZNEGO POLA INDUKCJI MAGNETYCZNEJ DLA N-TEJ HARMONICZNEJ PRZESTRZENNEJ

Postępując w sposób podobny dla dowolnej pojedynczej n-tej harmonicznej przestrzennej indukcji magnetycznej danej wektorami składowej zgodnej $\vec{B}^n_a$ i przeciwnej $\vec{B}^n_b$ o różnych amplitudach, które wirują w przeciwnych kierunkach ze stałą prędkością kątową n-krotnie mniejszą ω_1/n (rys.3a) o rozkładach przestrzenno-czasowych [1],[2]:

$$b^n_a(x,t) = B^n_a \cos\left(nx + \alpha^n_a - \omega_1 t\right), \tag{7}$$

$$b^n_b(x,t) = B^n_b \cos\left(nx + \alpha^n_b + \omega_1 t\right), \tag{8}$$

gdzie: $B^n_a = \left|\vec{B}^n_a\right|$, $B^n_b = \left|\vec{B}^n_b\right|$ - odpowiednie moduły tych wektorów,

można określić wypadkowe pole eliptyczne n-tej harmonicznej przestrzennej

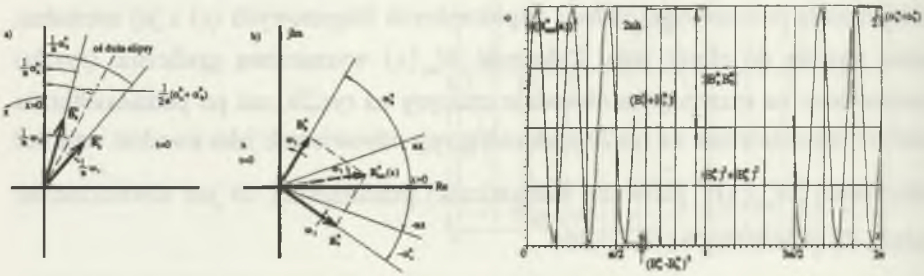
o rozkładzie przestrzenno-czasowym jako sumę pól z relacji (7) i (8)

$$b^n(x,t) = b_a^n(x,t) + b_b^n(x,t) = B_a^n \cos\left(nx + \alpha_a^n - \omega_1 t\right) + B_b^n \cos\left(nx + \alpha_b^n + \omega_1 t\right). \quad (9)$$

Zmieniając argument funkcji cosinus z relacji (7) na przeciwny, równanie (9) przyjmuje postać

$$b^n(x,t) = B_a^n \cos\left(-nx - \alpha_a^n + \omega_1 t\right) + B_b^n \cos\left(nx + \alpha_b^n + \omega_1 t\right). \quad (10)$$

Rozkład przestrzenno-czasowy n-tej harmonicznej przestrzennej indukcji z równania (10) przedstawia się na płaszczyźnie Gaussa (rys.3b) jako dwa wektory $\bar{B}_a^n$ i $\bar{B}_b^n$ o różnych amplitudach wirujące w tym samym kierunku z prędkością kątową ω_1.



Rys.3. Wektory indukcji magnetycznej składowej zgodnej $\bar{B}_a^n$ i przeciwnej $\bar{B}_b^n$ dla n-tej harmonicznej przestrzennej rozkładu przestrzennego pola na płaszczyźnie związanej z maszyną (a), odpowiednie zależności tych wektorów na płaszczyźnie zespolonej (b) oraz kwadrat amplitud tego pola $\left[B_{mx}^n(x)\right]^2$ w rozkładzie przestrzennym na rozwiniętym obwodzie maszyny (c)

Fig.3. The magnetic induction vectors of positive-sequence component $\bar{B}_a^n$ and negative-sequence component $\bar{B}_b^n$ for the n-th spatial harmonic of the spacial field distribution on the plane related to the machine (a), the adequate dependences of these vectors on the complex plane (b) and the second power of amplitudes of this field $\left[B_{mx}^n(x)\right]^2$ in the spatial distribution on the uncoiled machine circuit (c)

Na rys. 3b dla chwili $t = 0$ przedstawiono wzajemne położenie tych wektorów, określone odpowiednimi kątami początkowymi (α_a^n, α_b^n) z relacji (7) i (8) oraz kątami $\pm nx$ (-nx dla składowej zgodnej, +nx dla składowej przeciwnej) zmiennej obwodowej x.

Podobnie można zauważyć, że przedstawiony na rys.3b wektor $\bar{B}^n_{mx}(x)$ jako suma dwóch wektorów $\bar{B}^n_a$ i $\bar{B}^n_b$ dla konkretnego x kręci się na płaszczyźnie Gaussa z tą samą prędkością kątową ω_1 co jego składowe, dając w rezultacie wartość maksymalną indukcji (n-tej harmonicznej przestrzennej) niezależną od czasu. Wykonując odpowiednie sumowanie tych składowych wektorów dla różnych x obwodu maszyny, otrzymuje się wartość maksymalną również zależną tylko od bieżącego x obwodu maszyny.

Również dla n-tej harmonicznej, wektory składowej zgodnej i przeciwnej $\bar{B}^n_a$ i $\bar{B}^n_b$ oraz ich suma $\bar{B}^n_{mx}(x)$, przedstawione na rys.3b, rozkłada się na części rzeczywiste i urojone na płaszczyźnie Gaussa, zatem, porównując części rzeczywiste i urojone tych wektorów, kwadrat wartości maksymalnej $\left[B^n_{mx}(x)\right]^2$ n-tej harmonicznej przestrzennej indukcji przedstawia się w postaci:

$$\left[B^n_{mx}(x)\right]^2 = \left[B^n_a \cos\left(-nx - \alpha^n_a + \omega_1 t\right) + B^n_b \cos\left(nx + \alpha^n_b + \omega_1 t\right)\right]^2 +$$
$$+\left[B^n_a \sin\left(-nx - \alpha^n_a + \omega_1 t\right) + B^n_b \sin\left(nx + \alpha^n_b + \omega_1 t\right)\right]^2. \tag{11}$$

Dokonując odpowiednich przekształceń wzoru (11), otrzymuje się relację na kwadrat wartości maksymalnej indukcji n-tej harmonicznej przestrzennej w rozkładzie przestrzennym (x), również nie zawierającym czynnika czasowego ($\omega_1 t$)

$$\left[B^n_{mx}(x)\right]^2 = \left(B^n_a\right)^2 + \left(B^n_b\right)^2 + 2B^n_a B^n_b \cos\left(2nx + \alpha^n_a + \alpha^n_b\right), \tag{12}$$

co przedstawiono na rys.3c.

Z relacji (12) można zauważyć, że rozkład przestrzenny kwadratów wartości maksymalnych indukcji $\left[B^n_{mx}(x)\right]^2$ dla n-tej harmonicznej przestrzennej zgodnej B^n_a i przeciwnej B^n_b pola eliptycznego danego relacjami (7) i (8) jest rozkładem przestrzennym, zawierającym składową stałą (równą sumie kwadratów amplitud składowej zgodnej i przeciwnej n-tej harmonicznej przestrzennej indukcji) oraz składową zmienną, będącą 2n-tą harmoniczną przestrzenną (2nx) w tym rozkładzie (o amplitudzie równej dwukrotnej wartości iloczynu amplitud składowej zgodnej i przeciwnej n-tej harmonicznej przestrzennej indukcji).

3. ROZKŁAD PRZESTRZENNY KWADRATÓW WARTOŚCI MAKSYMALNEJ WYPADKOWEGO POLA INDUKCJI MAGNETYCZNEJ

W ogólnym przypadku w stanie ustalonym rzeczywisty rozkład przestrzenno-czasowy $b(x,t)$ indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej maszyn indukcyjnych (a w szczególności niesymetrycznych maszyn indukcyjnych) [1] jest rozkładem okresowym, spełniającym warunki Dirichleta. Rozkład ten można przedstawić w postaci nieskończonego szeregu Fouriera, zawierającego składowe zgodne $b_a^n(x,t)$ i przeciwne $b_b^n(x,t)$ poszczególnych harmonicznych przestrzennych dla $n = 1,\ldots,\infty$

$$b(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_a^n(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_b^n(x,t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_a^n \cos\left(nx + \alpha_a^n - \omega_1 t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_b^n \cos\left(nx + \alpha_b^n + \omega_1 t\right) . \tag{13}$$

Po zamianie na przeciwne argumentów funkcji cosinusoidalnych dla wszystkich harmonicznych składowych zgodnych indukcji $b_a^n(x,t)$ na podstawie równania (13) otrzymuje się:

$$b(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_a^n \cos\left(-nx - \alpha_a^n + \omega_1 t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_b^n \cos\left(nx + \alpha_b^n + \omega_1 t\right) . \tag{14}$$

Przedstawiając, również w ogólnym przypadku występowania nieskończonej liczby harmonicznych, wektory poszczególnych harmonicznych składowych zgodnych $\bar{B}_a^n$ i przeciwnych $\bar{B}_b^n$ na płaszczyźnie Gaussa oraz sumując odpowiednie ich rzuty (części rzeczywiste i urojone), otrzymuje się wypadkową wartość maksymalną indukcji $B_{mx}(x)$, daną tymi rzutami. Kwadrat wypadkowej wartości maksymalnej indukcji zapisuje się w postaci:

$$\left[B_{mx}(x)\right]^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_a^n \cos\left(-nx - \alpha_a^n + \omega_1 t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_b^n \cos\left(nx + \alpha_b^n + \omega_1 t\right)\right)^2 +$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_a^n \sin\left(-nx - \alpha_a^n + \omega_1 t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_b^n \sin\left(nx + \alpha_b^n + \omega_1 t\right)\right)^2 . \tag{15}$$

Występujące w relacji (15) poszczególne kwadraty (sum częściowych rzutów wektorów składowych zgodnych i przeciwnych) po odpowiednim przekształceniu zapisuje się w postaci:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_a^n \sin\left(-nx-\alpha_a^n+\omega_1 t\right)\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_a^n \sin\left(-nx-\alpha_a^n+\omega_1 t\right)\right]^2 +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_a^n \sin\left(-nx-\alpha_a^n+\omega_1 t\right)\sum_{m=n+1}^{\infty} B_a^m \sin\left(-mx-\alpha_a^m+\omega_1 t\right)\right), \tag{16}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_a^n \cos\left(-nx-\alpha_a^n+\omega_1 t\right)\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_a^n \cos\left(-nx-\alpha_a^n+\omega_1 t\right)\right]^2 +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_a^n \cos\left(-nx-\alpha_a^n+\omega_1 t\right)\sum_{m=n+1}^{\infty} B_a^m \cos\left(-mx-\alpha_a^m+\omega_1 t\right)\right), \tag{17}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_b^n \sin\left(nx+\alpha_b^n+\omega_1 t\right)\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_b^n \sin\left(nx+\alpha_b^n+\omega_1 t\right)\right]^2 +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_b^n \sin\left(nx+\alpha_b^n+\omega_1 t\right)\sum_{m=n+1}^{\infty} B_b^m \sin\left(mx+\alpha_b^m+\omega_1 t\right)\right), \tag{18}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_b^n \cos\left(nx+\alpha_b^n+\omega_1 t\right)\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_b^n \cos\left(nx+\alpha_b^n+\omega_1 t\right)\right]^2 +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_b^n \cos\left(nx+\alpha_b^n+\omega_1 t\right)\sum_{m=n+1}^{\infty} B_b^m \cos\left(mx+\alpha_b^m+\omega_1 t\right)\right). \tag{19}$$

W równaniach (16)...(19) jako pierwsze składniki występują odpowiednie sumy nieskończone kwadratów rzutów dla składowych zgodnych i przeciwnych, dając w konsekwencji na podstawie równań (16) i (17) zależność:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_a^n \sin\left(-nx-\alpha_a^n+\omega_1 t\right)\right]^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_a^n \cos\left(-nx-\alpha_a^n+\omega_1 t\right)\right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_a^n\right)^2, \tag{20}$$

zaś na podstawie równań (18) i (19) zależność:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_b^n \sin\left(nx+\alpha_b^n+\omega_1 t\right)\right]^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_b^n \cos\left(nx+\alpha_b^n+\omega_1 t\right)\right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_b^n\right)^2, \tag{21}$$

będące odpowiednio sumami nieskończonymi kwadratów amplitud pola indukcji magnetycznej dla poszczególnych harmonicznych przestrzennych składowych zgodnych (20) i przeciwnych (21).

Pozostałe, drugie składniki z równań (16)...(19), jako podwójne iloczyny nieskończonych szeregów podwójnych, dają w porównaniu odpowiednich składników z równań (16) i (17) zależność:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_a^n \sin\left(-nx-\alpha_a^n+\omega_1 t\right)\sum_{m=n+1}^{\infty}B_a^m \sin\left(-mx-\alpha_a^m+\omega_1 t\right)\right)+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_a^n \cos\left(-nx-\alpha_a^n+\omega_1 t\right)\sum_{m=n+1}^{\infty}B_a^m \cos\left(-mx-\alpha_a^m+\omega_1 t\right)\right)=$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_a^n \sum_{m=n+1}^{\infty}B_a^m \cos\left[(m-n)x+\alpha_a^m-\alpha_a^n\right]\right], \tag{22}$$

zaś w porównaniu odpowiednich składników z równań (18) i (19) zależność:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_b^n \sin\left(nx+\alpha_b^n+\omega_1 t\right)\sum_{m=n+1}^{\infty}B_b^m \sin\left(mx+\alpha_b^m+\omega_1 t\right)\right)+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_b^n \cos\left(nx+\alpha_b^n+\omega_1 t\right)\sum_{m=n+1}^{\infty}B_b^m \cos\left(mx+\alpha_b^m+\omega_1 t\right)\right)=$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_b^n \sum_{m=n+1}^{\infty}B_b^m \cos\left[(m-n)x+\alpha_b^m-\alpha_b^n\right]\right]. \tag{23}$$

Relacje (20) i (22) odnoszą się do składowych zgodnych poszczególnych harmonicznych przestrzennych, zaś relacje (21) i (23) do składowych przeciwnych poszczególnych harmonicznych przestrzennych.

Składniki podwójnych iloczynów mieszanych z nieskończonych sum dla składowych zgodnych i przeciwnych z relacji (15) po odpowiednim przekształceniu dają przez porównanie odpowiednich składników następującą relację:

$$2\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_a^n \cos\left(-nx-\alpha_a^n+\omega_1 t\right)\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_b^n \cos\left(nx+\alpha_b^n+\omega_1 t\right)\right)+$$

$$+2\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_a^n \sin\left(-nx-\alpha_a^n+\omega_1 t\right)\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_b^n \sin\left(nx+\alpha_b^n+\omega_1 t\right)\right)=$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}B_a^n B_b^m \cos\left[(m+n)x+\alpha_a^n+\alpha_b^m\right]. \tag{24}$$

Reasumując, rozkład przestrzenny kwadratów wartości maksymalnych indukcji z relacji (15) przy uwzględnieniu równań (20)...(24) można zapisać ostatecznie w postaci:

$$[B_{mx}(x)]^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(B_a^n\right)^2 + \left(B_b^n\right)^2\right] +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_a^n \sum_{m=n+1}^{\infty} B_a^m \cos\left[(m-n)x + \alpha_a^m - \alpha_a^n\right]\right] +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_b^n \sum_{m=n+1}^{\infty} B_b^m \cos\left[(m-n)x + \alpha_b^m - \alpha_b^n\right]\right] +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_a^n B_b^m \cos\left[(m+n)x + \alpha_a^n + \alpha_b^m\right] . \qquad (25)$$

4. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Rozkład przestrzenny kwadratów wartości maksymalnej indukcji z relacji (25) zawiera cztery grupy składników.

Pierwsza grupa składników jest to suma nieskończona kwadratów składowych zgodnych i przeciwnych poszczególnych n-tych harmonicznych przestrzennych indukcji (B_a^n i B_b^n) dla $n = 1,...,\infty$, dająca stałą wartość w rozkładzie przestrzennym kwadratów amplitud pola. Druga, to podwójne iloczyny każdej składowej zgodnej n-tej harmonicznej przestrzennej indukcji (B_a^n) ze składową zgodną m-tej harmonicznej przestrzennej (B_a^m) przy $m = n+1$ dla $n,m = 1,...,\infty$, dające harmoniczne rzędu $(m-n)$ w rozkładzie przestrzennym kwadratów. Trzecia, to podwójne iloczyny każdej składowej przeciwnej n-tej harmonicznej przestrzennej indukcji (B_b^n) ze składową przeciwną m-tej harmonicznej przestrzennej (B_b^m) przy $m = n+1$ dla $n,m = 1,...,\infty$, dające również harmoniczne rzędu $(m-n)$ w rozkładzie przestrzennym kwadratów. Czwarta grupa składników, to podwójne iloczyny każdej składowej zgodnej n-tej harmonicznej przestrzennej indukcji (B_a^n) ze składową przeciwną m-tej harmonicznej przestrzennej indukcji (B_b^m) dla $n,m = 1,...,\infty$, dające harmoniczne rzędu $(m+n)$ w rozkładzie przestrzennym kwadratów.

Uwzględniając fakt, że w równaniu (25) druga i trzecia grupa składników zawiera dla $n,m=1,...,\infty$ harmoniczne przestrzenne rzędu (m-n) dla poszczególnych sum kombinacji iloczynów samych składowych zgodnych i samych składowych przeciwnych oraz że czwarta grupa składników zawiera dla $n,m=1,...,\infty$ harmoniczne przestrzenne rzędu (m+n) dla poszczególnych sum kombinacji iloczynów (mieszanych) składowych zgodnych ze składowymi przeciwnymi, po odpowiednim przegrupowaniu poszczególnych składników równania (25) otrzymuje się zależność na rozkład przestrzenny kwadratów amplitud pola:

$$\begin{aligned}\left[B_{mx}(x)\right]^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(B_a^n\right)^2+\left(B_b^n\right)^2\right]+\\ &+2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_a^nB_a^{n+k}\cos\left(kx+\alpha_a^{n+k}-\alpha_a^n\right)+\\ &+2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_b^nB_b^{n+k}\cos\left(kx+\alpha_b^{n+k}-\alpha_b^n\right)+\\ &+2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1,k\neq 1}^{k-1}B_a^nB_b^{k-n}\cos\left(kx+\alpha_a^n+\alpha_b^{k-n}\right)\ .\end{aligned} \tag{26}$$

Relację (26) sprowadza się do zależności:

$$\left[B_{mx}(x)\right]^2=g(x)=C^0+\sum_{k=1}^{\infty}C^k\cos\left(kx+\gamma^k\right), \tag{27}$$

stanowiącą rozkład na nieskończony szereg Fouriera przestrzennego rozkładu kwadratów wartości maksymalnych pola indukcji magnetycznej,danej poszczególnymi harmonicznymi składowych zgodnych B_a^n i przeciwnych B_b^n.

Porównując równania (26) i (27), otrzymuje się zależność na składową stałą

$$C^0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(B_a^n\right)^2+\left(B_b^n\right)^2\right] \tag{28}$$

oraz zależność na k-tą harmoniczną rozkładu przestrzennego kwadratów wartości maksymalnych pola

$$\begin{aligned}C^k\cos\left(kn+\gamma^k\right) &= 2\sum_{n=1}^{\infty}B_a^nB_a^{n+k}\cos\left(kx+\alpha_a^{n+k}-\alpha_a^n\right)+\\ &+2\sum_{n=1}^{\infty}B_b^nB_b^{n+k}\cos\left(kx+\alpha_b^{n+k}-\alpha_b^n\right)+2\sum_{n=1,k\neq 1}^{k-1}B_a^nB_b^{k-n}\cos\left(kx+\alpha_a^n+\alpha_b^{k-n}\right)\ .\end{aligned} \tag{29}$$

Z równań (25)...(29) wynika, że w przypadku występowania harmonicznych tylko nieparzystych dla poszczególnych składowych zgodnych B_a^n i przeciwnych B_b^n rozkład przestrzenny kwadratów wartości maksymalnych pola oprócz składowej stałej z zależności (28) zawiera harmoniczne tylko parzyste z równania (29). Warto dalej zauważyć, że gdy rozpatruje się występowanie skończonej liczby nieparzystych harmonicznych przestrzennych rzędu n=1,3,5,...,N dla składowych zgodnych i przeciwnych (B_a^n, B_b^n), to rozkład przestrzenny kwadratów wartości maksymalnych pola (oprócz składowej stałej) zawiera harmoniczne parzyste rzędu k=2,4,6,...,2N, czyli o maksymalnym rzędzie równym 2N.

W przypadku, gdy rozkład przestrzenny wartości maksymalnych $B_{mx}(x)$ indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej niesymetrycznych maszyn indukcyjnych dany jest z pomiarów [3],[4] przez wyznaczenie wartości szczytowych pola indukcji wzdłuż obwodu maszyny x, można wyznaczyć poszczególne harmoniczne przestrzenne tego pola dla składowych zgodnych B_a^n i przeciwnych B_b^n (oraz odpowiadające im kąty α_a^n i α_b^n), przedstawiając w postaci nieskończonego szeregu Fouriera rozkład przestrzenny kwadratów wartości maksymalnych $[B_{mx}(x)]^2$ pola indukcji (podnosząc do kwadratu otrzymany z pomiarów $B_{mx}(x)$) oraz rozpisując równania (28) i (29) dla poszczególnych k-tych harmonicznych przestrzennych. Zatem, rozpisując równania (28) i (29) dla z góry zadanej maksymalnej liczby rozpatrywanych harmonicznych N, determinowanej dokładnością pomiarową wyznaczania $B_{mx}(x)$, otrzymuje się układ równań, z których wyznacza się poszczególne harmoniczne przestrzenne składowych zgodnych B_a^n i przeciwnych B_b^n.

LITERATURA

[1] Sochocki R., Życki Z.: Maszyny elektryczne małej mocy. WNT, Warszawa 1978.

[2] Turowski J.: Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych. WNT, Warszawa 1982.

[3] Cioska A., Janik T.: Metoda pomiaru rozkładu pola magnetycznego w szczelinie powietrznej małych maszyn elektrycznych prądu przemiennego. OBRME "EMA-KOMEL", Zeszyty Problemowe 20/74.

[4] Cioska A., Rymarski Z.: System pomiarowy niesymetrycznych maszyn indukcyjnych małej i średniej mocy. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Elektryka, z.138, Gliwice 1994.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ernest Mendrela

Wpłynęło do Redakcji dnia 25 marca 1994 r.

Abstract

An analysis of the spatial-time depending distribution of magnetic induction in the air gap of non symmetrical induction engine is presented.

The calculation of the spatial-time depending distribution of maximal value of magnetic induction field is shown on Gauss plane for each n-order spatial harmonic of the elliptic field represented by the negative- and positive-sequence components (fig.3b).

The calculation of spatial distributions of maximal value squares of the magnetic induction resultant field is shown in chapter 3 consequently obtaining relation (25).

The equation (25) containing four components' groups (constant value in the space, the combinations of harmonics of positive-sequence components only, the combinations of harmonics of negative-sequence components only, the mixed combinations) is also shown in different form in equation (26).

The spatial distribution of maximal value squares of the magnetic induction determined by equation (27), shown in the form of Fourier series in comparison with equation (26) gives consequently relations (28) and (29).

In the case, when the spatial distribution of maximal value squares of the magnetic induction in the air gap of non symmetrical induction engines is given from measurements of peak values of the induction field along the circumference of the machine, the particular spatial harmonics of positive- and negative-sequence components are calculated from the set of equations (28) and (29) for the assigned maximal number of computed harmonics, determined by the measurement accuracy of the maximal field value.