

Piotr ZASTAWNIK

Instytut Elektroniki
Politechniki Śląskiej

ANALIZA NUMERYCZNA MODELU MATEMATYCZNEGO PODSTAWOWEGO UKŁADU "CEWKA STYKOWA - MATERIAŁ BADANY" W KONDUKTOMETRII WIROPRAĐOWEJ

Streszczenie. Przedstawiono analizę możliwości wykorzystania prądów wirowych do badania ośrodków metalicznych o zmiennej konduktywności. Zakładając harmoniczne wymuszenie prądowe rozwiązano równanie Helmholtza, znaleziono rozkład przestrzenny pola magnetycznego i obliczono zmianę impedancji cewki pomiarowej wywołaną obecnością w pobliżu cewki przewodzącego ośrodka. Przeprowadzono analizę numeryczną uzyskanej zależności wynikowej.

THE NUMERICAL ANALYSIS OF A MATHEMATICAL MODEL OF THE BASIC "CONSTANT COIL - TEST MATERIAL" SYSTEM IN EDDY-CURRENT CONDUCTIVITY MEASUREMENTS

Summary. Analysis of possibilities of the application of eddy currents in test for metallic media with varying conductivity is presented. Assuming harmonic current excitation Helmholtz equation is solved, spatial distribution of magnetic field has been found and the changes in impedance of measuring coil caused by the presence of conducting media are calculated. Numerical analysis of the resulting relationship is performed.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СХЕМЫ "КОНТАКТНАЯ КАТУШКА-ИССЛЕДУЕМЫЙ МАТЕРИАЛ" В ВИХРЕТОКОВОЙ КОНДУКТOMETРИИ

Резюме. В статье представлен анализ возможности использования вихревых токов для испытаний металлических сред с переменной проводимостью. Предлагая гармоническое токовое возбуждение решено уравнение Гельмгольца, найдено пространственное распределение магнитного поля и вычислено изменение импеданса измерительной катушки вызванное присутствием проводящей среды. Проведен численный анализ полученной зависимости.

1. WPROWADZENIE

Podstawowym teoretycznym zagadnieniem współczesnych zastosowań techniki wiroprądowej w badaniach nieniszczących jest znalezienie jednoznacznych funkcji ujmujących zależności zmian składowych impedancji stykowej cewki pomiarowej od elektrycznych, magnetycznych i geometrycznych wielkości, związanych z obiektem, jakim najczęściej jest metalowy, badany przedmiot. Wspomniane wielkości są parametrami tych funkcji, argumentem zaś jest najczęściej częstotliwość pomiarowa.

W pracy przedstawiono wyniki analizy numerycznej modelu matematycznego dla szczególnego przypadku, będącego syntezą wariantów zbadanych wcześniej. Przypadkiem tym jest ośrodek o nierównomiernym rozkładzie konduktywności w głąb jego poprzecznego przekroju.

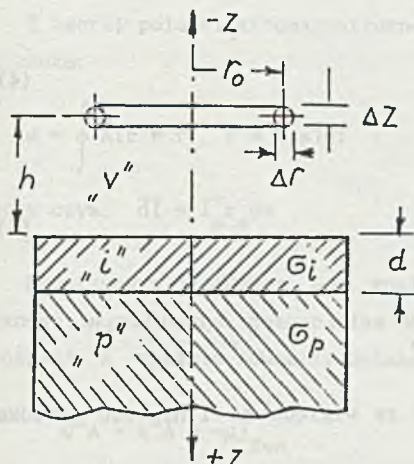
Praca jest fragmentem szerszej problematyki związanej z badaniami prowadzonymi w Zakładzie Podstaw Elektroniki Instytutu Elektroniki Politechniki Śląskiej i dotyczącej wykorzystania techniki wiroprądowej w przemysłowym miernictwie elektronicznym.

W Zakładzie Podstaw Elektroniki Politechniki Śląskiej w Gliwicach od kilku lat prowadzone są prace nad wykorzystaniem w miernictwie różnych wielkości fizycznych zjawiska prądów wirowych. Na podstawie wybranych modeli prowadzona jest teoretyczna analiza numeryczna zjawiska, a następnie wyprowadzone są wnioski dotyczące wyboru optymalnego algorytmu i opracowywane są założenia konstrukcyjne aparatury pomiarowej. W ten sposób w ostatnich latach stworzony został przyrząd do pomiaru konduktywności grubej, przewodzącej, nieferromagnetycznej płyty oparty na metodzie automatycznego doboru częstotliwości sinusoidalnego prądu zasilającego stykową cewkę pomiarową. Jednocześnie równolegle prowadzone prace teoretyczne pozwoliły stworzyć algorytm pomiaru grubości cienkiej, przewodzącej, nieferromagnetycznej folii. Podstawowym problemem we wszystkich przypadkach jest znalezienie jednoznacznych funkcji ujmujących zależność zmian impedancji cewki od parametrów elektrycznych, magnetycznych i geometrycznych elementów wchodzących w skład systemu pomiarowego. Wspomniane wielkości są parametrami tych funkcji, argumentem zaś jest najczęściej częstotliwość pomiarowa. W niniejszym artykule przedstawiono wyniki analizy numerycznej modelu matematycznego przypadku będącego syntezą wariantów zbadanych dotychczas.

Zajmliemy się najprostszy ośrodkiem o nierównomiernym rozkładzie konduktywności w głąb poprzecznego przekroju ośrodka.

2. MODEL MATEMATYCZNY

Rozpatrzmy przypadek przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1. Konfiguracja przestrzenna układu "cewka stykowa - materiał o niejednorodnej przewodności"

Fig. 1. Spatial configuration of the system: "contact coil - non-homogenous conductivity material"

Ośrodkami są linowe, izotropowe i nieferromagnetyczne, tzn. spełniające między innymi warunek $\mu_r \approx 1$. Dla tak zdefiniowanego modelu należy wyznaczyć zmianę impedancji cewki $\Delta Z = \text{Re}(\Delta Z) + j\text{Im}(\Delta Z)$, związaną z umieszczeniem w jej pobliżu przewodzącego ośrodka. Wynika stąd, że

$$\Delta Z = Z - Z_0 \tag{2}$$

gdzie:

- Z_0 - impedancja cewki, znacznie oddalonej od przewodzących ośrodków;
- Z - impedancja cewki umieszczonej w pobliżu ośrodka, jak przedstawiono na rys. 1.

Kołowa, jednozwojowa cewka o promieniu r_0 , nawinięta drutem o przekroju prostokątnym o bokach Δr i Δz i zerowej rezystancji jest zasilana prądem harmonicznym:

$$i(t) = I_m \sin \omega t \tag{1}$$

lub w postaci symbolicznej:

$$i(t) = I_m e^{j\omega t} = \sqrt{2} I e^{j\omega t} \tag{1a}$$

gdzie:

I - oznacza zespoloną skuteczną wartość prądu, tzn. $I = |I| e^{j\theta}$.

Wspomniana cewka umieszczona jest w odległości h od powierzchni badanego ośrodka, złożonego z warstwy przewodzącej o przewodności σ_i i grubości d oraz przewodzącej półprzestrzeni o przewodności σ_p . Obydwa

Wiadomo, że:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} \quad (3)$$

oraz

$$U(t) = \sqrt{2} |U| e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad (4)$$

Z drugiej strony:

$$U(t) = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5)$$

gdzie:

ψ - oznacza strumień skojarzony z cewką.

Prąd wymuszający jest harmoniczny, więc ze względu na liniowość ośrodka będzie również:

$$\psi = \psi_m e^{j\omega t} \quad (6)$$

więc

$$U(t) = j\omega \psi_m e^{j\omega t} \quad (7)$$

lub

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot j\omega \psi_m \quad (8)$$

Wartość zespolona strumienia skojarzonego ψ_m uzależniona jest od przestrzennego rozkładu pola magnetycznego wyrażonego np. za pomocą potencjału wektorowego \vec{A} . Symetria osłowa rozpatrywanego układu wskazuje, że najwygodniej jest znaleźć rozkład pola w cylindrycznym układzie odniesienia. Ogólnie można stwierdzić, że dla prądu opisanego zależnością (1a) będzie:

$$\vec{A} = \left[\vec{I}_r A_r(r, z, \varphi) + \vec{I}_z A_z(r, z, \varphi) + \vec{I}_\varphi A_\varphi(r, z, \varphi) \right] e^{j\omega t} \quad (9)$$

gdzie:

r, z, φ - współrzędne w wybranym układzie,

A_r, A_z, A_φ - zespolone amplitudy składowych wektora \vec{A} .

Z teorii pola elektromagnetycznego wiadomo, że dla strumienia skojarzonego z cewką:

$$\psi = \oint \vec{A}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, z = 0, \varphi) d\vec{l} \quad (10)$$

przy czym: $d\vec{l} = \vec{l}_\varphi r_0 d\varphi$

Podstawowym problemem jest znalezienie przestrzennego rozkładu pola opisanego magnetycznym potencjałem wektorowym \vec{A} . Dla wymuszeń harmonicznym rozkład \vec{A} spełnia równanie Helmholtza:

$$\nabla^2 A + k^2 A = -\mu \vec{j}_{zew} \quad (11)$$

gdzie współczynnik propagacji k może być określony jako:

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma \quad (12)$$

Pierwszy składnik równania (12) jest związany z prądem przesunięcia, natomiast drugi z prądem przewodzenia. W przypadku dobrych przewodników prąd przesunięcia można praktycznie pominąć, wówczas:

$$k = \sqrt{-j\omega \mu \sigma} = \sqrt{-j\omega \mu_r \mu_0 \sigma} \quad (12a)$$

gdzie:

μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni,

μ_r - względna przenikalność ośrodka.

We wszystkich rozważanych dalej przypadkach μ oznaczać będzie przenikalność magnetyczną ośrodków.

Równanie (11) rozwiążemy w cylindrycznym układzie współrzędnych.

Ponieważ

$$\vec{j}_{zew} = \vec{l}_\varphi \cdot j_{zew} \quad (13)$$

będzie również

$$\vec{\lambda} = \vec{1}_{\varphi} A(z, r) \quad (14)$$

tzn. $A_r = A_z = 0$.

Równaniu wektorowemu (11) odpowiada więc, w związku z (13) i (14), równanie skalarne:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \lambda + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} + k^2 \lambda = -\mu \cdot J_{zew} \quad (15)$$

Do rozwiązania równania (15) wykorzystamy przekształcenie całkowe Hankela, zdefiniowane następująco:

$$f^*(\gamma) = H_m[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) t J_m(\gamma t) dt \quad (16)$$

W równaniu (16) funkcja f^* zmiennej przekształcenia (operatora) γ jest obrazem funkcji $f(t)$ w przekształceniu Hankela m -tego rzędu (tzn. uwzględniającego funkcję Bessela $J_m(x)$ m -tego rzędu pierwszego rodzaju). Jeżeli przyjmiemy $m = 1$ oraz $t = r$ i dokonamy operacji zdefiniowanej zależnością (16) - na obu stronach równania (15) - wówczas otrzymamy:

$$-\gamma^2 A^*(z, \gamma) + \frac{d^2 A^*(\gamma, z)}{dz^2} + k^2 A^*(z, \gamma) = -\mu \cdot J_{zew}^*(z, \gamma) \quad (17)$$

Oznaczając

$$q^2 = \gamma^2 - k^2 \quad (18)$$

otrzymujemy z kolei:

$$\frac{d^2 A^*(\gamma, z)}{dz^2} - q^2 A^*(\gamma, z) = \mu_V J_{zew}^*(\gamma, z) \quad (19)$$

Równanie (19) powinno opisywać potencjał A^* w obszarach "V", "I", "p" o różnych właściwościach (rys. 1), należy więc je zastąpić zestawem trzech równań:

$$\frac{d^2 A_V^*(\gamma, z)}{dz^2} - q_V^2 A_V^*(\gamma, z) = \mu_V J_{zew}^*(\gamma, z) \quad (20)$$

$$\frac{d^2 A_1^* (\gamma, z)}{dz^2} - q_1^2 A_1^* (\gamma, z) = 0 \quad (21)$$

$$\frac{d^2 A_p^* (\gamma, z)}{dz^2} - q_p^2 A_p^* (\gamma, z) = 0 \quad (22)$$

Ponieważ rozpatrujemy ośrodki nieferromagnetyczne ($\mu_{rv} = \mu_{r1} = \mu_{rp} \approx 1$), zgodnie z (18), można zapisać:

$$q_v = \gamma \quad (23)$$

$$q_1 = \sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_1} \quad (24)$$

$$q_p = \sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_p} \quad (25)$$

W celu znalezienia rozwiązania równania (19) należy wyznaczyć wielkość $J_{zew}^* (\gamma, z)$. Zgodnie z definicją (16)

$$J_{zew}^* (\gamma, z) = \int_0^{\infty} j_{zew} (r, z) r J_1 (\gamma, r) dr \quad (26)$$

Korzystając z dystrybucji $1(x)$ oraz $\delta(x)$ można zauważyć, że

$$j_{zew} (r, z) = \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{I}{\Delta r \cdot \Delta z} \left[1(r-r_0) - 1(r-r_0-\Delta r) \right] \left[1(z) - 1(z-\Delta z) \right]$$

czyli

$$j_{zew} (r, z) = I \delta(r - r_0) \delta(z) \quad (27)$$

przy czym: I - oznacza zespoloną wartość prądu w cewce $I = |I| e^{j\theta_1}$. Wstawiając (27) do (26) oraz wykorzystując jedną z właściwości delty Diraca $\delta(t)$:

$$\int_a^b f(x) \delta(x - c) dx = f(c) \quad \text{dla} \quad a < c < b \quad (28)$$

otrzymujemy:

$$J_{zew}^* (\gamma, z) = I r_0 J_1 (\gamma r_0) \delta(z) \quad (29)$$

Całki ogólne jednorodnych równań (20)-(22) można wyrazić wzorami:

$$A_v^*(\gamma, z) = C_1 e^{-q_v z} + C_2 e^{q_v z} \quad (30)$$

$$A_1^*(\gamma, z) = C_3 e^{-q_1 z} + C_4 e^{q_1 z} \quad (31)$$

$$A_p^*(\gamma, z) = C_5 e^{-q_p z} + C_6 e^{q_p z} \quad (32)$$

Równanie (20) jest równaniem niejednorodnym, którego całkę ogólną znajdziemy stosując do równania (30) metodę uzmienniania stałych. W celu znalezienia $C_1(z)$ oraz $C_2(z)$ korzystamy z układu równań:

$$\frac{dC_1(z)}{dz} = \frac{\mu_v}{2q_v} j_{zew}^*(z) e^{q_v z} \quad (33)$$

$$\frac{dC_2(z)}{dz} = -\frac{\mu_v}{2q_v} j_{zew}^*(z) e^{q_v z} \quad (34)$$

a więc np.

$$C_1(z) = \frac{\mu_v}{2q_v} \int_h^z j_{zew}^*(\theta) e^{q_v \theta} d\theta + C_{1a} \quad (35)$$

$$C_2(z) = -\frac{\mu_v}{2q_v} \int_h^z j_{zew}^*(\theta) e^{q_v \theta} d\theta + C_{2a} \quad (36)$$

Ostatecznie:

$$A_v^*(\gamma, z) = \left[\frac{\mu_v}{2q_v} \int_h^z j_{zew}^*(\theta) e^{q_v \theta} d\theta + C_{1a} \right] e^{-q_v z} + \left[-\frac{\mu_v}{2q_v} \int_h^z j_{zew}^*(\theta) e^{q_v \theta} d\theta + C_{2a} \right] e^{q_v z} \quad (37)$$

Znalezienie całek szczególnych w równaniach (20)-(22) wymaga określenia wartości sześciu stałych: C_{1a} , C_{2a} , C_3 , C_4 , C_5 , C_6 .

Skorzystamy tu z fizycznych warunków brzegowych i granicznych znanych z teorii pola elektromagnetycznego:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A_V^*(\gamma, z) = 0 \quad (38)$$

$$\frac{1}{\mu_p} \cdot \frac{dA_p^*(\gamma, z = h)}{dz} = \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{dA_1^*(\gamma, z = h)}{dz} \quad (39)$$

$$A_V^*(\gamma, z = h) = A_1^*(\gamma, z = h) \quad (40)$$

$$\frac{1}{\mu_p} \cdot \frac{dA_p^*(\gamma, z=h+d)}{dz} = \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{dA_1^*(\gamma, z=h+d)}{dz} \quad (41)$$

$$A_1^*(\gamma, z = h+d) = A_p^*(\gamma, z = h+d) \quad (42)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A_V^*(\gamma, z) = 0 \quad (43)$$

Względniając warunek (38) oraz równanie (37) obliczamy stałą C_{1a} .
Ponieważ $h > 0$, więc na podstawie (28) otrzymamy

$$C_{1a} = \frac{\mu_1}{2q_v} \text{Ir}_0 J_1(\gamma r_0) \quad (44)$$

Analogicznie na podstawie (43) i (32) znajdujemy

$$C_6 = 0 \quad (45)$$

Względniając wyniki dotychczasowych rozwiązań możemy zapisać odpowiednio:

$$-C_{2a} e^{q_v h} + C_3 e^{-q_1 h} + C_4 e^{q_1 h} = C_{1a} e^{-q_v h} \quad (46)$$

$$\frac{q_v}{\mu_v} C_{2a} e^{q_v h} + \frac{q_1}{\mu_1} C_3 e^{-q_1 h} - \frac{q_1}{\mu_1} C_4 e^{q_1 h} = \frac{q_v}{\mu_v} C_{1a} e^{-q_v h} \quad (47)$$

$$C_3 e^{-q_1(h+d)} + C_4 e^{q_1(h+d)} - C_5 e^{-q_p(h+d)} = 0 \quad (48)$$

$$-\frac{q_1}{\mu_1} C_3 e^{-q_1(h+d)} + \frac{q_1}{\mu_1} C_4 e^{q_1(h+d)} + \frac{q_p}{\mu_p} C_5 e^{-q_p(h+d)} = 0 \quad (49)$$

Równania (46)-(49) reprezentują układ liniowy, który najłatwiej można rozwiązać metodą wyznaczników. Wyznacznik główny tego układu wynosi:

$$W = \left[\left(-\frac{q_1 q_p}{\mu_1 \mu_p} - \frac{q_v q_p}{\mu_v \mu_p} - \frac{q_1 q_v}{\mu_1 \mu_v} - \frac{q_1^2}{\mu_1^2} \right) e^{q_1 d} + \left(-\frac{q_1 q_p}{\mu_1 \mu_o} - \frac{q_v q_1}{\mu_v \mu_1} + \frac{q_p q_v}{\mu_p \mu_v} + \frac{q_1^2}{\mu_1^2} \right) e^{-q_1 d} \right] (q_v - q_p) h - q_p d \neq 0 \quad (50)$$

Zgodnie z wcześniejszymi wnioskami, należy teraz wyznaczyć rozkład \vec{A} w przestrzeni "v" (rys. 1). W tym celu wystarczy znaleźć stałą C_{2a} w równaniu (37). Po obliczeniu odpowiedniego wyznacznika dla układu równań (46)-(49) otrzymamy:

$$C_{2a} = \frac{\left(\frac{q_1 q_p}{\mu_1 \mu_p} - \frac{q_v q_p}{\mu_v \mu_p} - \frac{q_1 q_v}{\mu_1 \mu_v} + \frac{q_1^2}{\mu_1^2} \right) e^{q_1 d} + \left(\frac{q_1 q_p}{\mu_1 \mu_p} - \frac{q_1 q_v}{\mu_1 \mu_v} + \frac{q_p q_v}{\mu_p \mu_v} - \frac{q_1^2}{\mu_1^2} \right) e^{-q_1 d}}{\left(-\frac{q_1 q_p}{\mu_1 \mu_p} - \frac{q_v q_p}{\mu_v \mu_p} - \frac{q_1 q_v}{\mu_1 \mu_v} - \frac{q_1^2}{\mu_1^2} \right) e^{q_1 d} + \left(-\frac{q_1 q_p}{\mu_1 \mu_p} - \frac{q_1 q_v}{\mu_1 \mu_v} + \frac{q_p q_v}{\mu_p \mu_v} + \frac{q_1^2}{\mu_1^2} \right) e^{-q_1 d}} \cdot C_{1a} e^{-2q_v h} \quad (51)$$

Warto w tym miejscu wykorzystać założenia upraszczające przyjęte we wstępie, a więc uwzględnić fakt, że mamy do czynienia z ośrodkami nieferromagnetycznymi, tzw. $\mu_1 \approx \mu_v \approx \mu_p \approx \mu_o$ (gdzie μ_o - przenikalność magnetyczną próżni). Dodatkowo po uwzględnieniu zależności (23)-(25) otrzymamy

$$C_{2a} = C_{1a} c(\gamma) e^{-2h\gamma} \quad (52)$$

przy czym $C(\gamma)$ będzie wyrażona jako:

$$C(\gamma) = \frac{\left(\sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_p} + \sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_1}\right) \left(\sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_1} - \gamma\right) e^{2d\sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_1}}}{\left(\sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_p} - \sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_1}\right) \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_1}\right) -} + \frac{\left(\sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_p} - \sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_1}\right) \left(\sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_1} + \gamma\right)}{\left(\sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_p} + \sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_1}\right) \left(\sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_1} + \gamma\right) e^{2d\sqrt{\gamma^2 + j\omega\mu_0\sigma_1}}}$$
(53)

Po obliczeniu stałej C_{2a} możliwe jest wyznaczenie rozkładu potencjału wektorowego:

$$A_V(r, z) = \int_0^{\infty} A_V^*(\gamma, z) \gamma J_1(\gamma r) d\gamma$$
(54)

oraz zespolonej wartości strumienia skojarzonego z cewką wg zależności (10)

$$\psi = \int_0^{2\pi} A_V(r = r_0, z = 0) r_0 d\phi \Big] e^{j\omega t}$$

czyli:

$$\psi = 2\pi r_0 A_V(r = r_0, z = 0) e^{j\omega t}$$
(55)

Można więc, korzystając z praw rachunku całkowego, zapisać:

$$\psi = \left[2\pi r_0 \int_0^{\infty} A_V^*(\gamma, z = 0) \gamma J_1(\gamma r_0) d\gamma \right] e^{j\omega t}$$
(56)

Obliczmy wartość $A_V^*(\gamma, z = 0)$ korzystając z zależności (37), (44) oraz (29).

Otrzymamy:

$$A_V^*(\gamma) = C_{1a} \int_h^0 \delta(\theta) e^{\gamma\theta} d\theta + C_{1a} - C_{1a} \int_h^0 \delta(\theta) e^{-\gamma\theta} d\theta + C_{2a}$$

zaś po uporządkowaniu i uwzględnieniu (52)

$$A_v^*(\gamma) = C_{1a} \left[1 + c(\gamma) e^{-2\gamma h} \right] \quad (57)$$

Wstawiając (57) do (56) znajdujemy

$$\psi = \left[2\pi r_0 \int_0^{\infty} C_{1a} \left[1 + c(\gamma) e^{-2\gamma h} \right] \gamma J_1(\gamma r_0) d\gamma \right] e^{j\omega t} \quad (58)$$

Zależność (58) oraz wyrażenie (8) umożliwia obliczenie zespolonej wartości napięcia indukowanego w cewce:

$$U = j2\pi\omega r_0 \int_0^{\infty} C_{1a} \left[1 + c(\gamma) e^{-2\gamma h} \right] \gamma J_1(\gamma r_0) d\gamma \quad (59)$$

lub w innej postaci:

$$U = U_1 + U_2, \quad (60)$$

gdzie:

$$U_1 = j2\pi\omega r_0 \int_0^{\infty} C_{1a} \gamma J_1(\gamma r_0) d\gamma \quad (61)$$

zaś

$$U_2 = j2\pi\omega r_0 \int_0^{\infty} C_{1a} c(\gamma) e^{-2\gamma h} \gamma J_1(\gamma r_0) d\gamma \quad (62)$$

W zależności (60) składnik U_1 reprezentuje wartość napięcia indukowanego w cewce umieszczonej z dala od jakichkolwiek przewodzących ośrodków, natomiast U_2 reprezentuje wpływ obecności obszarów "i" oraz "p". Ściśle biorąc, należałoby więc oznaczyć U_2 jako ΔU .

W zależności (62) wynikają również następujące wnioski:

1) właściwości geometryczne cewki, liczba zwojów, wartość prądu są uwzględnione w stałej C_{1a} określonej zależnością (44);

2) właściwości przewodzące ośrodka uwzględniające między innymi rozkład konduktywności, reprezentuje funkcja $c(\gamma)$, którą otrzymuje się po rozwiązaniu układu równań powstałego po uwzględnieniu odpowiednich warunków granicznych.

Końcowy rezultat rozwiązań przyjmuje postać:

$$\Delta Z = \frac{\Delta U}{I} \quad (63)$$

czyli na podstawie wyrażeń (44). (62):

$$\Delta Z = j \Pi r_o^2 \omega \mu_o \int_0^{\infty} c(\gamma) e^{-2\gamma h} J_1^2(\gamma r_o) d\gamma \quad (64)$$

Wielkość $c(\gamma)$ jest reprezentowana przez wyrażenie (53).

3. ANALIZA NUMERYCZNA MODELU MATEMATYCZNEGO

3.1. Algorytmy wykorzystywne w analizie numerycznej

Końcowy rezultat analizy modelu matematycznego (zależność (64)) stanowi punkt wyjścia do dalszych prac prowadzących do pewnych praktycznych wniosków, możliwych do wykorzystania w badaniach wiroprowadowych. Wspomniane zależności stanowią złożoną funkcję zespoloną zmiennych rzeczywistych. Ze względu na całkę niewłaściwą występującą we wzorze (64) problem ogólnego, jasnego przedstawienia wyniku staje się bardziej skomplikowany, możliwa jest zatem tylko jego analiza numeryczna z wykorzystaniem techniki komputerowej.

W analizie numerycznej bardzo celowe jest korzystanie z pewnych uogólnionych parametrów, abstrahując od konkretnych wielkości fizycznych.

Wprowadźmy w równaniu (53) następujące wielkości pomocnicze:

$$\beta_1 = r_o \sqrt{\omega \mu_o \sigma_1} \quad (65)$$

$$\beta_p = r_o \sqrt{\omega \mu_o \sigma_p} \quad (66)$$

$$s = \frac{\sigma_p}{\sigma_1} = \frac{\beta_p^2}{\beta_1^2} \quad (67)$$

$$\alpha_v = \frac{2h}{r_o} \quad (68)$$

$$\alpha_1 = \frac{2d}{r_0} \quad (69)$$

$$\lambda = \frac{\gamma}{\sqrt{\omega \mu_0 \sigma_1}} \quad (70)$$

Korzystając z równania (70) możemy wyznaczyć zmienną γ i wstawić ją do równania (53) otrzymując:

$$c(\gamma) = c_1(\lambda) = \frac{\left(\sqrt{\lambda^2 + js} + \sqrt{\lambda^2 + j}\right) \left(\sqrt{\lambda^2 + j} - \lambda\right) e^{\alpha_1 \beta_1 \sqrt{\lambda^2 + j}}}{\left(\sqrt{\lambda^2 + js} + \sqrt{\lambda^2 + j}\right) \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 + j}\right) -} + \frac{\left(\sqrt{\lambda^2 + js} + \sqrt{\lambda^2 + j}\right) \left(\sqrt{\lambda^2 + j} + \lambda\right)}{\left(\sqrt{\lambda^2 + js} + \sqrt{\lambda^2 + j}\right) \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 + j}\right) -} e^{\alpha_1 \beta_1 \sqrt{\lambda^2 + j}} \quad (71)$$

Podobny zabieg pozwala przekształcić wzór (64). Otrzymamy wówczas:

$$\Delta Z = j\pi\omega r_0 \mu_0 \beta_1 \int_0^{\infty} C_1(\lambda) e^{-\alpha_1 \beta_1 \lambda} J_1^2(\beta_1 \lambda) d\lambda \quad (72)$$

Kładąc $s = 1$ otrzymujemy zależność określającą zmiany impedancji cewki dla ośrodka jednorodnego o konduktywności σ_1 . Dla przypadku $s = 1$ znajdujemy funkcję $C_2(\lambda)$ odpowiadającą funkcji $C_1(\lambda)$ we wzorze (71), w następującej postaci:

$$C_2(\lambda) = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + j}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j}} \quad (73)$$

W rezultacie więc, odpowiednio otrzymamy

$$\Delta Z_j = j\pi\omega r_0 \mu_0 \beta_1 \int_0^{\infty} C_2(\lambda) e^{-\alpha_1 \beta_1 \lambda} J_1^2(\beta_1 \lambda) d\lambda \quad (74)$$

Obliczenie numeryczne funkcji (72) i (74) wymaga przede wszystkim znalezienia optymalnego algorytmu całkowania numerycznego. Jak wynika ze wzorów

(72) i (74), wykonać należy całkowanie funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej. Dla wyrażenia (72) funkcją podcałkową jest

$$f(\lambda) = C_1(\lambda) e^{-\alpha \sqrt{\beta_1} \lambda} J_1^2(\beta_1 \lambda) \quad (75)$$

W wyrażeniu tym mamy dwa czynniki rzeczywiste: funkcję eksponencjalną i funkcję Bessela pierwszego rodzaju, pierwszego rzędu oraz czynnik zespolony $c_1(\gamma)$.

W obliczeniach numerycznych całkę:

$$I_0 = \int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda \quad (76)$$

przybliżamy szeregiem:

$$I_0 \approx \tilde{I}_0 = \sum_{k=0}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} f(\lambda) d\lambda \quad (77)$$

popelniając przy tym błąd względny absolutny:

$$\varepsilon = \frac{|\tilde{I}_0 - I_0|}{|I_0|} \quad (78)$$

Jeżeli ciąg $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_{n+1}$ będzie składał się z wyrazów zdefiniowanych tak, że

$$\lambda_k = \frac{x_k}{\beta_1} \quad (79)$$

gdzie x_k - k-te miejsce zerowe funkcji $J_1(x)$, to szereg będzie szeregiem naprzemiennym, a więc

$$\varepsilon \approx \frac{\left| \int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_{n+2}} f(\lambda) d\lambda \right|}{\left| \sum_{k=0}^n \int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_{n+2}} f(\lambda) d\lambda \right|} \quad (80)$$

Można również wyznaczyć względny błąd ϵ jako:

$$\epsilon = \max \left[\frac{\operatorname{Re}(\tilde{I}_0) - \operatorname{Re}(I_0)}{\operatorname{Re}(I_0)}, \frac{\operatorname{Im}(\tilde{I}_0) - \operatorname{Im}(I_0)}{\operatorname{Im}(I_0)} \right] \quad (81)$$

Wyrażenie (81) jest konsekwencją faktu, że całka (76) jest wielkością zespoloną. W obliczeniach praktycznych wygodniejszy w zastosowaniu jest wzór (81), co oznacza, że w obliczeniach takich przyjmuje się wartość n z wyrażenia (77) tak, aby:

$$\max \left[\frac{\operatorname{Re}(\vartheta)}{\operatorname{Re}(\tilde{I}_0)}, \frac{\operatorname{Im}(\vartheta)}{\operatorname{Im}(\tilde{I}_0)} \right] \leq \epsilon \quad (82)$$

gdzie:

$$\vartheta = \int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_{n+2}} f(\lambda) d\lambda \quad (83)$$

Dla najczęściej spotykanych wartości parametrów przy $\epsilon \approx 0,01$ przyjmowano $n = 5$.

Obliczenie poszczególnych składników szeregu

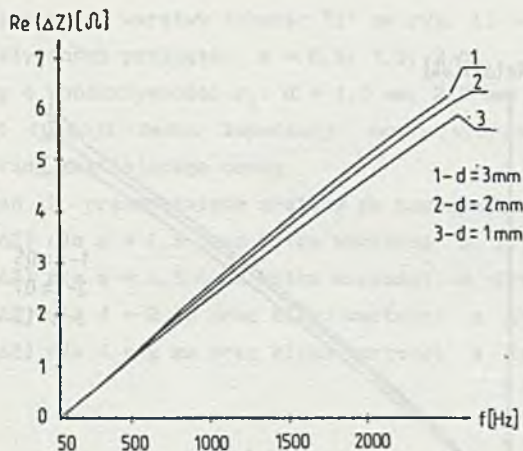
$$X_k = \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} f(\lambda) d\lambda \quad (84)$$

wykonywano korzystając z metody Romberga, będącej rozszerzeniem złożonej metody trapezów.

3.2. Obliczenia numeryczne wartości zmian impedancji cewki

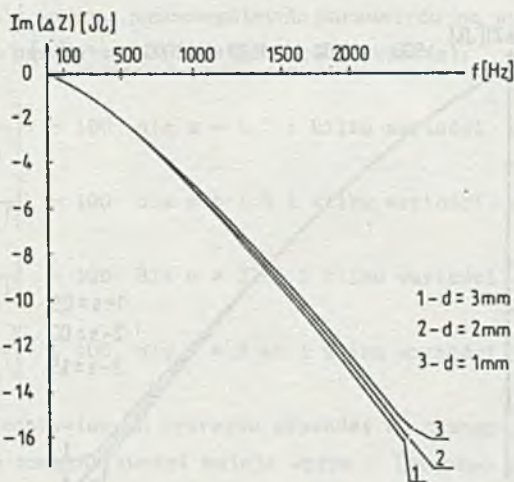
Procedury numeryczne opisane w punkcie 3.1 zostały wykorzystane do stworzenia programu obliczającego zmiany składowych impedancji cewki dla wybranych parametrów:

- promień cewki $r_0 = 1$ cm;
- cewka zawiera na swoim obwodzie $n = 250$ zwojów;
- odległość cewki od powierzchni próbki $h = 0,5$ mm;



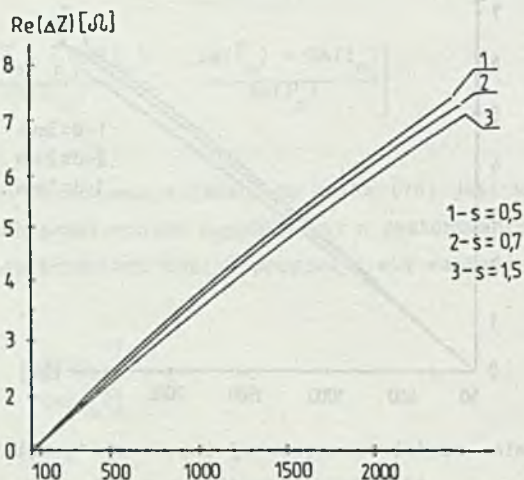
Rys. 2. Wykres zmian części rzeczywistej impedancji cewki w funkcji częstotliwości prądu dla $s = 1,5$

Fig. 2. Graph of changes of real part for coil impedance as a function of current frequency for $s = 1,5$



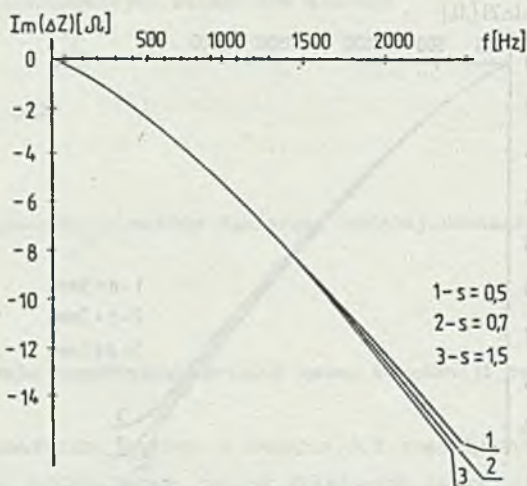
Rys. 3. Wykres zmian części urojonej impedancji cewki w funkcji częstotliwości prądu dla $s = 1,5$

Fig. 3. Graph of changes of imaginary part for coil impedance as a function of current frequency for $s = 1,5$



Rys. 4. Wykres zmian części rzeczywistej impedancji cewki w funkcji częstotliwości prądu dla $d = 2$ mm

Fig. 4. Graph of changes of real part for coil impedance as a function of current frequency for $d = 2$ mm



Rys. 5. Wykres zmian części urojonej impedancji cewki w funkcji częstotliwości prądu dla $d = 2$ mm

Fig. 5. Graph of changes of imaginary part for coil impedance as a function of current frequency for $d = 2$ mm

- konduktywność pierwszej warstwy (obszar "1" na rys. 1) $\sigma_1 = 35 \frac{MS}{m}$;
- stosunek konduktywności przyjęto: $s = 0,5; 1,5; 2,0$;
- grubość warstwy o konduktywności σ_1 : $d = 1,0 \text{ mm}; 2,0 \text{ mm}; 3,0 \text{ mm}$.

Jako argument funkcji zmian impedancji cewki wybrano częstotliwość f sinusoidalnego prądu zasilającego cewkę.

Wyniki obliczeń Z przedstawione zostały na następujących wykresach:

- 1) wartości $\text{Re}(\Delta Z)$ dla $s = 1,5$ oraz kilku wartości d (rys. 2);
- 2) wartości $\text{Im}(\Delta Z)$ dla $s = 1,5$ oraz kilku wartości d (rys. 3);
- 3) wartości $\text{Re}(\Delta Z)$ dla $d = 2 \text{ mm}$ oraz kilku wartości s (rys. 4);
- 4) wartości $\text{Im}(\Delta Z)$ dla $d = 2 \text{ mm}$ oraz kilku wartości s (rys. 5).

4. WNIOSKI

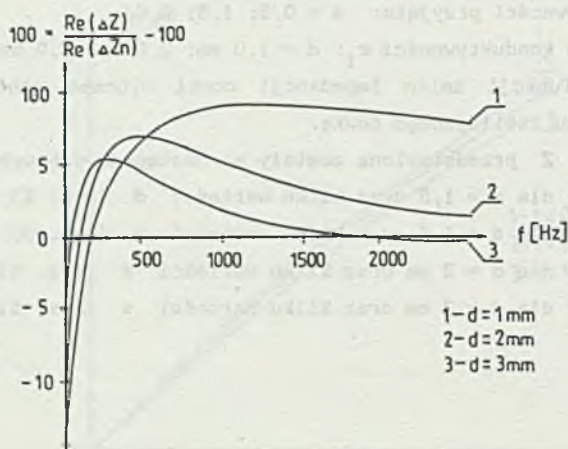
Z wstępnej analizy otrzymanych wykresów wynika, że w przedstawionych zależnościach trudno jest w jednoznaczny sposób zróżnicować wpływ parametrów d i s na wynik pomiaru. Praktyczne wnioski dotyczące wykorzystania wyników analizy numerycznej modelu przedstawionego na rys. 1 daje przedstawienie ilorazu zmian impedancji ΔZ do zmian impedancji ΔZ_n tej samej cewki umieszczonej w odległości h od jednorodnego ośrodka o konduktywności σ_1 . W celu uwydatnienia różnic wpływu poszczególnych parametrów na wynik końcowy na kolejnych wykresach przedstawiono następujące zależności:

- 1) $100 \frac{\text{Re}(\Delta Z)}{\text{Re}(\Delta Z_n)}$ - 100 dla $s = 1,5$ i kilku wartości d (rys. 6);
- 2) $100 \frac{\text{Im}(\Delta Z)}{\text{Im}(\Delta Z_n)}$ - 100 dla $s = 1,5$ i kilku wartości d (rys. 7);
- 3) $100 \frac{\text{Re}(\Delta Z)}{\text{Re}(\Delta Z_n)}$ - 100 dla $d = 2 \text{ mm}$ i kilku wartości s (rys. 8);
- 4) $100 \frac{\text{Im}(\Delta Z)}{\text{Im}(\Delta Z_n)}$ - 100 dla $d = 2 \text{ mm}$ i kilku wartości s (rys. 9).

Porównanie przedstawionych wykresów prowadzi do następujących wniosków:

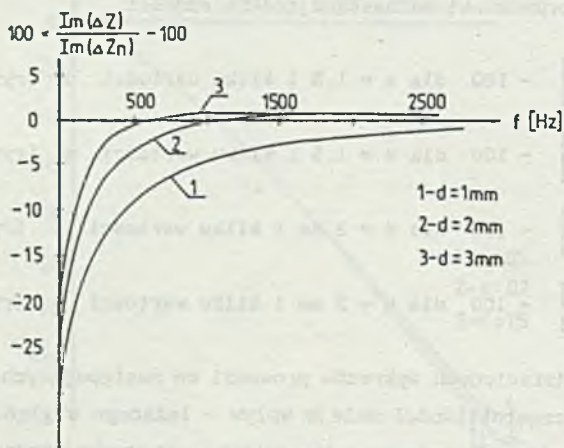
1) ze wzrostem częstotliwości maleje wpływ - leżącego w głębi - obszaru o przewodności σ_p ; jest to związane, oczywiście, ze zmniejszającą się głębokością wnikania prądów wirowych przy wzroście częstotliwości;

2) dla części rzeczywistej istnieje pewna częstotliwość, dla której $\frac{\text{Re}(\Delta Z)}{\text{Re}(\Delta Z_n)} = 1$; wartość tej częstotliwości zależy praktycznie przede wszystkim od wartości d , czyli grubości górnej warstwy przewodzącej;



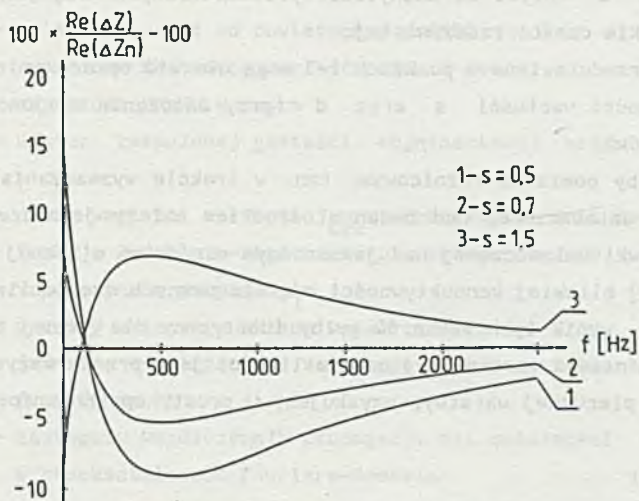
Rys. 6. Wykres względnych zmian rezystancji zastępczej, cewki w funkcji częstotliwości prądu dla $s = 1,5$

Fig. 6. Graph of relative changes of substitutional coil resistance as a function of current frequency for $s = 1,5$



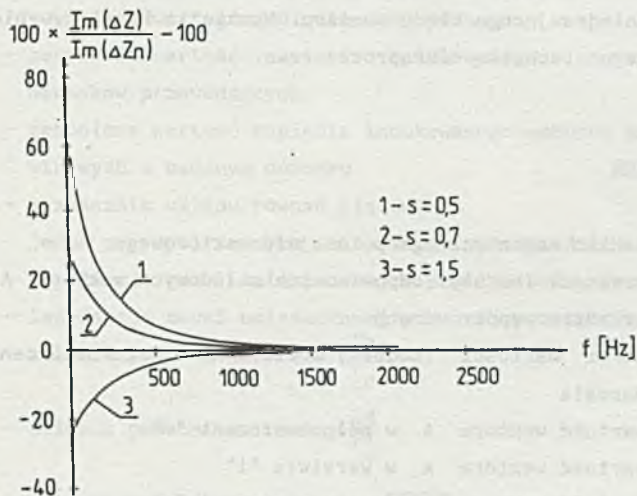
Rys. 7. Wykres względnych zmian reaktancji cewki w funkcji częstotliwości prądu dla $s = 1,5$

Fig. 7. Graph of relative changes of coil reactance as a function of current frequency for $s = 1,5$



Rys. 8. Wykres względnych zmian rezystancji zastępczej, cewki w funkcji częstotliwości prądu dla $d = 2 \text{ mm}$

Fig. 8. Graph of relative changes of coil substitutional resistance as a function of current frequency for $d = 2 \text{ mm}$



Rys. 9. Wykres względnych zmian reaktancji cewki w funkcji częstotliwości prądu dla $d = 2 \text{ mm}$

Fig. 9. Graph of relative changes of coil reactance as a function of current frequency for $d = 2 \text{ mm}$

3) wartość s wpływa na nachylenie przedstawionych krzywych, dotyczy to przede wszystkim części rzeczywistej.

Sugestie przedstawione w punktach 1-3 mogą ułatwić opracowanie efektywnego pomiaru wielkości wartości s oraz d (przy założeniu znajomości pozostałych parametrów).

Pomiar byłby pomiarem różnicowym, tzn. w trakcie wyznaczania zmian impedancji cewki umieszczonej nad badanym ośrodkiem należy jednocześnie znaleźć impedancję cewki umieszczonej nad jednorodnym ośrodkiem o znanej konduktywności, najlepiej bliskiej konduktywności σ_1 . Dla pewnych częstotliwości charakterystycznych wynik tych pomiarów byłby identyczny dla jednej ze składowych impedancji. Ponieważ wartość tej częstotliwości jest przede wszystkim funkcją grubości d pierwszej warstwy, uzyskujemy w prosty sposób informację o wartości d .

Reasumując:

- zapewniając w trakcie badań stałą wartość odległości cewek (pomiarowej i odniesienia) od powierzchni próbek oraz znaną wartość konduktywności odniesienia można, wykorzystując funkcje częstotliwościowe zmian impedancji tych cewek, zróżnicować wpływ grubości warstwy d oraz wpływ konduktywności podłoża σ_p na kształt otrzymanych krzywych. Wiąże się to jednak z problemem stabilizacji parametrów przyjmowanych za stałe lub opracowania algorytmu zmniejszającego błędy pomiaru. Wymaga to konstruowanie przyrządów wykorzystujących technikę mikroprocesorową.

SPIS OZNACZEŃ

- A - wektor magnetycznego potencjału wektorowego
- A_r, A_z, A_φ - wartości (moduły) odpowiednich składowych wektora A w walcowym układzie współrzędnych
- A - obraz wartości (moduły) wektora A w przekształceniu Fouriera-Bessela
- A_v - wartość wektora A w półprzestrzeni "v"
- A_1 - wartość wektora A w warstwie "1"
- A_p - wartość wektora A w półprzestrzeni "p"
- $C_1, C_{1a}, C_2, C_{2a}, C_3, C_4, C_5$ - stałe całkowania
- $c(\gamma), c_2(\lambda)$ - funkcje pomocnicze (zespolone) uwzględniające właściwości badanych ośrodków
- d - grubość warstwy o konduktywności σ_1

- f - częstotliwość prądu w cewce
 h - odległość cewki od powierzchni próbki
 I - zespolona skuteczna wartość prądu w cewce
 I_m - amplituda prądu w cewce
 J_{zew} - wektor zespolonej gęstości objętościowej prądu wymuszającego w cewce
 J_{zew}^* - obraz wartości wektora J_{zew} w przekształceniu Fouriera-Bessela
 $J_m(\dots)$ - funkcja Bessela m -tego rzędu pierwszego rodzaju
 k - współczynnik propagacji
 l_r, l_z, l_φ - wersory walcowego układu współrzędnych
 r - jedna ze współrzędnych walcowego układu odniesienia
 r_o - promień cewki
 q - zastępczy współczynnik propagacji dla zależności rozpatrywanych w przekształceniu Fouriera-Bessela
 q_v - zastępczy współczynnik propagacji dla półprzestrzeni "v"
 q_1 - zastępczy współczynnik propagacji dla warstwy powierzchniowej o grubości d
 q_p - zastępczy współczynnik propagacji dla półprzestrzeni "p"
 s - stosunek konduktywności podłoża i warstwy powierzchniowej
 t - czas
 U - zespolona wartość napięcia indukowanego w cewce
 U_1 - zespolona wartość napięcia indukowanego w cewce oddalonej od ośrodków przewodzących
 U_2 - zespolona wartość napięcia indukowanego wskutek przepływu prądów wirowych w badanym ośrodku
 W - wyznacznik układu równań liniowych
 z - jedna ze współrzędnych walcowanego układu odniesienia
 Z - impedancja cewki umieszczonej w pobliżu badanego ośrodka
 Z_o - impedancja cewki umieszczonej w wolnej przestrzeni
 α_v - zmienna pomocnicza równa $\frac{2h}{r_o}$
 α_1 - zmienna pomocnicza równa $\frac{2d}{r_o}$
 β_1 - zmienna pomocnicza równa $r_o \sqrt{\omega \mu_o \sigma_1}$
 β_p - zmienna pomocnicza równa $r_o \sqrt{\omega \mu_o \sigma_p}$
 γ - operator przekształcenia Fouriera-Bessela

$\delta(\dots)$	- dystrybucja Diraca
Δ	- przyrost wybranej zmiennej
ϵ	- przenikalność dielektryczna ośrodka (bezwzględna)
ϵ	- błąd względny obliczeń
ϕ_i	- faza początkowa prądu w cewce
ϕ_u	- faza początkowa napięcia na zaciskach cewki
ϕ_z	- argument (faza) impedancji cewki
λ	- zmienna pomocnicza (całkowania)
μ	- przenikalność magnetyczna bezwzględna ośrodka
μ_0	- przenikalność magnetyczna bezwzględna próżni
μ_r	- przenikalność magnetyczna względna ośrodka
μ_v	- przenikalność magnetyczna bezwzględna półprzestrzeni "v"
μ_i	- przenikalność magnetyczna bezwzględna obszaru "i"
μ_p	- przenikalność magnetyczna bezwzględna półprzestrzeni "p"
μ_{rv}	- przenikalność magnetyczna względna obszaru "v"
μ_{ri}	- przenikalność magnetyczna względna obszaru "i"
μ_{rp}	- przenikalność magnetyczna względna obszaru "p"
σ	- konduktywność ośrodka
σ_i	- konduktywność warstwy powierzchniowej
σ_p	- konduktywność podłoża
φ	- jedna ze współrzędnych walcowego układu odniesienia
ψ	- zespolona wartość skuteczna strumienia skojarzonego z cewką
ψ_m	- amplituda zespolona strumienia skojarzonego z cewką
ω	- pulsacja prądu w cewce

LITERATURA

- [1] Zahn M.: Pole elektromagnetyczne. PWN, Warszawa 1989.
- [2] Simankova L.: Mathematical presentation of the impedance variation of a coil. Tesla-Electronics, 1971, nr 4, s. 112-119.
- [3] Fortuna J.: Metody numeryczne. WNT, Warszawa 1985.

Recenzent: Prof. dr hab. Zdzisław PAWŁOWSKI

Wpłynęło do Redakcji w lutym 1990 r.

A b s t r a c t

It has been shown in an experiment that using eddy currents makes it possible to determine some unknown material or dimensional quantities of electrically conducting media by means of some characteristic curves which describe the change in the impedance of a probe coil as a function of supply current frequency. The paper presents the theoretical analysis of the possibility of using the eddy current method for testing materials of variable conductivity. The analysis makes use of a model based on the three-dimensional "coil - test medium" system. Assuming a harmonic current excitation the Helmholtz's equation has been solved, the space distribution of the magnetic field has been determined and the change in the impedance of the coil in the presence of a conductive medium has been calculated. The result is given in the form of a complicated mathematical formula. The numerical analysis of the formula has been carried out to examine the possibility of using frequency-to-impedance-variation curves for measuring the thickness of the conductive surface layer and the conductivity of the base. As a result of the analysis it has been concluded that applying a differential method of measurement makes it possible to diversify the influence of both quantities (thickness, conductivity) on the result of measurement. The reference impedance is in this case the impedance of the coil which is nearing by the same distance a homogenous medium of the conductivity which is approximately equal to the conductivity of the surface layer.