P. 3341/81

ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

AUTOMATYKA

Z. 58
GLIWICE
1981

P. 3341/81

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 690

JERZY KLAMKA

STEROWALNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z OPÓŹNIENIAMI

GLIWICE 1981

CZ.6080

OPINIODAWCY
Prof. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek
Prof. dr inż. Henryk Gorecki

KOLEGIUM REDAKCYJNE
Jan Bandrowski (redaktor naczelny), *Anna Skrzywan-Kosek* (redaktor działu), *Wojciech Mikołajków* (sekretarz redakcji)

OPRACOWANIE REDAKCYJNE
Kazimiera Rymarz

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0760

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 2, 44-100 Gliwice

Nakł. 200+85 Ark. wyd 9,98 Ark. druk. 10 Papier drukowy kl. III 70x100, 100 g
Oddano do druku 9.03.1981 Podpis. do druku 25.05.1981 Druk ukończ. w lipcu 1981
Zamówienie 401/81 Cena zł 25 —

Skład, fotokopię, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

P. 246/81

SPIS TREŚCI

Str.

WSTĘP 5

1. Przegląd problematyki sterowalności układów dynamicznych .. 5
2. Sformułowanie tematyki pracy 7
3. Stosowana terminologia 8

1. STEROWALNOŚĆ LINIOWYCH, CIĄGŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z OPÓŹNIENIAMI W STEROWANIU 10

1.1. Wprowadzenie 10
1.2. Opis układu dynamicznego i podstawowe definicje 11
1.3. Warunki względnej sterowalności 13
1.4. Warunki absolutnej sterowalności 19
1.5. Sterowanie z minimalną energią 22
1.6. Uwagi o sterowalności układów dynamicznych z opóźnieniami w stanie układu 27

2. STEROWALNOŚĆ NIELINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH 30

2.1. Wprowadzenie 30
2.2. Opis układu dynamicznego i podstawowe definicje 32
2.3. Warunki wystarczające sterowalności globalnej 35
2.4. Warunki wystarczające sterowalności lokalnej 41

3. STEROWALNOŚĆ NIELINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z OPÓŹNIENIAMI W STEROWANIU 46

3.1. Wprowadzenie 46
3.2. Opis układu dynamicznego i podstawowe definicje 47
3.3. Warunki względnej globalnej sterowalności 49
3.4. Warunki względnej lokalnej sterowalności 55
3.5. Uwagi o absolutnej, globalnej oraz lokalnej sterowalności 57

4. STEROWALNOŚĆ LINIOWYCH, CIĄGŁYCH, NIESKOŃCZENIE WYMIAROWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z OPÓŹNIENIAMI W STEROWANIU 59

4.1. Wprowadzenie oraz oznaczenia 59
4.2. Opis układu dynamicznego i podstawowe definicje 61
4.3. Warunki względnej aproksymacyjnej sterowalności 63
4.4. Warunki absolutnej aproksymacyjnej sterowalności 68
4.5. Sterowalność w przestrzeniach Hilberta 71

Str.

4.6. Sterowanie z minimalną energią 74
4.7. Uwagi o stabilizowalności oraz o wpływie zakłóceń 80

5. STEROWALNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH, Z OPÓŹNIENIAMI W STEROWANIU 81

5.1. Wprowadzenie 81
5.2. Opis układu dynamicznego 82
5.3. Warunki względnej aproksymacyjnej sterowalności 87
5.4. Warunki absolutnej aproksymacyjnej sterowalności 89
5.5. Względna aproksymacyjna sterowalność jednowymiarowych układów dynamicznych typu parabolicznego 90
5.6. Względna, aproksymacyjna, brzegowa sterowalność jednowymiarowych układów dynamicznych typu parabolicznego 93

6. STEROWALNOŚĆ LINIOWYCH, DYSKRETNYCH, NIESKOŃCZENIE WYMIAROWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z OPÓŹNIENIAMI W STEROWANIU 99

6.1. Wprowadzenie 99
6.2. Opis układu dynamicznego i podstawowe definicje 100
6.3. Warunki względnej aproksymacyjnej sterowalności 101
6.4. Warunki absolutnej aproksymacyjnej sterowalności 106
6.5. Warunki względnej oraz absolutnej dokładnej sterowalności 110
6.6. Sterowanie z minimalną energią 112

7. STEROWALNOŚĆ BILINIOWYCH DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH 116

7.1. Wprowadzenie 116
7.2. Opis układu dynamicznego i przegląd dotychczasowych wyników 117
7.3. Zastosowanie kanonicznej formy Jordana do badania sterowalności 119
7.4. Przykłady 122

WNIOSKI 128

DODATEK 129

WYKAZ OZNACZEŃ 140

LITERATURA 141

STRESZCZENIA 160

W S T Ę P

1. Przegląd problematyki sterowalności układów dynamicznych

Sterowalność układów dynamicznych jest jednym z podstawowych pojęć teorii sterowania. Zagadnienie sterowalności zostało po raz pierwszy wprowadzone przez Roberta E. Kalmana na Kongresie IFAC w Moskwie w 1960 r. [156]. W ciągu dwudziestu lat, jakie upłynęły od tego czasu, nastąpił burzliwy rozwój teorii sterowalności, o czym najlepiej świadczy ilość prac naukowych na ten temat, opublikowanych w literaturze światowej.

Chronologicznie rzecz ujmując, przegląd problematyki sterowalności należy rozpocząć od liniowych, ciągłych, skończenie wymiarowych układów dynamicznych. Teoria sterowalności dla tych układów jest stosunkowo najlepiej i najpełniej opracowana. Wynika to z jednej strony z prostoty opisu matematycznego tych układów, a z drugiej strony - z częstego wykorzystywania ich do opisu zjawisk fizycznych.

Spośród wielu definicji różnych rodzajów sterowalności, sformułowanych dla liniowych ciągłych, skończenie wymiarowych układów dynamicznych, najczęściej wykorzystywana jest definicja sterowalności w określonym przedziale czasu, na bazie której zbudowane są definicje sterowalności w danej chwili czasu, całkowitej sterowalności w danej chwili czasu oraz całkowitej sterowalności w dowolnej chwili czasu [8], [40], [153], [199], [337], [355]. W pracach [8], [40], [41], [42], [43], [152], [153], [156], [157], [158], [199], [258], [337], [353], [355] podano szereg kryteriów badania różnych rodzajów sterowalności, przy czym kryteria te zależą w istotny sposób od gładkości współczynników występujących w równaniu różniczkowym, opisującym dany układ dynamiczny. W przypadku stacjonarnych układów dynamicznych do otrzymania warunków sterowalności można wykorzystać kanoniczną formę Jordana tych układów [40], [43], [56], [167], [170], [258], [355].

Wprowadza się także pojęcia regularnej oraz selektywnej sterowalności [4], [152], [153], [357]. Regularna sterowalność oznacza, że układ dynamiczny jest sterowalny ze względu na każdą ze składowych wektora sterowań. Jest oczywiste, że układ dynamiczny regularnie sterowalny jest również sterowalny, natomiast wniosek odwrotny jest fałszywy. Selektywna sterowalność, [357], oznacza sterowalność wybranej grupy współrzędnych wektora stanu ze względu na wybraną grupę składowych wektora sterowań. Regularna sterowalność implikuje selektywną sterowalność, ale nie na odwrót, układ selektywnie sterowalny nie musi być sterowalny, a tym bardziej regularnie sterowalny.

W przypadku gdy dane jest algebraiczne równanie wyjścia układu dynamicznego, wówczas rozpatruje się także tak zwaną sterowalność wyjściową układu dynamicznego, której kryteria zawarte są w publikacjach [19], [23], [40], [117], [250].

Warunki sterowalności złożonych układów dynamicznych (połączenia równoległe, szeregowe, sprzężenia zwrotne) sformułowano w następujących pracach: [39], [40], [42], [70], [78], [168], [169], [174], [267], [350], [351].

Zagadnienia sterowalności przy ograniczeniach nałożonych na sterowanie rozważane są w publikacjach [25], [26], [40], [134], [194], [294], [295], a dla wymuszeń stochastycznych w pracach [83], [149], [150], [151]. Natomiast własności zbiorów osiągalnych badane są w pracach [3], [247].

Przy założeniu sterowalności liniowego, ciągłego, skończenie wymiarowego układu dynamicznego można efektywnie rozwiązać zagadnienie sterowania z minimalną energią z zadanego stanu początkowego do zadanego stanu końcowego [40]. Wykorzystując tzw. macierz sterowalności można wyznaczyć analityczną postać sterowania z minimalną energią oraz podać minimalną wartość energii, odpowiadającą temu sterowaniu [40]. Kryterium minimalizacji energii sterowania okazało się również bardzo przydatne przy określaniu pewnych miar sterowalności oraz związanej z tym klasyfikacji sterowalnych układów dynamicznych [213], [214], [251], [252].

Ponieważ w praktyce parametry układów dynamicznych podlegają zakłóceniom, a ponadto są wyznaczane w procesie identyfikacji jedynie w sposób przybliżony, wobec tego istotne znaczenie posiada zbadanie wpływu zmian parametrów układów dynamicznych na ich sterowalność. W pracy [59] wykazano, że zbiór wszystkich liniowych, ciągłych, skończenie wymiarowych układów dynamicznych, posiadających cechę sterowalności, jest gęsty i otwarty (w odpowiednio zdefiniowanej topologii) w zbiorze wszystkich układów dynamicznych tego typu. Innymi słowy oznacza to, że małe perturbacje parametrów układu dynamicznego nie wpływają na jego sterowalność. Praca [59] zawiera również szereg innych, bardziej precyzyjnych rezultatów dotyczących tej problematyki, która w odniesieniu do układów dynamicznych stacjonarnych była rozpatrywana w pracach [48], [207], gdzie uzyskano podobne wyniki. Wykorzystując te rezultaty, w publikacji [170] zdefiniowano tak zwany zapas sterowalności stacjonarnego układu dynamicznego, rozumiany jako odległość (w odpowiednio zdefiniowanej przestrzeni euklidesowej) danego układu dynamicznego od najbliższego niesterowalnego układu dynamicznego.

W stacjonarnych układach dynamicznych często się zdarza, że niektóre parametry układu są identycznościowo równe zeru i nie podlegają żadnym fluktuacjom. Właściwość ta jest najczęściej wynikiem wewnętrznej struktury danego stacjonarnego układu dynamicznego. Przyjmując, że układy dynamiczne o tych samych wymiarach mają tę samą strukturę, jeżeli zerują się odpowiadające sobie parametry, można wprowadzić definicję tak zwanej struk-

turalnej sterowalności [210]. Stacjonarny układ dynamiczny nazywa się strukturalnie sterowalnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje sterowalny układ dynamiczny o tej samej strukturze. Warunki konieczne i wystarczające strukturalnej sterowalności zamieszczone są w następujących publikacjach: [57], [68], [118], [210], [211], [302]. Warunki te bazują na teorii grafów oraz kanonicznych postaciach stacjonarnych, ciągłych, skończenie wymiarowych układów dynamicznych.

Z pojęciem sterowalności ściśle związana jest problematyka niezmienników układu dynamicznego, podprzestrzeni niezmienniczych, postaci kanonicznych oraz klasyfikacji układów dynamicznych [24], [32], [33], [40], [79], [100], [133], [145], [162], [207], [246], [247], [248], [249], [276], [277], [341], [349].

Zagadnienia związane ze sterowalnością liniowych, ciągłych, skończenie wymiarowych układów dynamicznych są typowe również dla innych klas układów dynamicznych (układy dyskretne, układy z opóźnieniami, układy nieskończenie wymiarowe, układy nieliniowe). Tym niemniej, każda z wymienionych powyżej klas układów dynamicznych posiada pewne dodatkowe, specyficzne dla danej klasy zagadnienia związane ze sterowalnością. Ponieważ ich dokładniejsze omówienie wymaga operowania dodatkową terminologią oraz bardziej precyzyjnym opisem matematycznym, wobec tego zostaną one przedstawione w poszczególnych rozdziałach niniejszej pracy. Obszerny przegląd problematyki sterowalności układów dynamicznych znajdzie Czytelnik w publikacji [358].

2. Sformułowanie tematyki pracy

W literaturze poświęconej zagadnieniu sterowalności brak było dotychczas kryteriów sterowalności dla pewnych klas układów dynamicznych. Stąd zasadniczym celem niniejszej pracy jest sformułowanie nowych, oryginalnych warunków różnych rodzajów sterowalności dla następujących klas układów dynamicznych:

1) liniowych układów dynamicznych z rozłożonymi i skupionymi opóźnieniami w sterowaniu,
2) nieliniowych, niestacjonarnych układów dynamicznych bez opóźnień,
3) nieliniowych, niestacjonarnych układów dynamicznych ze skupionymi opóźnieniami w sterowaniu,
4) liniowych, nieskończenie wymiarowych, ciągłych układów dynamicznych ze skupionymi opóźnieniami w sterowaniu,
5) liniowych, stacjonarnych układów dynamicznych o parametrach rozłożonych, opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego, ze skupionymi opóźnieniami w sterowaniu,
6) liniowych, niestacjonarnych, nieskończenie wymiarowych, dyskretnych układów dynamicznych z wielokrotnymi opóźnieniami w sterowaniu,

7) biliniowych, dyskretnych, skończenie wymiarowych układów dynamicznych bez opóźnień.

Oprócz kryteriów sterowalności rozpatrzono problematykę sterowania z minimalną energią układami dynamicznymi wymienionymi w punktach 1, 4 oraz 6, podając analityczną postać sterowania z minimalną energią oraz wzór na obliczenie minimalnej wartości energii odpowiadającej temu sterowaniu. Uzyskane rezultaty otrzymano w oparciu o tzw. **macierz sterowalności** lub operator sterowalności, bez konieczności stosowania klasycznych metod teorii optymalizacji (rachunek wariacyjny, zasada maksimum Pontriagina,funkcja kary). Prostota otrzymanych wyników jest konsekwencją liniowości problemu, odpowiednio dobranego wskaźnika jakości oraz założenia sterowalności odpowiedniego układu dynamicznego.

Wszystkie zawarte w niniejszej pracy rezultaty są opublikowane w pracach Autora, przy czym, ponieważ poszczególne podrozdziały w zasadzie pokrywają się z odpowiednimi publikacjami, po tytule podrozdziału podany jest numer właściwej publikacji. W związku z tym nie ma potrzeby każdroazowego cytowania danej publikacji we wszystkich twierdzeniach i wnioskach danego podrozdziału.

3. Stosowana terminologia

W pracy użyto powszechnie stosowanej symboliki i terminologii,spotykanej w większości monografii z dziedziny teorii sterowania (np. [153], [337], [335]). Sybmole i pojęcia, (szczególnie z dziedziny analizy funkcjonalnej), rzadziej spotykane w literaturze teorii sterowania, a więc mogące sprawić trudności Czytelnikowi, zostały dokładniej omówione w tekście pracy,a ponadto dodatkowo wyszczególnione w wykazie oznaczeń, zamieszczonym na końcu pracy.

Każdy rozdział pracy zawiera podrozdział poświęcony wyłącznie omówieniu stosowanej w nim symboliki oraz podaniu podstawowych definicji, właściwych dla danej klasy układów dynamicznych. W zasadzie stosowane symbole są obowiązujące w danym rozdziale. Ponieważ zwyczajowo pewne wielkości są oznaczane z góry przyjętymi symbolami, więc może się tak zdarzyć,że ten sam symbol w różnych rozdziałach będzie oznaczał tę samą jakościowo wielkość, lecz wyrażoną nieco inną zależnością matematyczną, związaną ze specyfiką danego układu dynamicznego (np. macierz sterowalności oraz operator sterowalności są zwyczajowo oznaczane tym samym symbolem).

Ponieważ w literaturze często stosuje się różne nazwy dla tego samego rodzaju sterowalności, w pracy przyjęto zasadę, aby używać nazwy najbardziej popularnej (dotyczy to między innymi takich pojęć, jak całkowita lub totalna sterowalność). W niektórych przypadkach podawane jest w nawiasie alternatywne nazewnictwo (np. funkcyjna lub absolutna sterowalność).

Praca jest podzielona na siedem rozdziałów, odpowiadających tematycznie punktom wyszczególnionym w podrozdziale 2. Poszczególne rozdziały są podzielone na podrozdziały. Numeracja wszystkich twierdzeń,wniosków, uwag oraz poszczególnych wzorów i relacji jest trójczłonowa i składa się z numeru rozdziału, podrozdziału oraz numeru kolejnego w danym podrozdziale.

R O Z D Z I A Ł 1

STEROWALNOŚĆ LINIOWYCH, CIĄGŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z OPÓŹNIENIAMI W STEROWANIU

1.1. Wprowadzenie

Problematyka sterowalności dla układów dynamicznych z opóźnieniami jest szczególnie rozległa, a literatura dotycząca tego zadadnienia jest wyjątkowo obszerna. Spowodowane jest to zarówno różnorodnością rozpatrywanych układów dynamicznych (opóźnienia skupione, rozłożone, opóźnienia w stanie, w sterowaniu, układy dynamiczne neutralne), jak i różnorodnością metod stosowanych do rozwiązywania tych zagadnień.

Oddzielną klasę układów dynamicznych z opóźnieniami stanowią układy dynamiczne liniowe, ciągłe, skończenie wymiarowe, z opóźnieniami w sterowaniu. Pierwsze prace rozpatrujące sterowalność tych układów dotyczyły stacjonarnych układów dynamicznych ze skupionymi, stałymi w czasie opóźnieniami w sterowaniu [11], [56], [297]. Sterowalność niestacjonarnych układów dynamicznych ze stałymi, skupionymi opóźnieniami w sterowaniu omawiania była w pracach [261], [298], natomiast ze zmiennymi, skupionymi opóźnieniami w pracach [175], [177], [180], [181], [182], a z rozłożonym opóźnieniem w publikacjach [165], [178], [181].

Praca [225] dotyczy względnej sterowalności niestacjonarnych układów dynamicznych ze stałymi opóźnieniami w stanie i w sterowaniu, natomiast w pracy [221] sformułowano warunki wystarczające względnej sterowalności stacjonarnych układów dynamicznych z rozłożonymi opóźnieniami w stanie oraz w sterowaniu.

Sterowalność układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu wiąże się ściśle z problematyką sterowania minimalno-energetycznego tymi układami. Zagadnienia te są omawiane w pracach [176], [177], [178], [180], [181], [182].

W niniejszym rozdziale zostaną sformułowane warunki konieczne i wystarczające różnych rodzajów sterowalności dla niestacjonarnych, liniowych, skończenie wymiarowych układów dynamicznych ze skupionymi oraz rozłożonymi opóźnieniami w sterowaniu. Warunki te uzyskano w oparciu o odpowiednio zdefiniowaną macierz względnej sterowalności, która wykorzystywana jest równocześnie do rozwiązania zagadnienia sterowania minimalno-energetycznego rozpatrywanymi układami dynamicznymi. Omówione zostaną również pewne

przypadki szczególne dotyczące układów z wielokrotnymi, skupionymi opóźniemiami w sterowaniu.

1.2. Opis układu dynamicznego i podstawowe definicje [177], [178], [180], [181], [182]

Niech będzie dany liniowy, ciągły, skończenie wymiarowy układ dynamiczny ze skupionymi oraz rozłożonymi opóźnieniami w sterowaniu, opisany następującym równaniem różniczkowym:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} B_i(t)u(v_i(t)) + \int_{-h}^{0} B(t,s)u(t+s)ds \qquad (1.2.1)$$

spełnionym prawie wszędzie w przedziale $[t_0,t_1]$, $(t_0 < t_1)$, gdzie:

$x(t) \in R^n$ - wektor stanu chwilowego,

$A(t)$ jest $n \times n$ - wymiarową macierzą, której elementy są mierzalnymi oraz ograniczonymi funkcjami czasu w przedziale $[t_0,t_1]$.

$$B(\cdot,s) \in L_2([t_0,t_1], \mathcal{L}_{np})$$

$$B(t,\cdot) \in L_2([-h,0], \mathcal{L}_{np})$$

$$B_i(\cdot) \in L_2([t_0,t_1], \mathcal{L}_{np}), \text{ dla } i = 0,1,2,\ldots,M$$

$\mathcal{L}_{np}$ - zbiór $n \times p$ - wymiarowych macierzy o elementach rzeczywistych $v_i : [t_0,t_1] \to R$, $i = 0,1,2,\ldots,M$, są absolutnie ciągłymi, silnie rosnącymi funkcjami, określonymi w przedziale $[t_0,t_1]$ oraz spełniającymi następujące nierówności

$$(t-h) \leqslant v_M(t) < v_{M-1}(t) < \ldots < v_i(t) < \ldots < v_1(t) < v_0(t) \leqslant t, \quad t \in [t_0,t_1] \qquad (1.2.2)$$

$$u(\cdot) \in L_1([t_0-h,t_1], R^p)$$

Funkcje $v_i(t)$, $i = 0,1,2,\ldots,M$, reprezentujące przesunięcie argumentu w sterowaniu, mogą być także przedstawione w następującej postaci:

$$v_i(t) = t - h_i(t), \quad i = 0,1,2,\ldots,M, \quad t \in [t_0,t_1] \qquad (1.2.3)$$

gdzie $h_i(t) \geqslant 0$, $i = 0,1,2,\ldots,M$ są zmiennymi w czasie opóźnieniami sterowania.

Ponieważ funkcje $v_i(t)$ są ściśle rosnące, więc można zdefiniować funkcje do nich odwrotne $r_i(t) : [v_i(t_0), v_i(t_1)] \to [t_0,t_1]$, $i = 0,1,2,\ldots,M$, określone następującą równością:

$$r_i(v_i(t)) = t, \quad i = 0,1,2,\ldots,M, \quad t \in [t_0,t_1] \tag{1.2.4}$$

Dla funkcji $u(\cdot) \in L_1([t_0 - h,t_1], R^p)$ symbol u_t oznacza funkcję określoną w przedziale $[-h,0)$ oraz zdefiniowaną następująco: $u_t(s) = u(s)$, dla $s \in [t-h,t)$, $t \in [t_0,t_1]$.

W przypadku układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu oprócz stanu chwilowego $x(t) \in R^n$ wprowadza się także pojęcie tzw. stanu zupełnego w chwili t, $z_t = \{x(t),u_t\}$, [11], [56], [165], [220], [222], [261].

W związku z tym dla układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu rozróżnia się dwa podstawowe rodzaje sterowalności - sterowalność względną oraz sterowalność absolutną, [11], [56], [165], [220], [222], [261].

Definicja 1.2.1. Układ dynamiczny (1.2.1) nazywa się układem względnie sterowalnym w przedziale $[t_0,t_1]$, jeżeli dla każdego początkowego stanu zupełnego z_{t_0} oraz każdego wektora $x_1 \in R^n$ istnieje sterowanie $u \in L_1([t_0,t_1], R^p)$ takie, że odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria $x(t,z_{t_0},u)$ układu dynamicznego (1.2.1) spełnia następujący warunek:

$$x(t_1,z_{t_0},u) = x_1 \tag{1.2.5}$$

Definicja 1.2.2. Układ dynamiczny (1.2.1) nazywa się układem absolutnie sterowalnym w przedziale $[t_0,t_1]$, $(t_0 < t_1-h)$, jeżeli dla każdego początkowego stanu zupełnego $z_{t_0} = \{x(t_0),u_{t_0}\}$ oraz każdego końcowego stanu zupełnego $z_{t_1} = \{x_1,u_{t_1}\}$ istnieje sterowanie $u \in L_1([t_0,t_1],R^p)$, takie że $u(s) = u_{t_1}(s)$ dla $s \in [t_1-h,t_1)$ oraz odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria $x(t,z_{t_0},u)$ układu dynamicznego (1.2.1), spełnia następujący warunek:

$$x(t_1,z_{t_0},u) = x_1 \tag{1.2.6}$$

Z powyższych definicji wynika, że absolutna sterowalność w przedziale $[t_0,t_1]$ implikuje względną sterowalność w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego (1.2.1).

W przypadku gdy $B(t,s) \equiv 0$ dla $(t,s) \in [t_0,t_1] \times [-h,0]$, tzn. brak jest w układzie rozłożonego opóźnienia w sterowaniu, otrzymuje się układ dynamiczny z wielokrotnymi, zmiennymi w czasie, skupionymi opóźnieniami w sterowaniu, opisany następującym równaniem:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} B_i(t)u(v_i(t)) \qquad t \in [t_0,t_1] \qquad (1.2.7)$$

W przypadku wielokrotnych, skupionych stałych opóźnień w sterowaniu otrzymuje się układ dynamiczny opisany następującym równaniem:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} B_i(t)u(t-h_i) \qquad t \in [t_0,t_1] \qquad (1.2.8)$$

Dla stałych opóźnień $(v_i(t) = t - h_i,\ i = 0,1,2,\ldots,M)$ funkcje odwrotne $r_i(t)$ mogą być przedstawione w postaci:

$$r_i(t) = t + h_i, \quad i = 0,1,2,\ldots,M, \qquad t \in [t_0-h,t_1-h] \qquad (1.2.9)$$

Uwaga 1.2.1. W pracy [178] rozpatrywano nieco szerszą klasę układów dynamicznych, a mianowicie układy dynamiczne, w których sterowanie wyznaczało miarę całkowania w całce typu Lebesque'a-Stieltjesa. Przy założeniu braku części osobliwej w sterowaniu przypadek ten jest równoważny układowi dynamicznemu (1.2.1).

1.3. Warunki względnej sterowalności [180], [181]

Zasadniczym celem niniejszego podrozdziału będzie sformułowanie warunków koniecznych i wystarczających względnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego (1.2.1). W tym celu należy najpierw wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego (1.2.1). Wiadomo, [11], [220], [222], że przy zadanym początkowym stanie zupełnym z_{t_0}, rozwiązanie $x(t,z_{t_0},u)$ równania różniczkowego (1.2.1), odpowiadające sterowaniu $u \in L_1([t_0,t_1],R^r)$, można przedstawić w następującej formie:

$$x(t,z_{t_0},u) = F(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(t,\xi) \sum_{i=0}^{i=M} B_i(\xi)u(v_i(\xi))d\xi +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} F(t,\xi)\left[\int_{-h}^{0} B(\xi,s)u(\xi+s)ds\right]d\xi. \qquad (1.3.1)$$

gdzie $F(t,t_0)$ jest macierzą tranzycji równania różniczkowego jednorodnego [40], [153], [258]. Dla $t = t_1$ relacja (1.3.1) może być przedstawiona w postaci:

$$x(t_1,z_{t_0},u) = F(t_1,t_0)x(t_0) + \sum_{i=0}^{i=M} \int_{v_i(t_0)}^{v_i(t_1)} F(t_1,r_i(\tau))B_i(r_i(\tau))\dot{r}_i(\tau)u(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} F(t_1,\tau)\left[\int_{-h}^{0} B(\tau,s)u(\tau+s)ds\right]d\tau \qquad (1.3.2)$$

Bez utraty ogólności można założyć, że $t_0 = v_m(t_1)$, gdzie $m \leq M$. Wartości sterowania $u(t)$ dla $t < t_0$ wchodzę do określenia początkowego stanu zupełnego z_{t_0}. W celu ich odseparowania należy zauważyć, że pierwsza całka we wzorze (1.3.2) da się przekształcić następująco:

$$\sum_{i=0}^{i=M} \int_{v_i(t_0)}^{v_i(t_1)} F(t_1,r_i(\tau))B_i(r_i(\tau))\dot{r}_i(\tau)u(\tau)d\tau =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=m} \int_{t_0}^{v_i(t_1)} F(t_1,r_i(\tau))B_i(r_i(\tau))\dot{r}_i(\tau)u(\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=m} \int_{v_i(t_0)}^{t_0} F(t_1,r_i(\tau))B_i(r_i(\tau))\dot{r}_i(\tau)u_{t_0}(\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{i=M} \int_{v_i(t_0)}^{v_i(t_1)} F(t_1,r_i(\tau))B_i(r_i(\tau))\dot{r}_i(\tau)u_{t_0}(\tau)d\tau \qquad (1.3.3)$$

Ponadto, zmieniając kolejność całkowania w drugiej całce we wzorze (1.3.2) oraz stosując symetryczne twierdzenia Fubiniego [337, str. 123] uzyskuje się następujące zależności:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t_1,\tau)\left[\int_{-h}^{0} B(\tau,s)u(\tau+s)ds\right]d\tau = \int_{-h}^{0}\left[\int_{t_0}^{t_1} F(t_1,\tau)B(\tau,s)u(\tau+s)d\tau\right]ds =$$

$$= \int_{-h}^{0}\left[\int_{t_0+s}^{t_1+s} F(t_1,t-s)B(t-s,s)u(t)dt\right]ds =$$

$$= \int_{-h}^{0}\left[\int_{t_0+s}^{t_0} F(t_1,t-s)B(t-s,s)u_{t_0}(t)dt\right]ds +$$

$$+ \int_{-h}^{0}\left[\int_{t_0}^{t_1+s} F(t_1,t-s)B(t-s,s)u(t)dt\right]ds \qquad (1.3.4)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\bar{B}(t,s) = \begin{cases} B(t,s), \text{ dla } t \in [t_0,t_1], & s \in [-h,0] \\ 0 \qquad \text{dla } t > t_1 & s \in [-h,0] \end{cases} \qquad (1.3.5)$$

można ostatnią całkę we wzorze (1.3.4) przekształcić w sposób następujący:

$$\int_{-h}^{0}\left[\int_{t_0}^{t_1+s} F(t_1,t-s)B(t-s,s)u(t)dt\right]ds = \int_{-h}^{0}\left[\int_{t_0}^{t_1} F(t_1,t-s)\bar{B}(t-s,s)u(t)dt\right]ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{-h}^{0} F(t_1,t-s)\bar{B}(t-s,s)ds\right]u(t)dt \qquad (1.3.6)$$

Wykorzystując zależności (1.3.2), (1.3.3), (1.3.4) oraz (1.3.6) wartość rozwiązania równania (1.2.1) w chwili $t = t_1$ można przedstawić jako sumę dwóch składowych

$$x(t_1,z_{t_0},u) = x(t_1,z_{t_0},0) + x(t_1,0,u) \qquad (1.3.7)$$

gdzie:

$$x(t_1,z_{t_0},0) = F(t_1,t_0)x(t_0) + \sum_{i=0}^{i=m}\int_{v_i(t_0)}^{t_0} F(t_1,r_i(t))B_i(r_i(t))\dot{r}_i(t)u_{t_0}(t)dt +$$

$$+\sum_{i=m+1}^{i=M}\int_{v_i(t_0)}^{v_i(t_1)} F(t_1,r_i(t))B_i(r_i(t))\dot{r}_i(t)u_{t_0}(t)dt +$$

$$+\int_{-h}^{0}\left[\int_{t_0+s}^{t_0} F(t_1,t-s)B(t+s,s)B(t-s,s)u_{t_0}(t)dt\right]ds \qquad (1.3.8)$$

$$x(t_1,0,u)=\sum_{i=0}^{i=m}\int_{t_0}^{v_i(t_1)} F(t_1,r_i(t))B_i(r_i(t))\dot{r}_i(t)u(t)dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{-h}^{0} F(t_1,t-s)\bar{B}(t-s,s)ds\right]u(t)dt \qquad (1.3.9)$$

Składowa $x(t_1,z_{t_0},0)$ zależy wyłącznie od początkowego stanu zupełnego z_{t_0} i nie ma wpływu na względną sterowalność w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego (1.2.1).

Składowa $x(t_1,0,u)$ jest zależna od sterowania $u \in L_1([t_0,t_1], R^p)$ i ma decydujące znaczenie dla względnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego (1.2.1).

Dla skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenia:

$$G_i(t_1,t)=\sum_{j=0}^{j=i}F(t_1,r_j(t))B_j(r_j(t))\dot{r}_j(t) \qquad i=0,1,2,\ldots,M \qquad (1.3.10)$$

$G_i(t_1,t)$, $i=0,1,2,\ldots,M$, są $n \times p$ - wymiarowymi macierzami.

$$\bar{S}(t_1,t)=\int_{-h}^{0} F(t_1,t-s)\bar{B}(t-s,s)ds \qquad (1.3.11)$$

$\bar{S}(t_1,t)$ jest $n \times p$ - wymiarową macierzą.

$$R^n \ni q(z_{t_0},x_1)=x_1-x(t_1,z_{t_0},0) \qquad (1.3.12)$$

$q(z_{t_0}, x_1)$ jest stałym n-wymiarowym wektorem, zależnym od początkowego stanu zupełnego z_{t_0} oraz końcowego stanu chwilowego x_1, do którego należy przeprowadzić układ dynamiczny.

Fundamentalne znaczenie dla dalszych rozważań ma macierz względnej sterowalności $W(t_0,t_1)$, zdefiniowana następującą równością:

$$W(t_0,t_1) = \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \left[\sum_{j=0}^{j=i} F(t_1,r_j(t))B_j(r_j(t))\dot{r}_j(t) + \right.$$

$$\left. + \int_{-h}^{0} F(t_1,t-s)\bar{B}(t-s,s)ds \right] \left[\sum_{j=0}^{j=i} F(t_1,t_j(t))B_j(r_j(t))\dot{r}_j(t) + \right.$$

$$\left. + \int_{-h}^{0} F(t_1,t-s)\bar{B}(t-s,s)ds \right]^T dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t) \right] \left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t) \right]^T dt \qquad (1.3.13)$$

Macierz względnej sterowalności $W(t_0,t_1)$ jest macierzą n x n - wymiarową, symetryczną, półdodatnio określoną, tzn. dla dowolnych wektorów $x \in R^n$ spełnia następujący warunek:

$$x^T W(t_0,t_1)x = \langle x, W(t_0,t_1)x \rangle_{R^n} = \|x\|^2_{W(t_0,t_1)} \geq 0.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\bar{B}_i(t) = \begin{cases} B_i(t), & \text{dla } t \in [t_0,t_i], \ i = 0,1,2,\ldots,M \\ 0 & \text{dla } t > t_i \end{cases} \qquad (1.3.14)$$

$$\bar{G}(t_1,t) = \sum_{i=0}^{i=m-1} F(t_1,r_i(t))\bar{B}_i(r_i(t))\dot{r}_i(t), \quad t \in [t_0,\infty] \qquad (1.3.15)$$

$$\bar{P}(t_1,t) = \bar{G}(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t) \qquad t \in [t_0,\infty] \qquad (1.3.16)$$

można macierz względnej sterowalności $W(t_0,t_1)$ przedstawić w dogodniejszej do dalszych rozważań postaci

$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \bar{P}(t_1,t)\bar{P}(t_1,t)^T dt \qquad (1.3.17)$$

Należy zaznaczyć, że przy założeniach odnośnie do macierzy $A(t), B_i(t)$, $i = 0,1,2,\ldots,M$, $B(t,s)$, uczynionych w podrozdziale 1.2, a także na podstawie relacji (1.3.15) oraz (1.3.16) otrzymuje się, że

$$\bar{G}(t_1,t) \in L_2([t_0,\infty),\mathcal{L}_{np}), \bar{P}(t_1,t) \in L_2([t_0,\infty),\mathcal{L}_{np}).$$

Uwaga 1.3.1. Macierz względnej sterowalności $W(t_0,t_1)$, zdefiniowana równością (1.3.13), jest uogólnieniem na przypadek zmiennych w czasie oraz rozłożonych opóźnień, znanej [298] macierzy względnej sterowalności dla przypadku stałych opóźnień.

Uwaga 1.3.2. Wprowadzenie zapisu (1.3.16) oraz (1.3.17) znacznie upraszcza dowody twierdzeń, gdyż umożliwia skorzystanie z ogólnych własności operatorów liniowych w przestrzeniach Hilberta.

Uwaga 1.3.3. W przypadku braku opóźnień w sterowaniu macierz względnej sterowalności $W(t_0,t_1)$ redukuje się do znanej - [40], [355, str. 513] - macierzy sterowalności liniowego, niestacjonarnego układu dynamicznego.

TWIERDZENIE 1.3.1. Układ dynamiczny (1.2.1) jest względnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd } W(t_0,t_1) = n \qquad (1.3.18)$$

D o w ó d. Wykorzystując zależności (1.3.8), (1.3.9), (1.3.11), (1.3.12) oraz (1.3.16), można równość (1.3.7) zapisać w następującej postaci:

$$q(z_{t_0},x_1) = x(t_1,0,u) = \int_{t_0}^{t_1} \bar{P}(t_1,t)u(t)dt \qquad (1.3.19)$$

Definiuje się liniowy, ograniczony operator $K : L_1([t_0,t_1], R^p) \to R^n$, określony równością

$$L_1([t_0,t_1], R^p) \ni u \to K(u) = \int_{t_0}^{t_1} \bar{P}(t_1,t)u(t)dt \in R^n \qquad (1.3.20)$$

Na podstawie definicji 1.2.1 układ dynamiczny (1.2.1) jest względnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych z_{t_0} oraz x_1 istnieje sterowanie $u \in L_1([t_0,t_1], R^p)$ takie, że zachodzi równość (1.3.19) lub równoważnie, gdy przeciwdziedzina operatora K jest całą przestrzenią R^n. Wiadomo - [84], że przeciwdziedzina operatora K jest całą przestrzenią R^n wtedy i tylko wtedy, gdy symetryczny, skończenie wymiarowy operator $K K^*$ jest dodatnio określony (K^* oznacza operator sprzężony do operatora K). Ponieważ [84]

$$K^* = \bar{S}(t_1,t) + \sum_{j=0}^{j=i} B_j^T(r_j(t))F^T(t_1,r_j(t))\dot{r}_j(t), \text{dla } t \in (v_{i+1}(t_1),v_i(t_1)] \quad i = 0,1,2,\ldots,(m-1) \tag{1.3.21}$$

więc na podstawie zależności (1.3.10), (1.3.11) oraz (1.3.13) zachodzi równość

$$K K^* = W(t_0,t_1) \tag{1.3.22}$$

Ponieważ operator $K K^* : R^n \to R^n$ jest reprezentowany n x n - wymiarową macierzą, więc jego dodatnia określoność jest równoważna jego odwracalności, co z kolei jest równoważne warunkowi (1.3.18). Zatem twierdzenie zostało udowodnione.

Uwaga 1.3.4. Twierdzenie 1.3.1 może być także dowiedzione bez wprowadzenia operatora K, a jedynie w oparciu o pewne rezultaty z teorii macierzy i analizy matematycznej [180], [181], [220], [221], [261].

Uwaga 1.3.5. Twierdzenie 1.3.1 jest uogólnieniem znanych [261], [298] warunków koniecznych i wystarczających względnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układów dynamicznych o stałych opóźnieniach w sterowaniu. Uogólnienie to polega na uwzględnieniu zarówno zmiennych w czasie opóźnień, jak i uwzględnieniu opóźnień rozłożonych.

1.4. Warunki absolutnej sterowalności [181], [182]

Zasadniczym celem niniejszego podrozdziału będzie sformułowanie warunków koniecznych i wystarczających absolutnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego (1.2.1). Zostanie dowiedzione, że absolutna sterowalność w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego (1.2.1) jest równoważna sterowalności pewnego, odpowiednio określonego układu dynamicznego bez opóźnień w sterowaniu. Zgodnie z definicją 1.2.2 w całym niniejszym podrozdziale zakłada się, że $t_0 < t_1 - h$.

TWIERDZENIE 1.4.1. Układ dynamiczny (1.2.1) jest absolutnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ dynamiczny bez opóźnień w sterowaniu o postaci

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t)u(t) \tag{1.4.1}$$

gdzie

$$D(t) = \sum_{i=0}^{i=M} F(t,r_i(t))B_i(r_i(t))\dot{r}_i(t) + \bar{S}(t_1,t) \tag{1.4.2}$$

jest sterowalny w przedziale $[t_0,t_1 - h]$.

D o w ó d. Ponieważ $t_0 < t_1 - h$, więc wykorzystując zależności (1.3.10), (1.3.11) oraz (1.3.12) można relację (1.3.1) przedstawić w następującej postaci:

$$q(z_{t_0},x_1) = \int_{t_0}^{t_1-h}\left[\sum_{i=0}^{i=M} F(t_1,r_i(t))B_i(r_i(t))\dot{r}_i(t) + \bar{S}(t_1,t)\right]u(t)dt +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=M}\int_{t_1-h}^{v_i(t_1)}\left[F(t_1,r_i(t))B_i(r_i(t))\dot{r}_i(t) + \bar{S}(t_1,t)\right]u_{t_1}(t)dt \tag{1.4.3}$$

Ponieważ drugi składnik we wzorze (1.4.3) jest zależny od zadanego sterowania $u(t)$ dla $t \in [t_1-h,t_1]$, więc wprowadzając dodatkowe oznaczenie

$$R^n \ni \bar{q}(z_{t_0},z_{t_1}) = q(z_{t_0},x_1) - \sum_{i=0}^{i=M}\int_{t_1-h}^{v_i(t_1)} F(t_1,r_i(t))B_i(r_i(t))\dot{r}_i(t) +$$

$$+ \bar{S}(t_1,t)\Big]u_{t_1}(t)dt \tag{1.4.5}$$

można równość (1.4.3) zapisać w następującej formie:

$$q(z_{t_0},z_{t_1}) = \int_{t_0}^{t_1-h}\left[\sum_{i=0}^{i=M} F(t_1,r_i(t))B_i(r_i(t))\dot{r}_i(t) + \bar{S}(t_1,t)\right]u(t)dt \tag{1.4.6}$$

Stąd układ dynamiczny (1.2.1) jest absolutnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych z_{t_0} oraz z_{t_1} istnieje $u \in L_1([t_0,t_1-h], R^p)$ takie, że zachodzi równość (1.4.6). Z drugiej strony

powyższe stwierdzenie jest równoważne sterowalności w przedziale $[t_0,t_1-h]$ układu dynamicznego określonego zależnościami (1.4.1) oraz (1.4.2). Zatem twierdzenie zostało dowiedzione.

Wniosek 1.4.1. Układ dynamiczny (1.2.1) jest absolutnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd } \bar{W}(t_0,t_1) = \text{rząd } \int_{t_0}^{t_1-h} F(t_1,t)D(t)D^T(t)F^T(t_1,t)dt = n \qquad (1.4.7)$$

D o w ó d. Warunek (1.4.7) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym sterowalności w przedziale $[t_0,t_1-h]$ układu dynamicznego (1.4.1) [40], [157] [158], [335, str. 513], a zatem na mocy twierdzenia 1.4.1 jest jednocześnie warunkiem koniecznym i wystarczającym absolutnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego (1.2.1).

Wniosek 1.4.2. Układ dynamiczny (1.2.7) jest absolutnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd } \int_{t_0}^{v_M(t_1)} F(t_1,t)\left[\sum_{i=0}^{i=M} F(t_1,r_i(t))B_i(r_i(t))\dot{r}_i(t)\right]$$

$$\left[\sum_{i=0}^{i=M} F(t_1,r_i(t))B_i(r_i(t))\dot{r}_i(t)\right]^T F^T(t_1,t)dt = n \qquad (1.4.8)$$

D o w ó d. Ponieważ dla układu dynamicznego (1.2.7), $B(t,s) = 0$ dla $(t,s) \notin [t_0,t_1] \times [-h,0]$, więc na podstawie (1.4.2) oraz (1.4.7) zachodzi warunek (1.4.8).

Wniosek 1.4.3. Układ dynamiczny (1.2.8) jest absolutnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd } \int_{t_0}^{t_1-h_M} F(t_1,t)\left[\sum_{i=0}^{i=M} F(t_1,t+h_i)B_i(t+h_i)\right]$$

$$\left[\sum_{i=0}^{i=M} F(t_1,t+h_i)B_i(t+h_i)\right]^T F^T(t_1,t)dt = n \qquad (1.4.9)$$

D o w ó d. Na podstawie zależności (1.2.9), (1.4.8) oraz faktu, że $\dot{r}_i(t) = 1$, dla $i = 0,1,2,\ldots,M$ otrzymuje się warunek (1.4.9).

Uwaga 1.4.1. Względna sterowalność w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego (1.2.1) nie gwarantuje pozostania układu w stanie chwilowym $x(t_1)$ dla $t_1 < t$ nawet w przypadku całkowitego wyłączenia sterowania ($u(t) = 0$, dla $t_1 < t$). Stąd między innymi dla celów stabilności wynikła potrzeba wprowadzenia pojęcia silniejszego, a mianowicie pojęcia absolutnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$.

Uwaga 1.4.2. W pracy [262] sformułowano warunki konieczne i wystarczające istnienia sterowania stabilizującego stan chwilowy układu dynamicznego ze stałymi opóźnieniami w sterowaniu. Istnienie sterowania stabilizującego jest pojęciem pośrednim pomiędzy sterowalnością względną a sterowalnością absolutną. Istnienie sterowania stabilizującego jest więc tylko warunkiem koniecznym absolutnej sterowalności układu dynamicznego.

1.5. Sterowanie z minimalną energią [180], [181]

W przypadku gdy układ dynamiczny (1.2.1) jest względnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$, wówczas istnieje nieskończenie wiele różnych sterowań $u \in L_2([t_0,t_1], R^p)$, zapewniających przeprowadzenie układu dynamicznego z zadanego początkowego stanu zupełnego z_{t_0} do żądanego końcowego stanu chwilowego $x_1 \in R^n$ w chwili t_1. Wynika to z faktu, że przebieg trajektorii układu pomiędzy stanami chwilowymi $x(t_0)$ oraz x_1 nie jest z góry określony, a ponadto na sterowanie u nie są nałożone żadne ograniczenia. W związku z tym sensowne jest sformułowanie następującego problemu optymalizacyjnego: znaleźć sterowanie $u \in L_2([t_0,t_1], R^p)$, przeprowadzające względnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ układ dynamiczny (1.2.1) z początkowego stanu zupełnego z_{t_0} do zadanego stanu chwilowego x_1 w chwili t_1 oraz minimalizujące następujący kwadratowy wskaźnik jakości:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)R(t)u(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2_{R(t)}dt \qquad (1.5.1)$$

gdzie $R(t)$ jest $p \times p$ - wymiarową, symetryczną, ograniczoną, dodatnio określoną dla $t \in [t_0,t_1]$ macierzą.
Zatem istnieje macierz odwrotna $R^{-1}(t)$, dla $t \in [t_0,t_1]$.

Przy założeniu względnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego (1.2.1) powyższy problem optymalizacyjny posiada zawsze jednoznaczne rozwiązanie, którego postać analityczna jest ściśle związana z macierzą względnej sterowalności (1.3.13).

Dla skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenia:

$$W_R(t_0,t_1) = \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)\right] R^{-1}(t) \left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)\right]^T dt \qquad (1.5.2)$$

$$u_{opt}(t) = R^{-1}(t)\left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)\right]^T W_R^{-1}(t_0,t_1) q(z_{t_0},x_1) \quad \text{dla} \quad t \in \left[v_{i+1}(t_1), v_i(t_1)\right) \qquad (1.5.3)$$

$$i = 0,1,2,\ldots,(m-1)$$

TWIERDZENIE 1.5.1. Jeżeli układ dynamiczny (1.2.1) jest względnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$, to sterowanie $u_{opt}(t)$, $t \in [t_0,t_1]$, zdefiniowane równością (1.5.3), przeprowadza układ dynamiczny (1.2.1) z początkowego stanu zupełnego z_{t_0} do zadanego końcowego stanu chwilowego x_1 w chwili t_1. Ponadto, jeżeli $\bar{u} \in L_2([t_0,t_1], R^p)$ jest dowolnym sterowaniem przeprowadzającym układ dynamiczny (1.2.1) z początkowego stanu zupełnego z_{t_0} do zadanego końcowego stanu chwilowego x_1 w chwili t_1, wówczas zachodzi nierówność

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\bar{u}(t)\|^2_{R(t)} dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \|u_{opt}(t)\|^2_{R(t)} dt \qquad (1.5.4)$$

oraz minimalna wartość wskaźnika jakości (1.5.1) jest dana następującą zależnością:

$$J(u_{opt}) = \int_{t_0}^{t_1} \|u_{opt}(t)\|^2_{R(t)} dt = \|q(z_{t_0},x_1)\|^2_{W_R^{-1}(t_0,t_1)} \qquad (1.5.5)$$

D o w ó d. Z relacji (1.5.3) wynika bezpośrednio, że $u_{opt}(t) \in L_2([t_0,t_1], R^p)$. Ponadto, podstawiając (1.5.3) do wzoru (1.3.2), po prostych przeliczeniach otrzymuje się równość

$$x(t_1,z_{t_0},u_{opt}) = x_1 \qquad (1.5.6)$$

Zatem sterowanie $u_{opt}(t)$ przeprowadza układ dynamiczny (1.2.1) z początkowego stanu zupełnego z_{t_0} do zadanego końcowego stanu chwilowego x_1 w chwili t_1, a ponieważ z założenia $\bar{u}(t)$ spełnia również powyższy warunek, więc na podstawie zależności (1.3.9) otrzymuje się

$$x(t_1,0,\bar{u}) = \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)\right] \bar{u}(t)dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)\right] u_{opt}(t)dt = x(t_1,0,u_{opt}) \tag{1.5.7}$$

Po odjęciu stronami, uzyskuje się

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)\right] \left[\bar{u}(t) - u_{opt}(t)\right] dt = 0 \tag{1.5.8}$$

Zatem

$$\left\langle \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)\right] \left[\bar{u}(t) - u_{opt}(t)\right] dt, \right.$$

$$\left. W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1) \right\rangle_{R^n} = 0 \tag{1.5.9}$$

Wykorzystując równość (1.5.9) oraz własności iloczynu skalarnego otrzymuje się relację:

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \left\langle (\bar{u}(t) - u_{opt}(t)),\ R(t)u_{opt}(t) \right\rangle_{R^n} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle (\bar{u}(t) - u_{opt}(t)),\ R(t)u_{opt}(t) \right\rangle_{R^n} dt = 0 \tag{1.5.10}$$

Korzystając z własności iloczynu skalarnego i normy oraz z zależności (1.5.10) otrzymuje się następujące równości:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\bar{u}(t)\|^2_{R(t)}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{u}(t),\, R(t)\bar{u}(t)\rangle_{R^n}\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \langle (\bar{u}(t) - u_{opt}(t)),\, R(t)(\bar{u}(t) - u_{opt}(t))\rangle_{R^n} dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle u_{opt}(t),\, R(t)(\bar{u}(t) - u_{opt}(t))\rangle_{R^n} dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle (\bar{u}(t) - u_{opt}(t)),\, R(t)u_{opt}(t)\rangle_{R^n} dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle u_{opt}(t),\, R(t)u_{opt}(t)\rangle_{R^n} dt =$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle (\bar{u}(t) - u_{opt}(t),\, R(t)(\bar{u}(t) - u_{opt}(t)\rangle_{R^n} dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle u_{opt}(t),\, R(t)u_{opt}(t)\rangle_{R^n} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \|\bar{u}(t) - u_{opt}(t)\|^2_{R(t)}\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \|u_{opt}(t)\|^2_{R(t)}\,dt \qquad (1.5.11)$$

Ponieważ $\int_{t_0}^{t_1} \|\bar{u}(t) - u_{opt}(t)\|^2_{R(t)}\,dt \geqslant 0$, więc na podstawie zależności (1.5.11) zachodzi dla dowolnego $\bar{u} \in L_2([t_0,t_1], R^p)$ następująca nierówność:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\bar{u}(t)\|^2_{R(t)}\,dt \geqslant \int_{t_0}^{t_1} \|u_{opt}(t)\|^2_{R(t)}\,dt \qquad (1.5.12)$$

Zatem nierówność (1.5.4) w tezie twierdzenia 1.5.1 została wykazana.

W ostatnim kroku dowodu zostanie wykazana prawdziwość równości (1.5.5) określającej minimalną wartość wskaźnika jakości $J(u_{opt})$, odpowiadającą sterowaniu optymalnemu u_{opt}

$$J(u_{opt}) = \int_{t_0}^{t_1} \left\|u_{opt}(t)\right\|^2_{R(t)}\,dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \left\|R^{-1}(t)\left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)\right]^T W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1)\right\|^2_{R(t)}\,dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \Big\langle R^{-1}(t)\left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)\right]^T W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1),$$

$$R(t)R^{-1}(t)\left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)\right]^T W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1)\Big\rangle_{R^n} dt \qquad (1.5.13)$$

Ponieważ macierz $W_R(t_0,t_1)$ jest symetryczna, więc na mocy (1.5.2) oraz (1.5.13) wskaźnik jakości $J(u_{opt})$ wyraża się następującymi zależnościami:

$$J(u_{opt}) = \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \Big\langle q(z_{t_0},x_1)\, W_R^{-1}(t_0,t_1)\left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)\right]R^{-1}(t).$$

$$\cdot \left[G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)\right]^T W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1)\Big\rangle_{R^n} dt =$$

$$= \Big\langle q(z_{t_0},x_1),\ W_R^{-1}(t_0,t_1) \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \left[G_i(t_1,t)\right. +$$

$$+ \bar{S}(t_1,t)\Big] R^{-1}(t)\Big[G_1(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)\Big]^T dt \cdot W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1)\Big\rangle_{R^n} =$$

$$= \Big\langle q(z_{t_0},x_1),\ W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1)\Big\rangle_{R^n} = \Big\|q(z_{t_0},x_1)\Big\|^2_{W_R^{-1}(t_0,t_1)} \qquad (1.5.14)$$

Zatem równość (1.5.5) została dowiedziona, co jednocześnie kończy dowód twierdzenia.

1.6. Uwagi o sterowalności układów dynamicznych z opóźnieniami w stanie układu [358]

Równolegle z rozwojem teorii sterowalności dla układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu powstała teoria sterowalności dla układów dynamicznych z opóźnieniami w stanie układu. Podobnie jak w przypadku opóźnień w sterowaniu, także dla układów dynamicznych z opóźniemiami w stanie układu wprowadza się dwa zasadnicze rodzaje sterowalności, a mianowicie: względną sterowalność oraz absolutną sterowalność.

Oprócz nazwy względna sterowalność stosuje się również nazwy: R^n- sterowalność oraz euklidesowa sterowalność [52], [356]. W przypadku gdy końcowy stan chwilowy $x_1 = 0$, wówczas stosuje się nazwę"względna sterowalność do zera" lub "względna zerowa sterowalność", [220], [222], która dla układów dynamicznych z opóźnieniami w stanie układu nie jest równoważna względnej sterowalności [225], co wiąże się ściśle z możliwością degeneracji układu dynamicznego [222].

Pojęcie absolutnej sterowalności (zwanej także funkcyjną sterowalnością) polega, intuicyjnie rzecz biorąc, na przeprowadzeniu układu dynamicznego z opóźnieniem w stanie układu z dowolnego początkowego stanu zupełnego do dowolnego końcowego stanu zupełnego, [112], [220], [222].W przypadku gdy końcowy stan zupełny jest stanem zerowym, to wówczas mówimy o tzw. absolutnej sterowalności do zera lub absolutnej zerowej sterowalności [222].

Ponieważ układy dynamiczne z opóźnieniami w stanie można traktować jako układy dynamiczne określone w odpowiedniej przestrzeni topologicznej [74], [223], [226], [227], [263], więc wprowadzając przestrzenie topologiczne $\mathcal{F}$ funkcji określonych w przedziale $[-h,0]$, o wartościach w R^n, w sposób naturalny uzyskuje się odpowiednio definicje $\mathcal{F}$ - sterowalności, $\mathcal{F}$ - aproksymacyjnej sterowalności, $\mathcal{F}$ - aproksymacyjnej zero sterowalności [74], [75], [223], [226], [227], [263], [264] oraz spektralnej sterowalności [22], [34], [74], [224], [226].

Sformułowanie kryteriów badania wyżej wymienionych rodzajów sterowalności nastręcza o wiele więcej trudności niż w przypadku względnej sterowalności. Przy rozwiązywaniu tych zagadnień stosuje się różnorodne metody postępowania, wśród których można wyróżnić następujące trzy zasadnicze grupy:

1) metody bazujące na analizowaniu całkowej postaci rozwiązania równania różniczkowego z opóźnionym argumentem [34], [35], [47], [72], [200], [241], [263], [264], [319],

2) metody algebraiczne oparte na własnościach pewnych pierścieni funkcyjnych [22], [76], [77], [102], [103], [159], [160], [161], [307], [308], [309], [347], [348],

3) metody polegające na sprowadzeniu równania różniczkowego z opóźnionym argumentem do równania różniczkowego zwyczajnego bez opóźnień, określonego w odpowiednio zdefiniowanej nieskończenie wymiarowej przestrzeni funkcyjnej [74], [75], [223], [226], [227], [263], [264].

W przypadku układów dynamicznych stacjonarnych z opóźnieniami w stanie układu, sterowalność względna oraz sterowalność absolutna zależą w istotny sposób od długości przedziału czasowego, w którym rozważana jest sterowalność [220], [222]. Sytuacja taka nie miała miejsca w przypadku stacjonarnych układów dynamicznych bez opóźnień, gdzie sterowalność jest niezależna od długości rozpatrywanego przedziału czasowego [40], [152], [153], [355].

Wiele rezultatów dotyczących sterowalności niestacjonarnych układów dynamicznych z wielokrotnymi, zmiennymi w czasie opóźnieniami w stanie oraz z rozłożonymi opóźnieniami w stanie zawartych jest w następujących pozycjach literaturowych: [13], [15], [140], [197], [198], [206], [209], [354].

Własności topologiczne zbiorów osiągalnych w odpowiednich przestrzeniach funkcyjnych, dla układów dynamicznych z opóźnieniami w stanie układu, analizowane są szeroko w następujących pracach: [12], [14], [201], [264].

Podobnie jak w przypadku układów dynamicznych bez opóźnień, także dla układów dynamicznych z opóźnieniami w stanie układu stabilizowalność ich jest ściśle związana z różnymi rodzajami sterowalności [71], [72], [74], [202], [223], [226], [227], [228], [262], [265], [268], [279], [307].

Sytuacja znacznie się komplikuje w przypadku, gdy w układzie dynamicznym występują równocześnie opóźnienia w stanie układu oraz w sterowaniu. W publikacjach [221] oraz [225] sformułowano szereg warunków koniecznych i wystarczających względnej oraz absolutnej sterowalności dla takich układów dynamicznych.

Problematyka wpływu fluktuacji parametrów układu dynamicznego z opóźnieniami w stanie na ich sterowalność rozważana jest w pracach [14], [142], [264].

Oddzielną klasę układów dynamicznych z opóźnieniami stanowią neutralne układy danymiczne, tzn. układy dynamiczne, których dynamikę opisuje neutralne równanie różniczkowe (opóźnienie występuje również w pochodnej).

W oparciu o własności operatorów Fredholma w pracach: [141], [142], [286], [317] sformułowano kryteria dla różnych rodzajów sterowalności tych układów. Natomiast stabilizowalność neutralnych układów dynamicznych rozpatrywana jest w publikacjach [58] oraz [270].

Podsumowując powyższe uwagi i spostrzeżenia należy podkreślić, że problematyka sterowalności dla układów dynamicznych z opóźnieniami w stanie układu jest bardzo szeroka, a metody badawcze bardzo zróżnicowane.

ROZDZIAŁ 2

STEROWALNOŚĆ NIELINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

2.1. Wprowadzenie

Teoria sterowalności dla nieliniowych układów dynamicznych nie jest tak spójna i jednolita jak w przypadku liniowych układów dynamicznych. Większość uzyskanych kryteriów sterowalności ma jedynie charakter lokalny lub odnosi się tylko do pewnej, na ogół dość wąskiej klasy układów dynamicznych.

Zasadniczą przyczyną trudności występujących przy badaniu sterowalności nieliniowych układów dynamicznych jest brak ogólnych metod rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych, co wyklucza możliwość zastosowania szeregu metod badawczych opartych na analizowaniu jawnej postaci rozwiązania równania (jak to miało miejsce w przypadku liniowych układów dynamicznych).

W badaniach nad sterowalnością nieliniowych układów dynamicznych stosuje się różne metody, w zależności od typu równania różniczkowego opisującego rozpatrywany układ dynamiczny. Do najczęściej stosowanych należą metody bazujące na:

1) wykorzystaniu twierdzeń o punktach stałych odwzorowań nieliniowych (najczęściej stosuje się twierdzenie Schaudera o punkcie stałym),
2) zastosowaniu teorii pól wektorowych oraz algebr i grup Liego,
3) określaniu sterowalności układu z perturbacjami na podstawie badania sterowalności prostszego układu bez perturbacji,
4) zastosowaniu zasady maksimum.

Wybór odpowiedniej metody uwarunkowany jest w głównej mierze charakterem nieliniowości występującej w danym równaniu różniczkowym opisującym układ dynamiczny.

Stosowanie twierdzeń o punktach stałych umożliwia uzyskanie warunków wystarczających sterowalności zarówno o charakterze globalnym, jak i (przy słabszych założeniach) o charakterze lokalnym. Niestety, wadą tej metody postępowania jest fakt, że można ją stosować jedynie w odniesieniu do dość wąskiej klasy nieliniowych układów dynamicznych, a mianowicie do układów dynamicznych, w których równaniach da się wyodrębnić składniki następującej postaci: $A(t)x(t)$, $A(t,x(t))x(t)$ lub $A(t,x(t),u(t))x(t)$, [69], [171], [172], [242], [243].

Metoda ta pozwala również na uzyskiwanie warunków sterowalności dla nieliniowych układów dynamicznych z opóźnieniami w stanie układu [67], opóźnieniami w sterowaniu [173], [179], [185], [187] oraz dla nieliniowych neutralnych układów dynamicznych [51], [52], [53], [115].

Przy stosowaniu twierdzeń o punktach stałych uzyskuje się najczęściej sterowalność w przestrzeni funkcji ciągłych, co wynika z faktu, że kryterium zwartości zbioru funkcji ciągłych jest stosunkowo łatwe do sprawdzenia [337]. W dalszej części niniejszego rozdziału zostaną sformułowane warunki wystarczające sterowalności układów nieliniowych, przy wykorzystaniu twierdzeń o punktach stałych odwzorowań nieliniowych.

Zastosowanie teorii pól wektorowych oraz algebr i grup Liego pozwoliło na uzyskanie szeregu warunków koniecznych lub wystarczających sterowalności, głównie dla symetrycznych układów dynamicznych [124], [127], [129], [130], [131], [132], [138], [139], [144], [147], [208], [212], [275], [313], [314], [315], [316], [320], [321], [322], [323].

Metoda porównawcza była stosowana najwcześniej [207] i daje szczególnie dobre rezultaty w przypadku addytywnych perturbacji [49], [50], [54], [55], [59], [60], [61], [62], [63], [64], [65], [143], [215], [216], [217], [292], [293], [303], [325].

Stosowanie specjalnych wersji zasady maksimum do badania sterowalności wymaga wprowadzenia skomplikowanego aparatu matematycznego [337] i stąd nie jest często spotykane w literaturze [120], [337], [338], [339], [340], [352].

Wiele rezultatów dotyczy sterowalności nieliniowych układów dynamicznych o dwóch współrzędnych stanu (układy dynamiczne określone na płaszczyźnie) - [1], [2], [3] oraz [9].

Do badania sterowalności nieliniowych układów dynamicznych wykorzystuje się również funkcję Lapunowa [116], [148], pewne metody geometryczne [5], [6], [195], a także inne metody analizy matematycznej [86], [166], [269], [296].

Sterowalność stochastyczna nieliniowych układów dynamicznych była rozpatrywana w pracach [189], [306], [312], sterowalność aproksymacyjna nieskończenie wymiarowych nieliniowych układów dynamicznych w pracach [46], [111], [335], natomiast własności zbiorów osiągalnych dla tych układów badane były w publikacjach [128] oraz [281].

Wyodrębnioną klasę nieliniowych układów dynamicznych stanowią biliniowe układy dynamiczne zarówno ciągłe, jak i dyskretne, będące modelami matematycznymi wielu procesów chemicznych, fizycznych oraz biomedycznych [245]. Przy formułowaniu warunków sterowalności dla ciągłych, biliniowych układów dynamicznych wykorzystuje się zarówno teorię algebr Liego [29], [30], [38], jak i inne metody analizy matematycznej [342], [343], [344]. Względna sterowalność ciągłych, biliniowych układów dynamicznych z opóźnieniami w stanie rozważana jest w pracy [164]. Sterowalność dyskretnych, biliniowych układów dynamicznych badana jest przy użyciu metod algebraicz-

nych, a uzyskane na tej drodze rezultaty dotyczą wąskiej klasy tych układów [87], [88], [90], [121], [318]. Zagadnienie to będzie rozpatrywane szerzej w rozdziale 7 niniejszej pracy.

2.2. Opis układu dynamicznego i podstawowe definicje [171]

Niech będzie dany niestacjonarny, nieliniowy, skończenie wymiarowy układ dynamiczny, opisany następującym równaniem różniczkowym zwyczajnym:

$$\dot{x}(t) = A(t,x(t))x(t) + B(t,x(t))u(t) + f(t,x(t)), \quad t \in [t_0,t_1] \tag{2.2.1}$$

gdzie:

$x(t) \in R^n$ jest wektorem stanu układu dynamicznego (2.2.1)

$u \in L_1([t_0,t_1], R^p)$,

$A(t,x)$ jest n x n - wymiarową macierzą, której elementy $a_{ij}(t,x)$, i = 1,2,3,...,n, j = 1,2,3,...,n są przy ustalonym t ciągłymi funkcjami x oraz przedziałami ciągłymi funkcjami t przy ustalonym x,

$B(t,x)$ jest n x p - wymiarową macierzą, której elementy $b_{ij}(t,x)$, i = 1,2,3,...,n, j = 1,2,3,...,p są przy ustalonym t ciągłymi funkcjami x oraz przedziałami ciągłymi funkcjami t przy ustalonym x,

$f(t,x) : R \times R^n \to R^n$ jest funkcją wektorową, ciągłą względem x przy ustalonym t oraz przedziałami ciągłą względem t przy ustalonym x.

Zakłada się, że prawa strona równania (2.2.1) spełnia warunki gwarantujące jednoznaczność rozwiązania. Ponadto zakłada się, że macierze $A(t,x)$ $B(t,x)$ oraz funkcja wektorowa $f(t,x)$ spełniają następujące dodatkowe założenia:

$$|a_{ij}(t,x)| \leq N, \text{ dla } t \in [t_0,t_1], \quad x \in R^n, \; i,j = 1,2,3,\ldots,n \tag{2.2.2}$$

$$|b_{ij}(t,x)| \leq M, \text{ dla } t \in [t_0,t_1], \quad x \in R^n, \; i=1,2,3,\ldots,n, \; j = 1,2,3,\ldots,p \tag{2.2.3}$$

$$|f(t,x)| \leq K_f, \quad \text{dla } t \in [t_0,t_1], \quad x \in R^n \tag{2.2.4}$$

gdzie

$$K_f > 0, \quad M > 0, \quad N > 0 \tag{2.2.5}$$

Ponieważ rozpatrywany układ dynamiczny (2.1.2) jest układem nieliniowym, więc należy rozróżnić sterowalność globalną oraz sterowalność lokalną [49], [50], [59], [60], [129].

Definicja 2.2.1. Układ dynamiczny (2.2.1) nazywa się układem globalnie (lokalnie w obszarze $D \subset R^n$) sterowalnym w przedziale $[t_0,t_1]$, jeżeli dla każdego stanu początkowego $x(t_0) \in R^n$ $(x(t_0) \in D)$ oraz dla każdego wektora $x_1 \in R^n$ $(x_1 \in D)$ istnieje sterowanie $u \in L_1([t_0,t_1], R^p)$ takie, że odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria $x(t,x(t_0),u)$ układu dynamicznego (2.2.1) spełnia następujący warunek: $x(t_1,x(t_0),u) = x_1$.

Ze względu na niestacjonarność układu dynamicznego (2.2.1) sensowne jest wprowadzenie pojęcia sterowalności w chwili t oraz całkowitej sterowalności [158], [199], [207].

Definicja 2.2.2. Układ dynamiczny (2.2.1) nazywa się układem globalnie (lokalnie w obszarze $D \subset R^n$) sterowalnym w chwili t_0, jeżeli istnieje $t_1 \in (t_0,\infty)$ takie, że układ dynamiczny (2.2.1) jest globalnie (lokalnie w obszarze $D \subset R^n$) sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$.

Definicja 2.2.3. Układ dynamiczny (2.2.1) nazywa się układem całkowicie globalnie (lokalnie w obszarze $D \subset R^n$) sterowalnym w chwili t_0, jeżeli dla każdego $t_1 \in (t_0,\infty)$ układ dynamiczny (2.2.1) jest globalnie (lokalnie w obszarze $D \subset R^n$) sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$.

Definicja 2.2.4. Układ dynamiczny (2.2.1) nazywa się układem całkowicie globalnie (lokalnie w obszarze $D \subset R^n$) sterowalnym, jeżeli jest całkowicie globalnie (lokalnie w obszarze $D \subset R^n$), sterowalny w dowolnej chwili $t_0 \in R$.

Pomiędzy przytoczonymi rodzajami sterowalności zachodzą następujące implikacje: całkowita globalna (lokalna) sterowalność $\Longrightarrow$ całkowita globalna (lokalna) sterowalność w chwili $t_0 \Longrightarrow$ globalna (lokalna) sterowalność w przedziale $[t_0,t_1] \Longrightarrow$ globalna (lokalna) sterowalność w chwili t_0.

W niniejszym rozdziale do badania sterowalności zostanie wykorzystana następująca wersja twierdzenia Schaudera o punkcie stałym [337, str.195]; "Każdy ciągły operator, przekształcający domknięty i wypukły podzbiór przestrzeni Banacha w jego zwarty podzbiór, posiada przynajmniej jeden punkt stały".

Niech $C_n[t_0,t_1]$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych określonych w przedziale $[t_0,t_1]$, o wartościach w przestrzeni R^n, z normą zdefiniowaną w sposób następujący: [337, str. 129]

$$y \in C_n[t_0,t_1] \Longrightarrow \|y\| = \max_{t_0 \le t \le t_1} |y(t)|, \text{ gdzie } |y(t)| = \max_{i=1,2,\ldots,n} |y_i(t)| \qquad (2.2.6)$$

Przestrzeń $C_n[t_0,t_1]$ jest przestrzenią Banacha, [337, rozdz.I.5,str.129].

Uwaga 2.2.1. W relacji (2.2.6), definiującej normę w przestrzeni $C_n[t_0,t_1]$, można zamiast normy w przestrzeni R^n, $|y(t)|$, określonej pra-

wą równością, użyć dowolnej innej normy w przestrzeni R^n, np. $|y(t)| = \sum_{i=1}^{i=n} |y_i(t)|$ lub $|y(t)| = \left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2(t) \right)^{\frac{1}{2}}$. Wiadomo, że wszystkie normy w przestrzeni R^n są topologicznie równoważne [337, rozdz. I.3, str. 39], a ponadto $C_n[t_0,t_1]$ dla każdej z tych norm jest przestrzenią Banacha [337]. Przyjęcie jednej z proponowanych norm w przestrzeni R^n nie ma wpływu na sterowalność układu dynamicznego (2.2.1), a jedynie modyfikuje nieco nierówności występujące w dowodach twierdzeń (oszacowania wielkości wyrażają się nieco innymi zależnościami).

Uwaga 2.2.2. W relacji (2.2.6) w lewej równości zamiast symbolu "max" można użyć symbolu "sup", co w niczym nie zmienia przeprowadzonych obliczeń [337, str. 129].

Podstawiając w równaniu (2.2.1) zamiast argumentu $x(t)$ $(t \in [t_0,t_1])$, w macierzach $A(t,x(t))$, $B(t,x(t))$ oraz funkcji $f(t,x(t))$ dowolną funkcję $y \in C_n[t_0,t_1]$ otrzymuje się:

$$\dot{x}(t) = A(t,y(t))x(t) + B(t,y(t))u(t) + f(t,y(t)) \qquad t \in [t_0,t_1] \tag{2.2.7}$$

Dla każdego ustalonego $y \in C_n[t_0,t_1]$ układ dynamiczny (2.2.7) jest układem liniowym, którego trajektoria przy zadanym stanie początkowym $x(t_0)$ oraz sterowaniu $u \in L_1([t_0,t_1], R^p)$ wyraża się następującym wzorem całkowym [69], [242]:

$$x(t,x(t_0),u) = F(t,t_0;y)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(t,x;y)B(x,y)u(s)ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} F(t,s;y)f(s,y)ds, \qquad t \geqslant t_0 \tag{2.2.8}$$

gdzie

$F(t,t_0;y)$ jest macierzą tranzycji następującego niestacjonarnego układu liniowego

$$\dot{x}(t) = A(t,y(t))x(t) \tag{2.2.9}$$

z warunkiem początkowym $F(t_0,t_0;y) = I$.

Macierz sterowalności dla układu dynamicznego postaci (2.2.7) jest następująca [69], [152], [153], [242], [255]:

$$W(t_0,t;y) = \int_{t_0}^{t} F(t_0,s;y)B(s,y)B^T(s,y)F^T(t_0,s;y)ds \qquad (2.2.10)$$

Wykorzystując wprowadzone założenia oraz oznaczenia można sformułować warunki wystarczające różnych rodzajów sterowalności układu dynamicznego postaci (2.2.1).

2.3. Warunki wystarczające sterowalności globalnej [171]

W niniejszym podrozdziale zostaną sformułowane warunki wystarczające różnych rodzajów globalnej sterowalności dla nieliniowego, niestacjonarnego układu dynamicznego (2.2.1).

TWIERDZENIE 2.3.1. Jeżeli przy ustalonych t_0 oraz t_1 spełnione są założenia dotyczące układu dynamicznego (2.2.1) sformułowane w podrozdziale 2.2, a ponadto istnieje stała dodatnia c taka, że zachodzi nierówność

$$\inf_{y \in C_n[t_0,t_1]} \det W(t_0,t_1;y) \geqslant c \,, \qquad (2.3.1)$$

wówczas układ dynamiczny (2.2.1) jest globalnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$.

D o w ó d. Dowód twierdzenia jest oparty na sformułowanym w podrozdziale 2.2 twierdzeniu Schaudera o punkcie stałym.

Niech sterowanie $u \in L_1([t_0,t_1], R^p)$ będzie dane następującym wzorem:

$$u(t) = -B^T(t,y)F^T(t_0,t;y)W^{-1}(t_0,t_1;y)\left[x(t_0) - F(t_0,t_1;y)x_1 + \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;y)f(s,y)ds\right] \qquad (2.3.2)$$

gdzie $x_1 \in R^n$ jest dowolnym wektorem.

Wstawiając (2.3.2) do (2.2.8) otrzymuje się przebieg trajektorii układu dynamicznego (2.2.7) przy użyciu sterowania postaci (2.3.2).

$$x(t) = F(t,t_0;y)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(t,s;y)f(s,y)ds -$$

$$\int_{t_0}^{t} F(t,s;y)B(s,y)B^T(s,y)F^T(t_0,s;y)ds \cdot$$

$$\cdot W^{-1}(t_0,t_1;y)\left[x(t_0) - F(t_0,t_1;y)x_1 + \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;y)f(s,y)ds\right] \qquad (2.3.3)$$

Wykorzystując zatem zależność (2.2.10) oraz fakt, że na mocy założenia (2.3.1) macierz $W^{-1}(t_0,t_1;y)$ istnieje dla $t = t_1$, uzyskuje się następujące zależności:

$$x(t_1) = F(t_1,t_0;y)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} F(t_1,s;y)f(s,y)ds -$$

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t_1,s;y)B(s,y)B^T(x,y)F^T(t_0,s;y)ds \cdot$$

$$\cdot W^{-1}(t_0,t_1;y)\left[x(t_0) - F(t_0,t_1;y)x_1 + \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;y)f(x,y)ds\right] =$$

$$= F(t_1,t_0;y)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} F(t_1,s;y)f(s,y)ds - F(t_1,t_0;y)\left[x(t_0) - F(t_0,t_1;y)x_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;y)f(s,y)ds\right] = F(t_1,t_0;y)x,(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} F(t_1,s;y)f(s,y)ds - F(t_1,t_0;y)x(t_0) + x_1 -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} F(t_1,s;y)f(s,y)ds = x_1 \qquad (2.3.4)$$

Z równości (2.3.4) bezpośrednio wynika, że sterowanie $u(t)$ określone zależnością (2.3.2) przeprowadza układ dynamiczny (2.2.7) z dowolnego stanu początkowego $x(t_0)$ do dowolnego wektora $x_1 \in R^n$ w chwili t_1 (dla każdej ustalonej funkcji $y \in C_n[t_0,t_1]$).

W dalszej części dowodu zostanie wykazane, że istnieje co najmniej jedna funkcja $y \in C_n[t_0,t_1]$, która jest jednocześnie rozwiązaniem równania różniczkowego (2.2.1). W tym celu zostanie wykorzystane wspomniane poprzednio twierdzenie Schaudera o punkcie stałym. Pierwszym krokiem w tym kierunku będzie sformułowanie nieliniowego operatora.

Prawa strona równości (2.3.3) definiuje nieliniowy operator $P(y)(t)$, który odwzorowuje przestrzeń Banacha $C_n[t_0,t_1]$ w siebie. Wynika to bezpośrednio z kształtu tego operatora, który explicite jest dany następującą równością:

$$P(y)(t) = F(t,t_0;y)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(t,s;y)f(s,y)ds -$$

$$- \int_{t_0}^{t} F(t,s;y)B(s,y)B^T(s,y)F^T(t_0,s;y)ds \cdot$$

$$\cdot W^{-1}(t_0,t_1;y)\left[x(t_0) - F(t_0,t_1;y)x_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;y)f(s,y)ds\right], \qquad t \in [t_0,t_1] \tag{2.3.5}$$

Z ciągłej zależności rozwiązania równania różniczkowego (2.2.7) od parametrów wynika, że operator $P : C_n[t_0,t_1] \to C_n[t_0,t_1]$ jest operatorem ciągłym względem topologii indukowanej przez normę postaci (2.2.6). Zatem równość (2.3.3) może być przedstawiona w postaci:

$$x(t) = P(y)(t) \qquad t \in [t_0,t_1] \tag{2.3.6}$$

Stosując twierdzenie Arzela-Ascoli [337 , str. 34, 131] można dowieść (dowód w dodatku), że operator P odwzorowuje domknięty, wypukły podzbiór przestrzeni Banacha $C_n[t_0,t_1]$ w jego zwarty podzbiór. Ponieważ operator P jest ciągły, więc na podstawie twierdzenia Schaudera istnieje co najmniej jeden punkt stały operatora P. Stąd istnieje przynajmniej jedna funkcja $\bar{y} \in C_n[t_0,t_1]$ taka, że zachodzi następująca równość:

$$\bar{x}(t) = \bar{y}(t) = P(\bar{y})(t) \qquad t \in [t_0,t_1] \qquad (2.3.7)$$

Poprzez różniczkowanie względem zmiennej t można wykazać, że funkcja $\bar{x}(t)$, określona równością (2.3.7), jest rozwiązaniem równania różniczkowego (2.2.1), odpowiadającym sterowaniu $\bar{u}(t)$, $t \in [t_0,t_1]$ (sterowaniu $\bar{u}(t)$ otrzymuje się wstawiając do wzoru (2.3.2) funkcję $\bar{y}(t)$ zamiast dowolnej funkcji $y(t)$). Ponieważ sterowaniu $\bar{u}(t)$ przeprowadza układ dynamiczny (2.2.1) z dowolnego stanu początkowego $x(t_0)$ do dowolnego wektora $x_1 \in R^n$, więc na podstawie definicji 2.2.1 rozpatrywany układ dynamiczny (2.2.1) jest globalnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$.

Wniosek 2.3.1. Jeżeli założenia twierdzenia 2.3.1 spełnione są dla:

1) pewnego $t_1 > t_0$ przy ustalonym t_0,

2) każdego $t_1 > t_0$ przy ustalonym t_0,

3) dowolnego t_0 oraz każdego $t_1 > t_0$,

wówczas układ dynamiczny (2.2.1) jest odpowiednio:

1) globalnie sterowalny w chwili t_0,

2) całkowicie globalnie sterowalny w chwili t_0,

3) całkowicie globalnie sterowalny.

D o w ó d. Wniosek 2.3.1 wynika z twierdzenia 2.3.1 oraz z definicji 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4.

Wniosek 2.3.2. Jeżeli układ dynamiczny

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad t \in [t_0,t_1] \qquad (2.3.8)$$

jest sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$, a ponadto funkcja $f(t,x(t))$ spełnia założenia (2.2.4) oraz (2.2.5), wówczas układ dynamiczny postaci

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t,x(t)) \quad t \in [t_0,t_1] \quad (2.3.9)$$

jest globalnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$.

D o w ó d. Jeżeli układ dynamiczny (2.3.8) jest sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$, to

$$\det \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s)B(s)B^T(s)F^T(t_0,s)ds > 0. \qquad (2.3.10)$$

Zatem na mocy twierdzenia 2.3.1 układ dynamiczny (2.3.9) jest globalnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$.

Niech będzie dany układ dynamiczny opisany następującym równaniem różniczkowym:

$$\dot{x}(t) = [A(t,x(t)) + \varepsilon \bar{A}(t,x(t))]x(t) + [B(t,x(t)) + \varepsilon \bar{B}(t,x(t))]u(t) + f(t,x(t)), \quad t \in [t_0,t_1] \tag{2.3.11}$$

gdzie macierz $A(t,x(t))$, $\bar{A}(t,x(t))$, $B(t,x(t))$, $\bar{B}(t,x(t))$ oraz funkcja $f(t,x(t))$ spełniają założenia poczynione w podrozdziale 2.2, natomiast ε jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Wykorzystując rezultaty zawarte w pracach [69] oraz [242], a także twierdzenie 2.3.1 można sformułować warunki wystarczające różnych rodzajów sterowalności dla układu (2.3.11).

TWIERDZENIE 2.3.2. Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 2.3.1, wówczas układ dynamiczny (2.3.11) jest globalnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ dla małych ε.

D o w ó d. Niech

$$A_\varepsilon(t,x(t)) = A(t,x(t)) + \varepsilon \bar{A}(t,x(t)) \tag{2.3.12}$$

$$B_\varepsilon(t,x(t)) = B(t,x(t)) + \varepsilon \bar{B}(t,x(t)) \tag{2.3.13}$$

Ponadto, niech $F_\varepsilon(t,t_0;y)$ oznacza macierz tranzycji następującego układu liniowego:

$$\dot{x}(t) = A_\varepsilon(t,y(t))x(t) \tag{2.3.14}$$

z warunkiem początkowym $F_\varepsilon(t_0,t_0;y) = I$.

W pracach [69] oraz [242] dowiedziono, że zachodzi następująca relacja:

$$\det W_\varepsilon(t_0,t_1;y) = \det W(t_0,t_1;y) + \varepsilon Q(t_0,t_1;y) + O(\varepsilon^2) \tag{2.3.15}$$

gdzie:

$$W_\varepsilon(t_0,t_1;y) = \int_{t_0}^{t_1} F_\varepsilon(t_0,s;y)B_\varepsilon(s,y)B_\varepsilon^T(s,y)F_\varepsilon^T(t_0,s;y)ds \tag{2.3.16}$$

$Q(t_0,t_1;y)$ jest dla każdego $y \in C_n[t_0,t_1]$ stałą wielkością,

$O(\varepsilon^2)$ jest nieskończenie małą drugiego rzędu względem zmiennej ε.

Jeżeli spełniona jest nierówność (2.3.1), wówczas na mocy równości (2.3.15) dla dostatecznie małych wartości ε zachodzi następująca nierówność:

$$\inf_{y \in C_n[t_0,t_1]} \det W_\varepsilon(t_0,t_1;y) \geq c_\varepsilon > 0, \qquad (2.3.17)$$

która na mocy poczynionych założeń jest warunkiem wystarczającym globalnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego (2.3.11).

Uwaga 2.3.1. Dla układu dynamicznego (2.3.11) można sformułować odpowiednik wniosku 2.3.1, określający warunki wystarczające pozostałych rodzajów sterowalności.

Uwaga 2.3.2. Twierdzenia 2.3.1 oraz 2.3.2 uogólniają rezultaty uzyskane w pracach [69], [242]. Uogólnienie to polega na uwzględnieniu w równaniu różniczkowym opisującym układ dynamiczny dodatkowego składnika w postaci funkcji wektorowej $f(t,x(t))$.

Uwaga 2.3.3. Należy podkreślić, że ograniczoność funkcji wektorowej $f(t,x(t))$ jest istotnym założeniem, bez którego twierdzenia 2.3.1 oraz 2.3.2 nie byłyby prawdziwe. Założenie ograniczoności wyklucza liniową postać funkcji wektorowej $f(t,x(t))$.

Przykład 2.3.1. Niech będzie dany układ dynamiczny postaci (2.2.1), opisany następującymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + \sin\left[\exp\left(-x_1^2(t) - x_2^2(t)\right)\right] u(t) + \frac{x_2(t)}{1 + x_1^2(t) + x_2^2(t)}$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \sin\left[\exp\left(-x_1^2(t) - x_2^2(t)\right)\right] u(t) + \frac{x_1(t)}{1 + x_1^2(t) + x_2^2(t)}$$

określonymi dla $t \in [0,t_1]$, $t_1 > 0$.

Zatem na podstawie równania (2.2.1) otrzymuje się następujące zależności:

$$A(t,x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t,x) = \begin{bmatrix} \sin\left[\exp\left(-x_1^2(t) - x_2^2(t)\right)\right] \\ \sin\left[\exp\left(-x_1^2(t) - x_2^2(t)\right)\right] \end{bmatrix},$$

$$f(t,x) = \begin{bmatrix} \dfrac{x_2(t)}{1 + x_1^2(t) + x_2^2(t)} \\ \dfrac{x_1(t)}{1 + x_1^2(t) + x_2^2(t)} \end{bmatrix}$$

Ponieważ rozpatrywany układ dynamiczny jest układem stacjonarnym, więc uwzględniając postać macierzy $A(t,x)$ uzyskuje się następujące równości określające macierz tranzycji:

$$F(t,t_0;y) = F(t;y) = F(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

Zatem, na podstawie wzoru (2.2.10), otrzymuje się macierz sterowalności postaci następującej:

$$W(t_0,t;y) = \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} \cos^2(t) & \sin(t)\cos(t) \\ \sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) \end{bmatrix} \sin^2\left[\exp(-x_1^2(t) - x_2^2(t))\right] dt$$

Wykorzystując rezultaty zawarte w pracy [69] uzyskuje się spełnienie nierówności (2.3.1) dla dowolnych wartości t_1. Ponadto funkcja wektorowa $f(t,x)$ spełnia warunek (2.2.4), natomiast macierze $A(t,x)$ oraz $B(t,x)$ spełniają odpowiednio warunki (2.2.2) oraz (2.2.3). Odpowiednie stałe ograniczające wynoszą: $N = 1$, $M = 1$, $K_f = 0{,}5$.

Ponieważ spełnienie nierówności (2.3.1) zachodzi dla dowolnego t_1, a ponadto rozpatrywany układ dynamiczny jest układem stacjonarnym, więc na podstawie wniosku 2.3.1 punkt 3, układ dynamiczny jest całkowicie globalnie sterowalny.

Powyższy przykład jest rozszerzeniem przykładu zawartego w pracy [69]. Rozszerzenie to polega na uwzględnieniu funkcji wektorowej $f(t,x)$. Możliwe są liczne modyfikacje tego przykładu, polegające na przykład na opuszczeniu jednego ze składników występujących pod znakiem eksponenty w macierzy $B(t,x)$.

2.4. Warunki wystarczające sterowalności lokalnej [172]

Warunki wystarczające globalnej sterowalności, sformułowane w podrozdziale 2.3, ze względu na dość silne założenia nie są spełnione dla wielu nieliniowych układów dynamicznych (np. dla biliniowych układów dynamicznych). Z drugiej strony, w praktyce często interesująca jest jedynie lokalna sterowalność danego nieliniowego układu dynamicznego. Warunki wystarczające lokalnej sterowalności w pewnym obszarze $D \subset R^n$ wymagają zawsze słabszych założeń niż warunki wystarczające globalnej sterowalności i z tego względu mogą być spełnione przez szerszą klasę nieliniowych układów dynamicznych.

W niniejszym podrozdziale, korzystając z rezultatów podrozdziału 2.3, zostaną sformułowane warunki wystarczające lokalnej sterowalności w oto-

czeniu zera następującego nieliniowego, niestacjonarnego układu dynamicznego:

$$\dot{x}(t) = A(t,x(t))x(t) + B(t,x(t))u(t) + f(t,x(t)) \quad t \in [t_0,t_1] \tag{2.4.1}$$

przy czym, oprócz założeń sprecyzowanych w podrozdziale 2.2, które nadal pozostają w mocy, dodatkowo zakłada się, że macierze $A(t,x(t))$, $B(t,x(t))$ oraz funkcja wektorowa $f(t,x(t))$ spełniają następujące ograniczenia:

$$|a_{ij}(t,x)| \leqslant N, \quad \text{dla} \quad t \in [t_0,t_1], \quad |x| \leqslant K, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n \tag{2.4.2}$$

$$|b_{ij}(t,x)| \leqslant M, \quad \text{dla} \quad t \in [t_0,t_1], \quad |x| \leqslant K, \quad i = 1,2,3,\ldots,n, \quad j = 1,2,3,\ldots,p \tag{2.4.3}$$

$$|f(t,x)| \leqslant K_f, \quad \text{dla} \quad t \in [t_0,t_1], \quad |x| \leqslant K \tag{2.4.4}$$

gdzie M, N, K_f są stałymi dodatnimi.

Niech $D \subset R^n$ oraz $E \subset C_n[t_0,t_1]$ będą podzbiorami określonymi w sposób następujący:

$$D = \left\{x \in R^n : |x| \leqslant K_D\right\}$$
$$E = \left\{y \in C_n[t_0,t_1] ; \|y\| \leqslant K\right\} \tag{2.4.5}$$

przy czym $K_D < K$ są stałymi dodatnimi, związanymi między sobą następującą zależnością:

$$K \geqslant [(1 + K_w)K_D + K_D K_w \exp(nN(t_1 - t_0)) +$$
$$+ K_f(t_1 - t_0)(1 + K_w)(\exp(nN(t_1 - t_0))] \exp(nN(t_1 - t_0)) \tag{2.4.6}$$

gdzie:

$$K_w = \sup_{y \in E} \|W^{-1}(t_0,t_1;y)\| npM^2(t_1 - t_0)\exp(2nN(t_1 - t_0)) \tag{2.4.7}$$

Zależność pomiędzy stałymi K oraz K_D jest konsekwencją wzorów (4) oraz (5) zamieszczonych w dodatku, a także faktu, że $x(t_0) \in D$ oraz $x_1 \in D$, zgodnie z definicją 2.2.1. Z relacji (2.4.6) wynika, że w przypadku gdy stała K_f jest duża, dobór odpowiedniej stałej K_D na podstawie znajomości stałej K może być niemożliwy. Trudności te nie występują, gdy w równaniu różniczkowym (2.4.1) nie występuje funkcja $f(t,x(t))$, $(K_f = 0)$ [69], [242]. Wówczas dobór odpowiedniej stałej K_D na podstawie znajomości stałej K jest zawsze możliwy.

TWIERDZENIE 2.4.1. Jeżeli przy ustalonych t_0 oraz t_1 spełnione są założenia dotyczące układu dynamicznego (2.4.1), a ponadto istnieje stała dodatnia c taka, że zachodzi

$$\inf_{y \in E} \det W(t_0,t_1;y) \geqslant c \qquad (2.4.8)$$

wówczas układ dynamiczny (2.4.1) jest sterowalny lokalnie w obszarze D, w przedziale $[t_0,t_1]$.

D o w ó d. Dowód twierdzenia 2.4.1 przebiega analolicznie jako dowód twierdzenia 2.3.1, z tą tylko różnicą, że zamiast przestrzeni $C_n[t_0,t_1]$ rozpatruje się jej podzbiór E. W związku z tym, powtarzając dowód twierdzenia 2.3.1, z zamianą $C_n[t_0,t_1]$ na podzbiór E, otrzymuje się tezę twierdzenia 2.4.1.

Wniosek 2.4.1. Jeżeli założenia twierdzenia 2.4.1 są spełnione dla:

1) pewnego $t_1 > t_0$ przy ustalonym t_0,

2) każdego $t_1 > t_0$ przy ustalonym t_0,

3) dowolnego t_0 oraz każdego $t_1 > t_0$,

wówczas układ dynamiczny (2.4.1) jest odpowiednio:

1) sterowalny lokalnie w obszarze D, w chwili t_0,

2) całkowicie sterowalny lokalnie w obszarze D, w chwili t_0,

3) całkowicie sterowalny lokalnie w obszarze D.

D o w ó d. Wniosek 2.4.1 wynika z twierdzenia 2.4.1 oraz z definicji 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4.

Wniosek 2.4.2. Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 2.4.1, wówczas układ dynamiczny (2.3.11) jest sterowalny lokalnie w obszarze D w przedziale $[t_0,t_1]$ dla dostatecznie małych wartości ε.

D o w ó d. Wniosek 2.4.2 wynika z twierdzenia 2.3.2 oraz z twierdzenia 2.4.1. Dowód wniosku przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 2.3.2 z tą tylko różnicą, że zamiast przestrzeni $C_n[t_0,t_1]$ rozpatruje się jej podzbiór E.

Uwaga 2.4.1. Uwagi poczynione w podrozdziale 2.3, a dotyczące globalnej sterowalności, są słuszne także dla przypadku lokalnej sterowalności w obszarze $D \subset R^n$.

Uwaga 2.4.2. Warunki wystarczające lokalnej sterowalności w obszarze D gwarantują, że trajektoria układu dynamicznego (2.4.1), odpowiadająca sterowaniu realizującemu przejście ze stanu $x(t_0) \in D$ do stanu $x_1 \in D$, leży całkowicie w podzbiorze $E \subset C_n[t_0,t_1]$. Ma to istotne znaczenie w przypadku, gdy występują ograniczenia nałożone na współrzędne stanu układu dynamicznego.

Uwaga 2.4.3. W przypadku gdy $f(t,x) = 0$, wówczas zmniejszając odpowiednio stałą K_0 uzyskuje się spełnienie nierówności (2.4.6), przy zadanej wartości stałej K.

Przykład 2.4.1. Niech będzie dany układ dynamiczny postaci (2.4.1), opisany następującymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi:

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) + \frac{x_2(t)}{1 - x_1^2(t)x_2^2(t)}$$

$$\dot{x}_2(t) = u_2(t)$$

określonymi dla $t \in [0, 0{,}01]$, $|x_1| \leqslant 0{,}1$, $|x_2| \leqslant 0{,}1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 0{,}01$.

Zatem na podstawie równania (2.4.1) otrzymuje się następujące zależności:

$$A(t,x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t,x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(t,x) = \begin{bmatrix} \dfrac{x_2(t)}{1 - x_1^2(t)x_2^2(t)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd, uwzględniając postać macierzy $A(t,x)$, uzyskuje się macierz tranzycji układu $F(t,t_0;y) = F(t;y) = F(t) = I$, I - macierz jednostkowa.

Zatem, na podstawie wzoru (2.2.10), otrzymuje się macierz sterowalności postaci następującej:

$$W(t_0,t_1;y) = W(0, 0{,}01) = \int_0^{0{,}01} I \, dt = 0{,}01 \, I$$

Stałe ograniczające przyjmują więc odpowiednio następujące wartości:

$$K = 0{,}1, \quad N = 0, \quad M = 1, \quad K_f = 0{,}2$$

Na podstawie wzoru (2.4.7) stała $K_w = 4$.

Stałą K_D dobiera się tak, aby spełniona była nierówność (2.4.6). Zatem

$$0{,}1 \geqslant 9 \, K_D + 0{,}01$$

Stąd otrzymuje się następujące oszacowanie od góry stałej K_D

$$K_D \leqslant 0{,}01.$$

Zatem, na podstawie twierdzenia 2.4.1, rozpatrywany układ dynamiczny jest lokalnie wokół zera sterowalny w przedziale $[0, 0{,}01]$.

Powyższy przykład jest modyfikacją przykładu zawartego w pracy [69], gdzie uzyskano analogiczny wynik, jednak na drodze odmiennego postępowania.

Rozpatrywany układ dynamiczny nie może być globalnie sterowalny ze względu na zerowanie się mianownika funkcji $f(t,x)$ dla $x_1(t) = 1$ oraz $x_2(t) = 1$.

Mozliwe są liczne modyfikacje tego przykładu, polegające na uwzględnieniu w funkcji wektorowej $f(t,x)$ niezerowego elementu w drugim wierszu.

ROZDZIAŁ 3

STEROWALNOŚĆ NIELINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z OPÓŹNIENIAMI W STEROWANIU

3.1. Wprowadzenie

Problematyka sterowalności niestacjonarnych, nieliniowych układów dynamicznych, z opóźnieniami w sterowaniu lub w stanie układu, jest stosunkowo ubogo reprezentowana w literaturze, a metody badania nastręczają liczne trudności. Spowodowane jest to z jednej strony nieliniowością układu dynamicznego, a z drugiej strony nieskończoną wymiarowością przestrzeni stanów, wynikającą z istnienia opóźnień.

Z licznych metod badania sterowalności układów nieliniowych, przytoczonych w podrozdziale 2.1, dla przypadku występowania opóźnień najlepiej nadają się metody bazujące na zastosowaniu twierdzeń o punktach stałych odwzorowań nieliniowych. Szczególnie przydatne, podobnie jak w przypadku układów dynamicznych bez opóźnień, jest twierdzenie Schaudera o punkcie stałym. We wszystkich przytoczonych poniżej publikachach wykorzystywano do badania sterowalności właśnie twierdzenie Schaudera, przy czym stosowano je w różnych przestrzeniach Banacha, co z kolei implikowało konieczność użycia różnych kryteriów zwartości zbiorów (w przypadku przestrzeni funkcji ciągłych wykorzystuje się twierdzenie Arzela-Ascoli o zwartości zbiorów).

W pracy [67] sformułowano warunki wystarczające względnej sterowalności nieliniowych układów dynamicznych z opóźnieniami w stanie układu. Publikacje [51], [52], [53], [115] dotyczą zagadnień względnej i absolutnej sterowalności nieliniowych, neutralnych układów dynamicznych. Natomiast w pracach [173], [179], [185], [187], [361] podano szereg warunków wystarczających względnej sterowalności nieliniowych układów dynamicznych ze skupionymi i rozłożonymi opóźnieniami w sterowaniu.

Należy zaznaczyć, że jedną z zasadniczych trudności występujących przy stosowaniu twierdzenia Schaudera o punkcie stałym jest konieczność określenia a priori podzbioru, w którym działa operator nieliniowy. Trudność tę można częściowo ominąć, wykorzystując tzw. miary niezwartości zbiorów w przestrzeniach Banacha [360].

W niniejszym rozdziale zostaną sformułowane warunki wystarczające względnej globalnej oraz lokalnej sterowalności, niestacjonarnych, nieliniowych

układów dynamicznych z wielokrotnymi, zmiennymi w czasie,skupionymi opóźnieniami w sterowaniu. Omówione będą także pokrótce zagadnienia absolutnej sterowalności tych układów.

3.2. Opis układu dynamicznego i podstawowe definicje [173], [179], [185], [187]

Niech będzie dany niestacjonarny, nieliniowy, skończenie wymiarowy układ dynamiczny, z wielokrotnymi, zmiennymi w czasie opóźnieniami w sterowaniu, opisany następującym równaniem różniczkowym zwyczajnym:

$$\dot{x}(t) = A(t,x(t))x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} B_i(t,x(t))u(v_i(t)) \quad t \in [t_0,t_1] \quad (3.2.1)$$

gdzie:

$x(t) \in R^n$ jest wektorem stanu chwilowego układu dynamicznego (3.2.1)
$A(t,x)$ jest n x n - wymiarową macierzą, której elementy $a_{ij}(t,x)$, $i = 1,2,3,\ldots,n$, $j = 1,2,3,\ldots,n$ są przy ustalonym t ciągłymi funkcjami x oraz przedziałami ciągłymi funkcjami t przy ustalonym x,
$B_i(t,x)$, $i = 0,1,2,3,\ldots,M$, są n x p - wymiarowymi macierzami, których elementy $b^i_{jk}(t,x)$, $i = 0,1,2,\ldots,M$, $j = 1,2,3,\ldots,n$, $k=1,2,3,\ldots p$ są przy ustalonym t ciągłymi funkcjami x oraz przedziałami ciągłymi funkcjami t przy ustalonym x, funkcje $v_i(t)$, $i = 0,1,2,3,\ldots,M$ spełniają założenia zamieszczone w podrozdziale 1.2, a ponadto są klasy $C^{(1)}[t_0,t_1]$,
$u \in PC_p[v_M(t_0),t_1]$ klasa funkcji przedziałami ciągłych w przedziale $[v_M(t_0),t_1]$, o wartościach w przestrzeni R^p.

Zakłada się, że prawa strona równania (3.2.1) spełnia warunki gwarantujące jednoznaczność rozwiązania.
Ponadto zakłada się że macierze $A(t,x)$, $B_i(t,x)$, $i = 0,1,2,3,\ldots,M$ spełniają następujące dodatkowe założenia:

$$|a_{ij}(t,x)| \leqslant N, \quad \text{dla } t \in [t_0,t_1], \; x \in R^n, \; i = 1,2,3,\ldots,n, \; j = 1,2,3,\ldots,n \quad (3.2.2)$$

$$|b^i_{jk}(t,x)| \leqslant Q_i, \quad \text{dla } t \in [t_0,t_1], \; x \in R^n, \; i = 0,1,2,\ldots,M, \; j = 1,2,3,\ldots,n, \; k = 1,2,3,\ldots,p \quad (3.2.3)$$

gdzie N oraz Q_i, $i = 0,1,2,\ldots,M$, są dodatnimi stałymi.

Ponieważ układ dynamiczny (3.2.1) jest układem dynamicznym z opóźnieniami w sterowaniu, więc oprócz stanu chwilowego $x(t) \in R^n$ wprowadza się pojęcia tzw. stanu zupełnego w chwili t, $z_t = \{x(t), u_t\}$ [11], [220], [222], [297], [298], gdzie $u_t(s) = u(s)$ dla $s \in [v_M(t), t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Ze względu na fakt, że rozpatrywany układ dynamiczny (3.2.1) jest układem niestacjonarnym, nieliniowym oraz z opóźnieniami w sterowaniu, wprowadza się następujące rodzaje sterowalności: względną globalną (lokalną) sterowalność w przedziale $[t_0, t_1]$, względną globalną (lokalną) sterowalność w chwili t_0, absolutną globalną (lokalną) sterowalność w przedziale $[t_0, t_1]$, absolutną globalną (lokalną) sterowalność w chwili t_0 [49], [50], [60], [129], [220], [222], [261], [297], [298].

Definicja 3.2.1. Układ dynamiczny (3.2.1) nazywa się układem względnie globalnie (lokalnie w obszarze $D \subset R^n$) sterowalnym w przedziale $[t_0, t_1]$, jeżeli dla każdego początkowego stanu zupełnego $z_{t_0} = \{x(t_0), u_{t_0}\}$ $(x(t_0) \in D)$ oraz dla każdego wektora $x_1 \in R^n$ $(x_1 \in D)$ istnieje sterowanie $u \in PC_p[t_0, t_1]$ takie, że odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria $x(t, z_{t_0}, u)$ układu dynamicznego (3.2.1) spełnia warunek: $x(t_1, z_{t_0}, u) = x_1$.

Definicja 3.2.2. Układ dynamiczny (3.2.1) nazywa się układem względnie globalnie (lokalnie w obszarze $D \subset R^n$) sterowalnym w chwili t_0, jeżeli istnieje $t_1 \in (t_0, \infty)$ takie, że układ dynamiczny (3.2.1) jest względnie globalnie (lokalnie w obszarze $D \subset R^n$) sterowalnym w przedziale $[t_0, t_1]$.

Definicja 3.2.3. Układ dynamiczny (3.2.1) nazywa się układem absolutnie globalnie (lokalnie w obszarze $D \subset R^n$) sterowalnym w przedziale $[t_0, t_1]$ $(t_0 < v_M(t_1))$, jeżeli dla każdego początkowego stanu zupełnego $z_{t_0} = \{x(t_0), u_{t_0}\}$ $(x(t_0) \in D)$ oraz dla każdego końcowego stanu zupełnego $z_{t_1} = \{x_1, u_{t_1}\}$ $(x_1 \in D)$ istnieje sterowanie $u \in PC_p[t_0, t_1]$, takie, że $u(s) = u_{t_1}(s)$ dla $s \in [v_M(t_1), t_1)$ oraz odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria $x(t, z_{t_0}, u)$ układu dynamicznego (3.2.1) spełnia następujący warunek: $x(t_1, z_{t_0}, u) = x_1$.

Definicja 3.2.4. Układ dynamiczny (3.2.1) nazywa się układem absolutnie globalnie (lokalnie w obszarze $D \subset R^n$) sterowalnym w chwili t_0, jeżeli istnieje $t_1 \in (r_M(t_0), \infty)$ takie, że układ dynamiczny (3.2.1) jest absolutnie globalnie (lokalnie w obszarze $D \subset R^n$) sterowalny w przedziale $[t_0, t_1]$.

Przy założeniu, że $t_0 < v_M(t_1)$, pomiędzy powyższymi rodzajami sterowalności zachodzą następujące implikacje:
absolutna globalna (lokalna) sterowalność w przedziale $[t_0, t_1] \Longrightarrow$ absolutna globalna (lokalna) sterowalność w chwili $t_0 \Longrightarrow$ względna globalna (lokalna) sterowalność w przedziale $[t_0, t_1] \Longrightarrow$ względna globalna (lokalna) sterowalność w chwili t_0.

Uwaga 3.2.1. W pracy [185] rozpatrywano nieco szerszą klasę układów dynamicznych, a mianowicie niestacjonarne, nieliniowe układy dynamiczne, w których występowało zarówno skupione, jak i rozłożone opóźnienie w sterowaniu. Rozłożone opóźnienie sterowania występowało w całce typu Lebesgue'a-Stieltjesa. Uzyskane w niniejszym rozdziale wyniki przenoszą się (po pewnych modyfikacjach obliczeniowych, dotyczących sterowania u) na przypadek rozłożonych opóźnień sterowania.

3.3. Warunki względnej globalnej sterowalności [173], [179], [185], [187]

W niniejszym podrozdziale zostaną sformułowane warunki wystarczające względnej globalnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego postaci (3.2.1).

Podstawiając w równaniu (3.2.1) zamiast argumentu $x(t)$ $(t \in [t_0,t_1])$ w macierzach $A(t,x(t))$, $B_i(t,x(t))$, $i = 0,1,2,\ldots,M$ dowolną funkcję $y \in C_n[t_0,t_1]$ otrzymuje się równanie

$$\dot{x}(t) = A(t,y(t))x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} B_i(t,y(t))u(v_i(t)) \qquad t \in [t_0,t_1] \tag{3.3.1}$$

Dla każdej ustalonej funkcji $y \in C_n[t_0,t_1]$ układ dynamiczny (3.3.1) jest liniowym układem z opóźnieniami w sterowaniu, którego trajektoria, przy zadanym początkowym stanie zupełnym $z_{t_0} = \{x(t_0),u_{t_0}\}$ oraz sterowaniu $u \in PC_p[t_0,t_1]$, jest dana następującym wzorem całkowym:

$$x(t,z_{t_0},u;y) = F(t,t_0;y)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(t,s;y) \sum_{i=0}^{i=M} B_i(x,y)u(v_i(s))ds \tag{3.3.2}$$

gdzie $F(t,t_0;y)$ jest macierzą tranzycji niestacjonarnego układu liniowego postaci (2.2.9).

Wykorzystując oznaczenia oraz przekształcenia zamieszczone w podrozdziałach 1.2 oraz 1.3 na podstawie wzoru (3.3.2) uzyskuje się następujące zależności:

$$x(t_i,z_{t_0},u;y) = x(t_i,z_{t_0},0;y) + x(t_i,0,u;y) \tag{3.3.3}$$

gdzie

$$x(t_1,z_{t_0},0;y) = F(t_1,t_0;y)x(t_0) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=m} \int_{v_i(t_0)}^{t_0} F(t_1,r_i(s);y)B_i(r_i(s),y)\dot{r}_i(s)u_{t_0}(s)ds +$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{i=M} \int_{v_i(t_0)}^{v_i(t_1)} F(t_1,r_i(s);y)B_i(r_i(s),y)\dot{r}_i(s)u_{t_0}(s)ds \qquad (3.3.4)$$

$$x(t_1,0,u;y) = \sum_{i=0}^{i=m} \int_{v_i(t_0)}^{v_i(t_1)} F(t_1,r_i(s);y)B_i(r_i(s),y)\dot{r}_i(s)u(s)ds \qquad (3.3.5)$$

Ponadto, dla skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenia:

$$G_i(t_1,t;y) = \sum_{j=0}^{j=i} F(t_1,r_i(t);y)B_i(r_i(t),y)\dot{r}_i(t) \quad i = 0,1,2,\ldots,M \qquad (3.3.6)$$

$$R^n \ni q(z_{t_0},x_1;y) = x_1 - x(t_1,z_{t_0},0) \qquad (3.3.7)$$

$G_i(t_1,t;y)$, $i = 0,1,2,\ldots,M$ są $n \times p$ - wymiarowymi macierzami, natomiast $q(z_{t_0},x_1;y)$ jest dla ustalonej funkcji $y \in C_n[t_0,t_1]$ stałym n- wymiarowym wektorem zależnym wyłącznie od początkowego stanu zupełnego z_{t_0} oraz końcowego stanu chwilowego x_1.

Macierz sterowalności $W(t_0,t_1;y)$ dla układu dynamicznego (3.3.1) jest postaci [177]:

$$W(t_0,t_1;y) = \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} G_i(t_1,t;y)G_i^T(t_1,t;y)dt \qquad (3.3.8)$$

TWIERDZENIE 3.3.1. Jeżeli przy ustalonych t_0 oraz t_1 spełnione są założenia dotyczące układu dynamicznego (3.2.1), sformułowane w podrozdziale 3.2, a ponadto istnieje stała dodatnia c taka, że zachodzi następująca nierówność:

$$\inf_{y \in C_n[t_0,t_1]} \det W(t_0,t_1;y) \geqslant c \qquad (3.3.9)$$

wówczas układ dynamiczny (3.2.1) jest względnie globalnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$.

D o w ó d. Dowód twierdzenia 3.3.1, podobnie jak w przypadku układu dynamicznego bez opóźnień w sterowaniu, jest oparty na sformułowanym w podrozdziale 2.2 twierdzeniu Schaudera o punkcie stałym odwzorowań nieliniowych.

Niech sterowanie $u \in PC_p[t_0,t_1]$ będzie dane następującym wzorem:

$$u(t) = G_i^T(t_1,t;y)W^{-1}(t_0,t_1;y)q(z_{t_0},x_1;y)$$

$$\text{dla } t \in [v_{i+1}(t_1),v_i(t_1)], \quad i = 0,1,2,\ldots,(m-1) \tag{3.3.10}$$

gdzie z_{t_0} jest dowolnym początkowym stanem zupełnym układu dynamicznego (3.3.1), natomiast $x_1 \in R^n$ jest dowolnym wektorem.

Wstawiając zależność (3.3.10) do wzoru (3.3.3) oraz uwzględniając równości (3.3.4), (3.3.5), (3.3.6), (3.3.7), (3.3.8) otrzymuje się przebieg trajektorii układu dynamicznego (3.3.1) przy użyciu sterowania postaci (3.3.10):

$$x(t,t_{t_0},u;y) = F(t,t_0;y)x(t_0) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=m(t)} \int_{v_i(t_0)}^{t_0} F(t,r_i(s);y)B_i(r_i(s),y)\dot{r}_i(s)u_{t_0}(s)ds +$$

$$+ \sum_{i=m(t)+1}^{i=M} \int_{v_i(t_0)}^{v_i(t)} F(t,r_i(s);y)B_i(r_i(s),y)\dot{r}_i(s)u_{t_0}(s)ds +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=m(t)} \int_{t_0}^{v_i(t)} F(t,r_i(s);y)B_i(r_i(s),y)\dot{r}_i(s)G_i^T(t_1,s;y)W^{-1}(t_0,t_1;y)q(z_{t_0},x_1;y)ds \tag{3.3.11}$$

gdzie

$$m(t) = \begin{cases} m, & \text{dla } t \in (r_m(t_0), r_{m+1}(t_0)], \quad m = 0,1,2,\ldots,M-1 \\ M, & \text{dla } t > r_M(t_0) \end{cases} \tag{3.3.12}$$

Zatem dla $t = t_1$ na podstawie (3.3.11) otrzymuje się następującą równość:

$$x(t_1,z_{t_0},u;y) = F(t_1,t_0;y)x(t_0) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_i(t_0)}^{t_0} F(t_1,r_i(s);y)B_i(r_i(s),y)\hat{r}_i(s)u_{t_0}(s)ds +$$

$$+ \sum_{i=m}^{i=M} \int_{v_i(t_0)}^{v_i(t_1)} F(t_1,r_i(s);y)B_i(r_i(s),y)\hat{r}_i(s)u_{t_0}(s)ds +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} G_i(t_1,s;y)G_i^T(t_1,s;y)W^{-1}(t_0,t_1;y)(x_1 - x(t_1,z_{t_0},0;y))ds \tag{3.3.13}$$

W równości (3.3.13) wykorzystano w sposób istotny założenie, że $t_0 = v_m(t_1)$ (podrozdział 1.3), dzięki któremu na podstawie (3.3.12) uzyskuje się zależność $m(t_1) = m$. Uwzględniając zależności (3.3.4),(3.3.6),(3.3.7) oraz (3.3.8) na podstawie relacji (3.3.13) otrzymuje się następującą równość:

$$x(t_1,z_{t_0},u;y) = x(t_1,z_{t_0},0;y) + x_1 - x(t_1,z_{t_0},0;y) = x_1 \tag{3.3.14}$$

Z równości (3.3.14) bezpośrednio wynika, że dla każdej funkcji $y \in C_n[t_0,t_1]$ sterowanie $u \in PC_p[t_0,t_1]$ określone wzorem (3.3.10) przeprowadza układ dynamiczny (3.3.1) z dowolnego początkowego stanu zupełnego z_{t_0} do dowolnego wektora $x_1 \in R^n$ w chwili t_1.

W dalszej części dowodu zostanie wykazane, że istnieje co najmniej jedna taka funkcja $y \in C_n[t_0,t_1]$, która jest jednocześnie rozwiązaniem równania różniczkowego postaci (3.2.1). W tym celu zostanie wykorzystane wspomniane poprzednio twierdzenie Schaudera o punkcie stałym odwzorowań nieliniowych. Pierwszym krokiem w tym kierunku będzie sformułowanie nieliniowego operatora $P : C_n[t_0,t_1] \rightarrow C_n[t_0,t_1]$.

Prawa strona równości (3.3.11) definiuje nieliniowy operator $P(y)(t)$, który odwzorowuje przestrzeń Banacha $C_n[t_0,t_1]$ w siebie. Wynika to bezpośrednio z kształtu tego operatora oraz z podstawowych własności całek

[337, str. 111] . Zatem równość (3.3.11) może być przedstawiona w następującej postaci:

$$x(t) = P(y)(t) \qquad t \in [t_0, t_1] \tag{3.3.15}$$

Z ciągłej zależności rozwiązania równania różniczkowego (3.3.1) od parametrów wynika, że operator $P : C_n[t_0,t_1] \to C_n[t_0,t_1]$ jest operatorem ciągłym względem topologii indukowanej przez normę postaci (2.2.6).

Niech $\Psi \subset C_n[t_0,t_1]$ będzie kulą domkniętą o środku w zerze i promieniu $K > 0$, tzn.

$$\Psi = \left\{ y \in C_n[t_0,t_1] \; : \| y \| \leqslant K \right\} \tag{3.3.16}$$

gdzie:

$$K = \left\{ |x(t_0)| + \sum_{i=1}^{i=m} (t_0 - v_i(t_0)) p Q_i K_i K_z \exp(nN(r_i(t_0) - t_0)) + \right.$$

$$+ K_q \left[(t_1 - t_0) pn\, Q_0^2 \exp(2nN(t_1 - t_0)) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=m} (v_i(t_1) - t_0) \left[2pnQ_i K_i \exp(nN(t_1 + v_i(t_1) - r_i(t_0) - t_0)) \right.$$

$$\left. \left. + pnQ_i^2 K_i^2 \exp(2nN(t_1 - r_i(t_0))) \right] \right] \left. \right\} \exp(nN(t_1 - t_0)) \tag{3.3.17}$$

$$K_i = \| \dot{r}_i(t) \| \qquad i = 0,1,2,\ldots,M \tag{3.3.18}$$

$$K_z = \max_{v_M(t_0) \leqslant t \leqslant t_0} |u_{t_0}(t)| \tag{3.3.19}$$

$$K_q = \sup_{y \in C_n[t_0,t_1]} \| W^{-1}(t_0,t_1;y) \| \left[|x_1| \exp(nN(t_1 - t_0)) + |x(t_0)| + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{i=m} pQ_i K_z (t_0 - v_i(t_0)) \exp(nN(r_i(t_0) - t_0)) \right] \tag{3.3.20}$$

Zbiór Ψ jest na mocy (3.3.16) zbiorem domkniętym i wypukłym.

Niech Ω będzie obrazem zbioru Ψ poprzez przekształcenie nieliniowe P, tzn.

$$\Omega = P(\Psi) \tag{3.3.21}$$

Stosując twierdzenie Arzela-Ascoli [337 , ss. 34, 131] można dowieść w analogiczny sposób jak w dodatku, że Ω jest zwartym podzbiorem zbioru Ψ. Ponieważ operator P jest ciągły, więc na podstawie twierdzenia Schaudera istnieje co najmniej jeden punkt stały operatora P. Zatem istnieje przynajmniej jedna funkcja $\bar{y} \in C_n[t_0,t_1]$ taka, że zachodzi następująca równość:

$$\bar{x}(t) = \bar{y}(t) = P(\bar{y})(t) \quad t \in [t_0,t_1] \tag{3.3.22}$$

Poprzez różniczkowanie względem zmiennej t (w sposób analogiczny jak w dodatku) można wykazać, że funkcja $\bar{x}(t)$ określona równością (3.3.22) jest rozwiązaniem równania różniczkowego (3.2.1), odpowiadającym sterowaniu $\bar{u}(t) \in PC_p[t_0,t_1]$ (sterowanie $\bar{u}(t)$ otrzymuje się wstawiając funkcję $\bar{y}(t)$ do wzoru (3.3.10) zamiast dowolnej funkcji $y \in C_n[t_0,t_1]$). W podobny sposób jak w dodatku można sprawdzić, że $\bar{y}(t_0) = x(t_0)$. Ponieważ sterowanie $\bar{u}(t)$ przeprowadza układ dynamiczny (3.2.1) z dowolnego początkowego stanu zupełnego z_{t_0} do dowolnego wektora $x_1 \in R^n$, więc na podstawie definicji 3.2.1 rozpatrywany układ dynamiczny (3.2.1) jest względnie globalnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$.

Wniosek 3.2.1. Jeżeli założenia twierdzenia 3.2.1 są spełnione dla pewnego $t_1 > t_0$, przy ustalonym t_0, wówczas układ dynamiczny (3.2.1) jest względnie globalnie sterowalny w chwili t_0.

D o w ó d. Wniosek 3.2.1 wynika bezpośrednio z twierdzenia 3.2.1 oraz z definicji 3.2.2.

Niech będzie dany układ dynamiczny opisany następującym równaniem różniczkowym:

$$\dot{x}(t) = [A(t,x(t)) + \varepsilon \bar{A}(t,x(t))]\, x(t) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=M} [B_i(t,x(t)) + \varepsilon \bar{B}_i(t,x(t))]\, u(v_i(t)), \quad t \in [t_0,t_1] \tag{3.3.23}$$

gdzie macierze $\bar{A}(t,x(t))$ oraz $\bar{B}_i(t,x(t))$, $i = 0,1,2,\ldots,M$ spełniają założenia poczynione w podrozdziale 3.2, natomiast ε jest dodatnią liczbą rzeczywistą.

Wniosek 3.2.2. Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3.2.1 to układ dynamiczny (3.3.23) jest względnie globalnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ dla małych ε .

D o w ó d. Wniosek 3.2.2 jest konsekwencją twierdzenia 2.3.2,a także rezultatów zawartych w pracach [69] oraz [242].

3.4. Warunki względnej lokalnej sterowalności [172], [179]

Przesłanką uzasadniającą potrzebę rozpatrywania względnej lokalnej sterowalności jest fakt, że z praktycznego punktu widzenia często interesujące są właściwości układu jedynie w pewnym obszarze przestrzeni stanów. Ponadto, w przypadku nieliniowych układów dynamicznych, ich sterowalność w istotny sposób zależy od lokalnych własności tych układów.

W niniejszym podrozdziale, korzystając z rezultatów podrozdziałów 2.4 oraz 3.3, zostaną sformułowane warunki wystarczające względnej lokalnej sterowalności nieliniowych układów dynamicznych z wielokrotnymi,zmiennymi w czasie opóźnieniami w sterowaniu.

Niech będzie dany układ dynamiczny (3.2.1), przy czym oprócz podstawowych założeń sprecyzowanych w podrozdziale 3.2 dodatkowo zakłada się, że macierze $A(t,x)$ oraz $B_i(t,x)$, $i = 0,1,2,\ldots,M$ spełniają następujące ograniczenia:

$$|a_{ij}(t,x)| \leqslant N, \text{ dla } t \in [t_0,t_1], \ |x| \leqslant K, \ i = 1,2,3,\ldots,n, \ j = 1,2,3,\ldots,n \tag{3.4.1}$$

$$|b^i_{jk}(t,x)| \leqslant Q_i, \text{dla } t \in [t_0,t_1], \ |x| \leqslant K, \ i = 0,1,2,\ldots,M, \ j = 1,2,3,\ldots,n, \ k = 1,2,3,\ldots,p \tag{3.4.2}$$

gdzie N oraz Q_i, $i = 0,1,2,\ldots,M$, są stałymi dodatnimi.

Niech $D \subset R^n$ oraz $E \subset C_n[t_0,t_1]$ będą podzbiorami określonymi w sposób następujący:

$$D = \left\{x \in R^n \quad |x| \leqslant K_D\right\} \tag{3.4.3}$$

$$E = \left\{y \in C_n[t_0,t_1] \ : \ \|y\| \leqslant K\right\} \tag{3.4.4}$$

przy czym $K_D < K$ są stałymi dodatnimi związanymi między sobą następującą zależnością:

$$K > \left\{K_D + \sum_{i=1}^{i=m} (t_0 - v_i(t_0))pQ_iK_iK_z\exp(nN(r_i(t_0) - t_0)) + \right.$$

$$\left. + K_q\left[(t_1 - t_0)pnQ_0^2\exp(2nN(t_1 - t_0)) + \right.\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{i=m}(v_i(t_1)-t_0)\Big[2pnQ_iK_i\exp(nN(t_1+v_i(t_1)-r_i(t_0)-t_0))+$$

$$+pnQ_i^2K_i^2\exp(2nN(t_1-r_i(t_0)))\Big]\Big\}\exp(nN(t_1-t_0)) \qquad (3.4.5)$$

gdzie K_i, $i=0,1,2,\ldots,M$ oraz K_z są dane odpowiednio wzorami (3.3.18) oraz (3.3.19), natomiast stała K_q wyraża się następującą zależnością:

$$K_q=\sup_{y\in C_n[t_0,t_1]}\|W^{-1}(t_0,t_1;y)\|\Big[K_D\exp(nN(t_1-t_0))+K_D+$$

$$+\sum_{i=1}^{i=m}pQ_iK_z(t_0-v_i(t_0))\exp(nN(r_i(t_0)-t_0))\Big] \qquad (3.4.6)$$

Zależności (3.4.5) oraz (3.4.6) są konsekwencją wzorów (3.3.17) oraz (3.3.20), a także faktu, że zgodnie z definicją 3.2.1 $x(t_0)\in D$ oraz $x_1\in D$, czyli $|x(t_0)|\leqslant K_D$, $|x_1|\leqslant K_D$.

TWIERDZENIE 3.4.1. Jeżeli dla ustalonych t_0 oraz t_1 spełnione są założenia dotyczące układu dynamicznego (3.2.1) oraz zachodzą nierówności (3.4.1), (3.4.2) oraz (3.4.5), a ponadto istnieje stała dodatnia c taka, że zachodzi nierówność

$$\inf_{y\in E}\det W(t_0,t_1;y)\geqslant c \qquad (3.4.7)$$

wówczas układ dynamiczny (3.2.1) jest względnie, lokalnie w obszarze D, sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$.

D o w ó d. Dowód twierdzenia 3.4.1 przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 3.3.1, z tą tylko różnicą, że zamiast przestrzeni $C_n[t_0,t_1]$ rozpatruje się jej podzbiór E. W związku z tym, powtarzając dowód twierdzenia 3.3.1 z zamianą przestrzeni $C_n[t_0,t_1]$ na jej podzbiór E, otrzymuje się tezę twierdzenia 3.4.1.

Wniosek 3.4.1. Jeżeli założenia twierdzenia 3.4.1 są spełnione dla pewnego $t_1>t_0$ przy ustalonym t_0, wówczas układ dynamiczny (3.2.1) jest względnie, lokalnie w obszarze D, sterowalny w chwili t_0.

D o w ó d. Wniosek 3.4.1 wynika bezpośrednio z twierdzenia 3.4.1 oraz z definicji 3.2.2.

Wniosek 3.4.2. Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3.4.1, wówczas układ dynamiczny (3.3.23) jest względnie, lokalnie sterowalny w obszarze D w przedziale $[t_0,t_1]$, dla dostatecznie małych wartości ε.

D o w ó d. Wniosek 3.4.2 wynika z twierdzenia 3.4.1 oraz z wniosku 3.3.2.

Uwaga 3.4.1. Obszar lokalnej sterowalności $D \subset R^n$ w przypadku układów dynamicznych bez opóźnień w sterowaniu zależał jedynie od długości przedziału oraz od stałych K_f, N, M. W przypadku względnej lokalnej sterowalności układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu jej obszar $D \subset R^n$ jest zależny dodatkowo jeszcze od przebiegu funkcji $r_i(t)$ (stała K_i, $i = 0,1,2,\ldots,M$), a także od przebiegu sterowania $u_{t_0}(t)$, $t \in [v_M(t_0), t_0]$ (stała K_z). Tym niemniej, ponieważ w równaniu (3.2.1) nie występuje funkcja $f(t,x)$ ($K_f = 0$), zawsze można, na drodze odpowiedniego zmniejszenia stałych K_D oraz K_z, zapewnić spełnienie nierówności (3.4.5). Wynika to bezpośrednio z postaci nierówności (3.4.5) oraz ze wzoru (3.4.6).

Uwaga 3.4.2. Fakt, że obszar $D \subset R^n$ względnej, lokalnej sterowalności jest zależny od stałej K_z, pozwala na jego powiększenie poprzez zmniejszenie zbioru sterowań wchodzących w skład początkowych stanów zupełnych układu dynamicznego.

Uwaga 3.4.3. Rezultaty niniejszego podrozdziału można rozszerzyć na przypadek występowania w równaniu (3.2.1) funkcji $f(t,x)$, co jednak prowadzi do znacznych komplikacji natury obliczeniowej.

3.5. Uwagi o absolutnej, globalnej oraz lokalnej sterowalności [358]

W literaturze dotyczącej sterowalności nieliniowych układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu brak dotychczas opracowań traktujących o absolutnej globalnej oraz lokalnej sterowalności tych układów dynamicznych. Wydaje się, że najodpowiedniejszą drogą prowadzącą do rozwiązania tych zagadnień jest wykorzystanie rezultatów przedstawionych w podrozdziałach 1.4, 3.3 oraz 3.4, a więc oparcie się na twierdzeniu Schaudera o punkcie stałym odwzorowań nieliniowych. Zastosowanie twierdzenia 1.4.1, w połączeniu z twierdzeniami 3.3.1 oraz 3.4.1 umożliwi otrzymanie warunków wystarczających absolutnej globalnej lub lokalnej sterowalności omawianych układów dynamicznych.

Możliwe jest również bezpośrednie zastosowanie twierdzenia Schaudera o punkcie stałym w podobny sposób jak w pracy [51]. Pociąga to jednak za sobą konieczność stosowania przestrzeni Banacha typu $L_q[t_0,t_1]$, co wiąże się z nieciągłością sterowania $u(t)$, $t \in [t_0,t_1]$. Kryteria zwartości zbiorów w takich przestrzeniach są znacznie bardziej skomplikowane niż w przypadku przestrzeni funkcji ciągłych (gdzie można stosować twierdzenie Arzela-Ascoli) i wymagają użycia rozbudowanego aparatu analizy funkcjonalnej.

Pewne nadzieje na uproszczenie kryteriów badania absolutnej globalnej oraz lokalnej sterowalności można wiązać z pojęciem relatywnej miary nie-

zwartości zbiorów w przestrzeniach Banacha. Zastosowanie relatywnej miary niezawartości nie wymaga badania zwartości zbioru przeciwdziedziny operatora nieliniowego, a tym samym upraszcza nieco procedurę badania sterowalności. Tym niemniej miara niezwartości ma także swoje mankamenty,z których najważniejszym jest brak ogólnych metod jej stosowania w konkretnych przestrzeniach.

Definicje 3.2.3 oraz 3.2.4 w części odnoszącej się do lokalnej sterowalności w obszarze $D \subset R^n$ mogą być również sformułowane w taki sposób, aby uwzględniały lokalny charakter stanu zupełnego, tzn. $z_{t_0} \subset D \times D_u$, gdzie $D_u \subset PC_p[t_0, t_1]$.

Należy zaznaczyć, że przy stosowaniu twierdzeń o punktach stałych odwzorowań nieliniowych nie otrzymuje się rozwiązania zagadnienia sterowania z minimalną energią. Co więcej, nie uzyskuje się również jednoznaczności sterowania, co jest wynikiem niejednoznaczności punktu stałego w twierdzeniu Schaudera. W celu uzyskania jednoznaczności należałoby stosować twierdzenie Banacha o odwzorowaniach zwężających, co z kolei prowadziłoby do znacznie silniejszych założeń odnośnie do samego układu dynamicznego.

Podobnie jak dla względnej sterowalności, także dla absolutnej sterowalności istnieje możliwość uwzględnienia rozłożonych opóźnień w sterowaniu, jak również funkcji $f(t,x)$.

ROZDZIAŁ 4

STEROWALNOŚĆ LINIOWYCH, CIĄGŁYCH, NIESKOŃCZENIE WYMIAROWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z OPÓŹNIENIAMI W STEROWANIU

4.1. Wprowadzenie oraz oznaczenia

W ciągu ostatnich kilku lat w literaturze światowej ukazało się wiele pozycji dotyczących różnych rodzajów sterowalności liniowych, ciągłych układów dynamicznych, określonych w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych, głównie w przestrzeniach Banacha oraz Hilberta [10], [16], [17], [31], [81], [82], [91], [93], [99], [104], [107], [135], [136], [137], [193], [196], [233], [257], [326], [328], [330], [331]. Brak natomiast opracowań dotyczących kryteriów sterowalności dla wyżej wymienionej klasy układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu. Pragnąc wypełnić tę lukę, w niniejszym rozdziale sformułowano szereg kryteriów dla różnych rodzajów sterowalności tych układów.

Z faktu, że w układzie dynamicznym występują opóźnienia w sterowaniu, wynika potrzeba rozpatrywania sterowalności względnej i absolutnej, natomiast nieskończony wymiar przestrzeni, w której dany układ dynamiczny jest określony, implikuje konieczność rozróżnienia pomiędzy dokładną a aproksymacyjną sterowalnością. Stąd dla układów dynamicznych nieskończenie wymiarowych z opóźnieniami w sterowaniu wprowadza się następujące rodzaje sterowalności: względną aproksymacyjną sterowalność, względną dokładną sterowalność, absolutną aproksymacyjną sterowalność, absolutną dokładną sterowalność. Rozpatruje się układy dynamiczne z wielokrotnymi, zmiennymi w czasie opóźnieniami w sterowaniu, określone w przestrzeniach Banacha lub Hilberta, przy czym przykładami tych ostatnich są układy dynamiczne opisane równaniami różniczkowymi cząstkowymi (typu parabolicznego z mieszanymi warunkami brzegowymi).

Rezultaty niniejszego rozdziału są uogólnieniami, na przypadek występowania opóźnień w sterowaniu, wyników uzyskanych w pracach [91], [95], [326], [330] dla układów dynamicznych bez opóźnień. Uzyskane w niniejszym rozdziale kryteria sterowalności będą zastosowane do badania sterowalności układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego z mieszanymi warunkami brzegowymi oraz sterowaniami rozłożonymi i brzegowymi (rozdział 5).

Terminologia użyta w niniejszym rozdziale jest zgodna z terminologią stosowaną w pracach [91], [95], [326], [330].

Niech X oraz U będą przestrzeniami Banacha. Przestrzeń Banacha wszystkich ograniczonych operatorów z przestrzeni U do przestrzeni X oznacza się symbolem $\mathcal{L}(U,X)$, w szczególności, dla skrócenia zapisu, stosuje się oznaczenie $\mathcal{L}(X,X) = \mathcal{L}(X)$. Jeżeli P jest operatorem, to D(P), R(P), N(P) oznaczają odpowiednio: dziedzinę, przeciwdziedzinę (zbiór wartości), oraz jądro (podprzestrzeń zerową) operatora P. Symbol X^* oznacza przestrzeń dualną do przestrzeni X, natomiast $x^* \in X^*$ - ciągły funkcjonał liniowy określony na przestrzeni X, przy czym dla przestrzeni Hilberta zachodzi równość $X^* = X$. Operator sprzężony do operatora $P \in \mathcal{L}(U,X)$ jest oznaczony symbolem $P^* \in \mathcal{L}(X^*, U^*)$. Operator identycznościowy w przestrzeni $\mathcal{L}(X)$ jest oznaczony symbolem I, natomiast $|\cdot|_X$ oznacza normę, a 0_X - element zerowy w przestrzeni X. Ponadto, jeżeli X jest przestrzenią Hilberta, to wówczas $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ oznacza iloczyn skalarny w tej przestrzeni.

Domknięcie dowolnego zbioru $E \subset X$ jest oznaczone $\bar{E}$, wyjątkowo przez cl(E). Jeżeli E_n, $n = 0,1,2,\ldots$ są podprzestrzeniami przestrzeni X, to symbole $sp\{E_n,\ n \geq 0\}$ lub $sp\{E_n,\ n = 0,1,2,\ldots\}$ oznaczają liniową otoczkę tych podprzestrzeni [326], [337, str. 37]. Przy dowodzeniu większości twierdzeń niniejszego rozdziału wykorzystuje się następujący, znany [326], [330], wniosek z twierdzenia Banacha-Hahna: "Jeżeli E jest dowolną podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej X, to $\bar{E} = X$ wtedy i tylko wtedy, gdy jedynym liniowym ciągłym funkcjonałem zerującym się na podprzestrzeni E jest funkcjonał zerowy".

Obecnie przytoczymy szereg założeń i własności dotyczących operatora A, które będą wykorzystywane w następnych podrozdziałach.

Niech $A : X \supset D(A) \to R(A) \subset X$ będzie liniowym, domkniętym, nieograniczonym operatorem o gęstej dziedzinie, tzn. $\overline{D(A)} = X$, spełniającym jedno z następujących założeń:

H 1. A jest infinitezymalnym generatorem silnie ciągłej półgrupy lub grupy (klasy C_0) liniowych, ograniczonych operatorów S(t);

H 2. Spełnione jest założenie H 1 oraz $R(S(t)) \subset D(A) \subset X$ dla każdego $t > 0$;

H 3. Operator A generuje analityczną półgrupę S(t), $t > 0$, tzn. $\mathcal{D}_a(A) = X$, gdzie $\mathcal{D}_a(A)$ oznacza zbiór wektorów analitycznych dla półgrupy (grupy) S(t) [330].

Pomiędzy powyższymi założeniami zachodzą następujące implikacje: H 3 $\Longrightarrow$ H 2 $\Longrightarrow$ H 1. Zależności pomiędzy podprzestrzeniami $D_\infty(A) = \bigcap_{n=1}^{n=\infty} D(A^n)$, $(\overline{D_\infty(A)} = X)$ oraz $\mathcal{D}_a(A)$, a także związki tych podprzestrzeni z różniczkowalnością półgrupy S(t) są dokładnie wyjaśnione w pracy [330].

W przypadku gdy X jest przestrzenią Hilberta, przytoczymy jeszcze dwa dodatkowe założenia, do których będziemy się odwoływać w następnych podrozdziałach.

H 4. Operator A jest operatorem normalnym o zwartej rezolwencie $R(\lambda,A)$, gdzie $\lambda \in \varrho(A)$, $\varrho(A)$ zbiór rezolwenty;

H 5. Operator A jest samosprzężony.

Wiadomo [330], że dla operatora A, spełniającego założenie H 4, jego widmo $\sigma(A)$ jest widmem punktowym i składa się całkowicie z izolowanych wartości własnych operatora A, λ_k, $k = 1,2,3,\ldots$, z których każda ma skończoną krotność l_k, $k = 1,2,3,\ldots$, równą wymiarowości odpowiedniej podprzestrzeni własnej. Ponadto, istnieje w tym przypadku zupełny, ortonormalny zbiór wektorów własnych x_{kq}, $k = 1,2,3,\ldots$, $q = 1,2,\ldots,l_k$, odpowiadających wartościom własnym λ_k, $k = 1,2,3,\ldots$ [330].

4.2. Opis układu dynamicznego i podstawowe definicje [186], [193]

Niech będzie dany liniowy, abstrakcyjny układ dynamiczny, z wielokrotnymi, zmiennymi w czasie opóźnieniami w sterowaniu, opisany następującym równaniem różniczkowym:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} B_i u(v_i(t)) \qquad t \in [t_0,t_1] \qquad (4.2.1)$$

gdzie:

$x(t) \in X$ - przestrzeń Banacha;

$\dot{x}(t)$ jest silną pochodną (w sensie normy w przestrzeni X);

funkcje $v_i(t)$, $i = 0,1,2,\ldots,M$ spełniają założenia poczynione w rozdziale 2;

$u \in L_1([v_M(t_0),t_1], U)$, U - przestrzeń Banacha;

$B_i \in \mathcal{L}(U,X)$ dla $i = 0,1,2,\ldots,M$

operator A spełnia hipotezę H 1.

Wiadomo [10], [16], [17], [31], [91], [93], [135], [136], [137], [193], [257], [330], że przy zadanym początkowym stanie zupełnym $z_{t_0} = \{x(t_0), u_{t_0}\}$, gdzie $x(t_0) \in X$, $u_{t_0} = u(s) \in L_1([v_M(t_0),t_0], U)$, istnieje jednoznaczne tzw. słabe rozwiązanie równania różniczkowego (4.2.1), dane następującym wzorem całkowym:

$$x(t) = S(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} S(t - s) \sum_{i=0}^{i=M} B_i u(v_i(s))ds \qquad (4.2.2)$$

Całka we wzorze (4.2.2) jest rozumiana w sensie Bochnera [10] i jest dobrze określona dla $u \in L_1([v_M(t_0),t_1], U)$.

Oprócz układu dynamicznego postaci (4.2.1) będą rozpatrywane także szczególne przypadki tego układu, a mianowicie: sterowań skończenie wymiarowych oraz stałych opóźnień.

W przypadku skończenie wymiarowej przestrzeni sterowań $U = R^p$, operatory $B_i \in \mathcal{L}(U,X)$, $i = 0,1,2,\ldots,M$ można przedstawić w następującej formie

$$B_i = [b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{ij}, \ldots, b_{ip}], \quad i = 0,1,2,\ldots,M, \quad j = 1,2,\ldots,p, \quad b_{ij} \in X \tag{4.2.3}$$

i wówczas układ dynamiczny (4.2.1) przyjmie postać następującą:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} \sum_{j=1}^{j=p} b_{ij} u_j(v_i(t)) \qquad t \in [t_0,t_1] \tag{4.2.4}$$

W przypadku stałych opóźnień w sterowaniu, tzn. $v_i(t) = t - h_i$, $i = 0,1,2,\ldots,M$ oraz $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_i \ldots < h_M$, układy dynamiczne (4.2.1) oraz (4.2.4) będą układami dynamicznymi stacjonarnymi ($t_0 = 0$) postaci następującej:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} B_i u(t - h_i) \qquad t \in [0,t_1] \tag{4.2.5}$$

oraz

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} \sum_{j=1}^{j=p} b_{ij} u_j(t - h_i) \qquad t \in [0,t_1] \tag{4.2.6}$$

Dla skrócenia zapisu układy dynamiczne (4.2.1), (4.2.4), (4.2.5) oraz (4.2.6) będą w dalszej części niniejszego rozdziału oznaczane odpowiednio symbolami SV_{∞}^{M}, SV_{p}^{M}, SH_{∞}^{M} SH_{p}^{M} (górny indeks oznacza ilość opóźnień w sterowaniu, natomiast dolny indeks oznacza wymiarowość przestrzeni sterowań, litera V oznacza układ niestacjonarny, litera H układ stacjonarny). Przykładowo, układ dynamiczny bez opóźnień oznacza się symbolem SV_{∞}^{0} lub SV_{p}^{0}.

Ponieważ podprzestrzenie liniowe nieskończenie wymiarowych przestrzeni topologicznych nie zawsze są domknięte, więc istnieje potrzeba wprowadzenia pojęcia aproksymacyjnej oraz dokładnej sterowalności [10], [16], [17], [31], [81], [91], [135], [193], [233], [257], [326], [330].

Definicja 4.2.1. Układ dynamiczny (4.2.1) nazywa się układem względnie aproksymacyjnie (dokładnie) sterowalnym w przedziale $[t_0,t_1]$, jeżeli dla każdego początkowego stanu zupełnego $z_{t_0} = \{x(t_0), u_{t_0}\}$, każdego wektora $x_1 \in X$ oraz każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0, (\varepsilon = 0)$, istnieje sterowanie $u \in L_1([t_0,t_1], U)$ takie, że odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria $x(t,z_{t_0},u)$ układu dynamicznego (4.2.1) spełnia następujący warunek:

$$\|x(t_1,z_{t_0},u) - x_1\|_X \leqslant \varepsilon \tag{4.2.7}$$

Definicja 4.2.2. Układ dynamiczny (4.2.1) nazywa się układem absolutnie aproksymacyjnie (dokładnie) sterowalnym w przedziale $[t_0,t_1] / t_0 < v_M(t_1)/$, jeżeli dla każdego początkowego stanu zupełnego $z_{t_0} = \{x(t_0), u_{t_0}\}$, każdego końcowego stanu zupełnego $z_{t_1} = \{x_1, u_{t_1}\}$ oraz każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon = 0)$ istnieje sterowanie $u \in L_1([t_0,t_1], U)$ takie, że $u(s) = u_{t_1}(s)$ dla $s \in [v_M(t_1),t_1)$ oraz odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria układu dynamicznego (4.2.1), $x(t,z_{t_0},u)$ spełnia następujący warunek:

$$\|x(t_1,z_{t_0},u) - x_1\|_X \leqslant \varepsilon \tag{4.2.8}$$

Modyfikacje powyższych definicji dla przypadku układów dynamicznych (4.2.4), (4.2.5), (4.2.6) są oczywiste i nie będą przytaczane.

4.3. Warunki względnej aproksymacyjnej sterowalności [186], [193]

Przy zadanym stanie początkowym zupełnym $z_{t_0} = \{x(t_0), u_{t_0}\}$, po prostych przekształceniach, na podstawie (4.2.2) uzyskuje się następującą formę rozwiązania $x(t,z_{t_0},u)$:

$$x(t,z_{t_0},u) = x(t,z_{t_0},0) + x(t,0,u) \tag{4.3.1}$$

gdzie

$$x(t,z_{t_0},0) = S(t - t_0)x(t_0) + \sum_{i=0}^{i=m(t)} \int_{v_i(t_0)}^{t_0} S(t \quad r_i(s)B_i\dot{r}_i(s)u_{t_0}(s)ds +$$

$$+ \sum_{i=m(t)+1}^{i=M} \int_{v_i(t_0)}^{v_i(t)} S(t - r_i(s))B_i \dot{r}_i(s) u_{t_0}(s) ds \qquad (4.3.2)$$

$$x(t,0,u) = \sum_{i=0}^{i=m(t)} \int_{t_0}^{v_i(t)} S(t - r_i(s))B_i \dot{r}_i(s) u(s) ds \qquad (4.3.3)$$

$$m(t) = \begin{cases} m, & \text{dla } t \in (r_m(t_0), r_{m+1}(t_0)], \quad m = 0,1,2,\ldots,M-1 \\ M, & \text{dla } t > r_M(t_0) \end{cases} \qquad (4.3.4)$$

Dla układu dynamicznego (4.2.1) zbiór osiągalny w chwili t_1 z zerowego początkowego stanu zupełnego w chwili t_0 jest postaci następującej:

$$K_{[t_0,t_1]} = \left\{ x(t_1,0,u) \in X : u \in L_1([t_0,t_1], U) \right\} =$$

$$= \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{i=m(t_1)} \chi_{[t_0,v_i(t_1)]} \dot{r}_i(t) S(t_1 - r_i(t)) B_i u(t) dt \in X : u \in L_1([t_0,t_1], U) \right\} =$$

$$= \left\{ \int_{t_0}^{t_1} G(t)u(t)dt \in X : u \in L_1([t_0,t_1], U) \right\} \qquad (4.3.5)$$

gdzie funkcja $G : [v_M(t_0), t_1] \to \mathcal{L}(U,X)$ jest określona w sposób następujący:

$$G(t) = \sum_{i=0}^{i=M} \chi_{[v_i(t_0),v_i(t_1)]} \dot{r}_i(t) S(t - r_i(t)) B_i$$

TWIERDZENIE 4.3.1. Następujące warunki są równoważne:

(i) Układ dynamiczny SV_∞^M jest aproksymacyjnie względnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$.

(ii) $\bar{K}_{[t_0,t_1]} = X$ (4.3.6)

(iii) $x^*(G(t)) = 0$, dla $t \in [t_0,t_1]$ oraz wszystkich $x^* \in X^* \Longrightarrow x^* = 0_{X^*}$ (4.3.7)

D o w ó d. Równoważność (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) wynika bezpośrednio z zależności (4.3.5) oraz z definicji 4.2.1. Równoważność (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) wynika z wniosku z twierdzenia Banacha-Hahna (podrozdział 4.1), zastosowanego do zbioru osiągalnego $K_{[t_0,t_1]}$, a także z formuły (4.3.5). Równoważność (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) jest oczywista.

TWIERDZENIE 4.3.2. Jeżeli $B_i \in \mathcal{L}(U,\mathcal{P}_a(A))$ dla $i = 0,1,2,\ldots,m(t_1)$ oraz funkcje $v_i(t)$ są analityczne w przedziale $(r_i(t_0),t_1)$ dla $i = 0,1,2,\ldots,m(t_1)$, wówczas układ dynamiczny SV_∞^M jest względnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ dynamiczny bez opóźnień w sterowaniu o postaci następującej:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,w(t) \tag{4.3.8}$$

gdzie $B = [B_0,B_1,\ldots,B_i,\ldots,B_{m(t_1)}]$, $w \in L_1([t_0,t_1], W)$, $W = U^{m(t_1)+1}$ jest aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[r_{m(t_1)}(t_0),t_1]$.

D o w ó d. Ponieważ funkcje $v_i(t)$ są silnie rosnące oraz analityczne w przedziałach $[r_i(t_0),t_1]$, więc $\dot{r}_i(t) > 0$ oraz są analityczne w przedziałach $(t_0,v_i(t))$, $i = 0,1,\ldots,m(t_1)$. Zatem, ponieważ $B_i \in \mathcal{L}(U,\mathcal{P}_a(A))$, funkcja $G(t)$ jest kawałkami analityczna w przedziale $[t_0,t_1]$ oraz na mocy zależności (4.3.5) otrzymuje się następującą implikację:

$$x^*(G(t)) = x^*\left(\sum_{i=0}^{i=m(t_1)} \chi_{[t_0,v_i(t_1)]}\,\dot{r}_i(t)S(t - r_i(t))B_i\right) = 0,$$

dla $t \in [t_0,t_1]$, $x^* \in X^* \Longrightarrow x^* = 0_{X^*}$, która jest równoważna następującym implikacjom:

$$x^*(S(t_1 - r_i(t))B_i = 0, \text{ dla } t \in [t_0,v_i(t_1)],\ x^* \in X^*,$$
$$i = 0,1,2,\ldots,m(t_1) \Longrightarrow x^* = 0_{X^*}.$$

Na podstawie analityczności funkcji $S(t_1 - r_i(t)B_i$ dla $i = 0,1,\ldots,m(t_1)$ powyższa implikacja jest równoważna następującej implikacji:

$$x^*(S(t_1 - t)B_i) = 0, \quad \text{dla } t \in [r_i(t_0),t_1],\ x^* \in X^*,$$
$$i = 0,1,\ldots,m(t_1) \Longrightarrow x^* = 0_{X^*} \tag{4.3.9}$$

Ponieważ implikacja (4.3.9) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[r_{m(t_1)}(t_0),t_1]$ układu dynamicznego (4.3.8) [91], [95], [330], więc teza twierdzenia 4.3.2 została dowiedziona.

Uwaga 4.3.1. Dla skrócenia zapisu w poniższych wnioskach indeksy n,i,j przyjmują następujące wartości $n = 0,1,2,\ldots$, $i = 0,1,2,\ldots,m(t_1)$, $j = 1,2,3,\ldots,p$ i w przypadku gdy nie prowadzi to do nieporozumień będą opuszczane.

Wniosek 4.3.1. Jeżeli założenia twierdzenia 4.3.2 są spełnione, to warunkiem wystarczającym względnej aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego SV_∞^M jest, aby:

$$\overline{sp}\left\{A^n BW_\infty,\ n = 0,1,2,\ldots\right\} = X \tag{4.3.10}$$

lub ogólniej

$$\overline{sp}\left\{A^n S(t)BW_\infty,\ n = 0,1,2,\ldots\right\} = X$$
$$\text{dla dowolnego } t \text{ z przedziału } [r_{m(t_1)}(t_0),t_1] \tag{4.3.11}$$

gdzie $W_\infty = \left\{w \in W:\ Bw \in D_\infty(A)\right\}$

W przypadku gdy operator A spełnia również założenie H 2, warunek (4.3.11) może być osłabiony przez zastąpienie podprzestrzeni BW_∞ podprzestrzenią BW. Jeżeli podprzestrzeń BW_∞ jest gęsta w podprzestrzeni BW ($\overline{BW_\infty} = BW$), to warunkiem koniecznym względnej aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego SV_∞^M jest, aby

$$\overline{sp}\left\{A^n S(t)BW_\infty,\ n = 0,1,2,\ldots\right\} = X \quad \text{dla dowolnego } t > 0. \tag{4.3.12}$$

Jeżeli dodatkowo spełnione jest również założenie H3, wówczas w relacji (4.3.12) podprzestrzeń BW_∞ może być zastąpiona przez podprzestrzeń BW.

W przypadku gdy S(t) jest grupą, wówczas warunek (4.3.12) upraszcza się do postaci

$$\overline{sp}\left\{A^n BW,\ n = 0,1,2,\ldots\right\} = X. \tag{4.3.13}$$

Wniosek 4.3.2. Jeżeli przestrzeń X jest przestrzenią ośrodkową oraz założenia twierdzenia 4.3.2 są spełnione, to warunkiem wystarczającym względnej aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układów dynamicznych SV_p^M lub SH_p^M jest, aby zachodziła relacja

$$\overline{sp}\left\{A^n b_{ij},\ n = 0,1,2,\ldots,\ i = 0,1,2,\ldots,m(t_1),\ j = 1,2,3,\ldots,p\right\} = X$$
$$\text{dla } b_{ij} \in D_\infty(A) \tag{4.3.14}$$

lub ogólniej:

$$\overline{sp}\left\{A^n S(t)b_{ij},\ n = 0,1,2,\ldots,\ i = 0,1,2,\ldots,m(t_1),\ j = 1,2,3,\ldots,p\right\} = X$$
dla $b_{ij} \in D_\infty(A)$ oraz dowolnego t z przedziału $[r_{m(t_1)}(t_0),t_1]$. (4.3.15)

W przypadku gdy operator A spełnia założenie H 2, wówczas w warunku (4.3.15) $b_{ij} \in X$. Warunek konieczny względnej aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układów dynamicznych SV_p^M lub SH_p^M jest postaci następującej:

$$\overline{sp}\left\{A^n S(t)b_{ij},\ n = 0,1,2,\ldots,\ i = 0,1,2,\ldots,m(t_1),\ j = 1,2,3,\ldots,p\right\} = X$$

dla $b_{ij} \in D_\infty(A)$ oraz dowolnego t z przedziału $(0,\infty)$. (4.3.16)

Jeżeli dodatkowo spełniona jest również założenie H 3, wówczas w relacji (4.3.16) $b_{ij} \in X$. W przypadku gdy $S(t)$ jest grupą, warunek (4.3.16) przyjmuje postać następującą:

$$\overline{sp}\left\{A^n b_{ij},\ n = 0,1,2,\ldots,\ i = 0,1,2,\ldots,m(t_1),\ j = 1,2,3,\ldots,p\right\} = X \tag{4.3.17}$$

Uwaga 4.3.2. Dowody wniosków 4.3.1 oraz 4.3.2 wynikają bezpośrednio z dowodu twierdzenia 4.3.2 oraz własności półgrupy $S(t)$ [330], w związku z czym nie będą przytaczane.

Uwaga 4.3.3. Ponieważ liczba $m(t_1)$ zależy od czasu t_1, więc długość przedziału $[t_0,t_1]$ ma istotny wpływ na względną aproksymacyjną sterowalność układu dynamicznego.

Wniosek 4.3.3. Jeżeli $X = R^n$ oraz $U = R^p$, a ponadto założenia o analityczności funkcji $v_i(t)$, $i = 0,1,2,\ldots,M$ są spełnione, to układy dynamiczne SV_p^M oraz SH_p^M są względnie aproksymacyjnie sterowalne w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość:

rząd

$$\left[B_0,B_1,\ldots,B_{m(t_1)},AB_0,AB_1,\ldots,AB_{m(t_1)},\ldots,A^{n-1}B_0,A^{n-1}B_1,\ldots,A^{n-1}B_{m(t_1)}\right] = n \tag{4.3.18}$$

Uwaga 4.3.4. W przypadku układu dynamicznego SH_p^M zachodzą następujące zależności:

$$r_i(t) = t + h_i \quad \text{dla} \quad i = 0,1,2,\ldots,M$$

Uwaga 4.3.5. Wniosek 4.3.3 koresponduje z rezultatami zawartymi w pracy [261, Tw. 1 oraz Tw. 2]. Podobny problem dla niestacjonarnych skończenie wymiarowych układów dynamicznych był rozważany w pracach [175], [177], [180].

4.4. Warunki absolutnej aproksymacyjnej sterowalności [186], [193]

Przy formułowaniu warunków absolutnej aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$, na mocy definicji 4.2.2, zakłada się, że $t_0 < v_M(t_1)$. Założenie to obowiązuje w całym podrozdziale 4.4. Przy tym założeniu, dla danego początkowego stanu zupełnego $z_{t_0} = \{x(t_0),u_{t_0}\}$ danego przebiegu sterowania $u(t) = u_{t_1}(t)$, $t \in [v_M(t_1),t_1]$ oraz dla $u \in L_1([t_0,v_M(t_1)], U)$ rozwiązanie równania 4.2.1 w chwili $t = t_1$ może być przedstawione w postaci następującej:

$$x(t_1,z_{t_0},u) = x_1(t_1,z_{t_0},0) + x_2(t_1,0,u_{t_1}) + x_1(t_1,0,u) \qquad (4.4.1)$$

gdzie

$$x_1(t_1,z_{t_0},0) = S(t-t_0)x(t_0) + \sum_{i=0}^{i=M} \int_{v_i(t_0)}^{t_0} S(t_1 - r_i(t))B_i\dot{r}_i(t)u_{t_0}(t)dt \qquad (4.4.2)$$

$$x_2(t_1,0,u_{t_1}) = \sum_{i=0}^{i=M} \int_{v_M(t_1)}^{v_i(t_1)} S(t_1 - r_i(t))B_i\dot{r}_i(t)u_{t_1}(t)dt \qquad (4.4.3)$$

$$x_1(t_1,0,u) = \int_{t_0}^{v_M(t_1)} \sum_{i=0}^{i=M} S(t_1 - r(t))B_i\dot{r}_i(t)u(t)dt \qquad (4.4.4)$$

Podobnie, jak w podrozdziale 4.3, zbiór osiągalny w chwili $v_M(t_1)$ z zerowego początkowego stanu zupełnego w chwili t_0, $K_{[t_0,v_M(t_1)]}$ jest postaci następującej:

$$K_{[t_0,v_M(t_1)]} = \left\{x(t_1,0,u) \in X : u \in L_1([t_0,v_M(t_1)], U)\right\} =$$

$$= \left\{ \int_{t_0}^{v_M(t_1)} S(v_M(t_1) - t) \sum_{i=0}^{i=M} S(t_1 - v_M(t_1) + \right.$$

$$\left. + t - r_i(t))B_i\dot{r}_i(t)u(t)dt \in X = u \in L_1([t_0,v_M(t_1)], U)\right\} \qquad (4.4.5)$$

TWIERDZENIE 4.4.1. Układ dynamiczny SV_{∞}^{M} jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ dynamiczny bez opóźnień w sterowaniu

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} S(t_1 - v_M(t_1) + t - r_i(t))B_i\dot{r}_i(t)u(t), \quad t \in [t_0,v_M(t_1)] \tag{4.4.6}$$

jest aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[t_0,v_M(t_1)]$.

D o w ó d. Z definicji 4.2.2 oraz z relacji (4.4.1), (4.4.5) wynika, że układ dynamiczny SV_{∞}^{M} jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R_{[t_0,v_M(t_1)]} = X$. Z drugiej strony wiadomo, [91], [95], [326], [330], że zbiór osiągalny określony relacją (4.4.5) jest równocześnie zbiorem osiągalnym w przedziale $[t_0,v_M(t_1)]$ dla układu dynamicznego postaci (4.4.6). Zatem aproksymacyjna sterowalność w przedziale $[t_0,v_M(t_1)]$ układu dynamicznego (4.4.6) jest równoważna absolutnej aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego SV_{∞}^{M}.

Wniosek 4.4.1. Układ dynamiczny SH_{∞}^{M} jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ dynamiczny bez opóźnień w sterowaniu

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} S(h_M - h_i)B_i u(t) \qquad t \in [0,t_1 - h_M] \tag{4.4.7}$$

jest aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,t_1 - h_M]$.

D o w ó d. Ponieważ dla układu dynamicznego SH_{∞}^{M}, $v_i(t) = t - h_i$, dla $i = 0,1,2,\ldots,M$, więc $r_i(t) = t + h_i$ oraz $\dot{r}_i(t) = 1$ dla $i = 0,1,2,\ldots,M$. Zatem

$$S(t_1 - v_M(t_1) + t - r_i(t)) = S(h_M - h_i) \quad \text{dla} \quad i = 0,1,2,\ldots,M,$$

co kończy dowód wniosku 4.4.1.

Wniosek 4.4.2. Jeżeli $S(t)$ jest grupą liniowych ograniczonych operatorów, wówczas układ dynamiczny SV_{∞}^{M} jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ dynamiczny bez opóźnień w sterowaniu

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} S(t - r_i(t))B_i\dot{r}_i(t)u(t) \qquad t \in [t_0,v_M(t_1)] \tag{4.4.8}$$

jest aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[t_0,v_M(t_1)]$.

D o w ó d. Jeżeli $S(t)$ jest grupą liniowych ograniczonych operatorów, wówczas $S^{-1}(t) \in \mathcal{L}(X)$ dla $t \in R$. Zatem na mocy (4.4.5) otrzymuje się następującą równość:

$$K_{[t_0, v_M(t_1)]} = \left\{ S(t_1 - v_M(t_1)) \int_{t_0}^{v_M(t_1)} S(v_M(t_1) - t) \right.$$

$$\left. \sum_{i=0}^{i=M} S(t - r_i(t)) B_i \dot{r}_i(t) u(t) dt \in X \; : \; u \in L_1([t_0, v_M(t_1)], U) \right\} =$$

$$= \left\{ \int_{t_0}^{v_M(t_1)} S(v_m(t_1) - t) \sum_{i=0}^{i=M} S(t - r_i(t)) \right.$$

$$\left. B_i \dot{r}(t) u(t) dt \in X \; : \; u \in L_1([t_0, v_M(t_1)], U) \right\} \qquad (4.4.9)$$

Ponieważ równość (4.4.9) określa jednocześnie zbiór osiągalny dla układu dynamicznego postaci (4.4.8), więc teza wniosku 4.4.2 jest prawdziwa.

Wniosek 4.4.3. Jeżeli $S(t)$ jest grupą liniowych ograniczonych operatorów, to układ dynamiczny SH_{∞}^{M} jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0, t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ dynamiczny bez opóźnień w sterowaniu postaci następującej:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} S(-h_i) B_i u(t) \qquad t \in [0, t_1 - h_M] \qquad (4.4.10)$$

jest aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0, t_1 - h_M]$.

D o w ó d. Ponieważ dla układu dynamicznego SH_{∞}^{M}, $S(t - r_i(t)) = S(t - t - h_i) = S(-h_i)$, $i = 0,1,2,\ldots,M$, więc na mocy wniosku 4.4.2 zachodzi teza wniosku 4.4.3.

Uwaga 4.4.1. Z przytoczonych twierdzeń i wniosków wynika, że absolutna aproksymacyjna sterowalność w przedziale $[t_0, t_1]$ implikuje względną aproksymacyjną sterowalnosc w przedziale $[t_0, t_1]$.

Uwaga 4.4.2. Wniosek 4.4.3 jest uogólnieniem, na przypadek nieskończenie wymiarowej przestrzeni X, rezultatów zawartych w pracy [261, Wn. 3] oraz w pracy [182, Wn.1].

Uwaga 4.4.3. Wniosek 4.4.2 jest uogólnieniem, na przypadek nieskończenie wymiarowej przestrzeni X, rezultatów zawartych w pracy [182,Tw.1].

Uwaga 4.4.4. W niektórych pozycjach literaturowych (np. [11], [261]) rozpatruje się tzw. absolutną zerosterowalność (przyjmując, że $u_{t_1} = 0$), która ze względu na liniowość układu dynamicznego oraz brak degeneracji [222] jest w naszym przypadku równoważna absolutnej sterowalności (zarówno dla aproksymacyjnej, jak i dokładnej sterowalności).

4.5. Sterowalnośc w przestrzeniach Hilberta [186], [193]

Wykorzystując rezultaty podane w poprzednich podrozdziałach, obecnie zostaną sformułowane warunki względnej aproksymacyjnej sterowalności oraz absolutnej aproksymacyjnej sterowalności dla szczególnego przypadku, a mianowicie dla przypadku, gdy przestrzeń X jest przestrzenią Hilberta oraz przestrzeń U jest także przestrzenią Hilberta. Przypadek ten jest szczególnie istotny z praktycznego punktu widzenia, gdyż obejmuje układy dynamiczne opisane równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego.

TWIERDZENIE 4.5.1. Jeżeli X oraz U są przestrzeniami Hilberta, to układ dynamiczny SV_{∞}^{M} jest aproksymacyjnie względnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy samosprzężony operator $W(t_0,t_1) : X \to X$, określony następującą zależnością:

$$W(t_0,t_1) = \sum_{i=0}^{i=m(t_1)-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \sum_{k=0}^{k=i} \dot{r}_k(t)S(t_1-r_k(t))B_kB_k^*S^*(t_1-r_k(t))\dot{r}_k(t)dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{v_{m(t_1)}(t_1)} \sum_{k=0}^{k=m(t_1)} \dot{r}_k(t)S(t_1-r_k(t)B_kB_k^*S^*(t_1-r_k(t))\dot{r}_k(t)dt, \tag{4.5.1}$$

jest dodatnio określony. Ponadto układ dynamiczny SV_{∞}^{M} jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ $(t_0 < v_M(t_1))$ wtedy i tylko wtedy, gdy samosprzężony operator $W_a(t_0,t_1) : X \to X$, określony następującą zależnością:

$$W_a(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{v_M(t_1)} \left(\sum_{i=0}^{i=M} \dot{r}_i(t)S(t_1-r_i(t))B_i\right)\left(\sum_{i=0}^{i=M} B_i^*S^*(t_1-r_i(t)\dot{r}_i(t)\right)dt, \tag{4.5.2}$$

jest dodatnio określony.

D o w ó d. Łatwo można zaobserwować, że zbiór osiągalny $K_{[t_0,t_1]}$, określony relacją (4.3.5), jest faktycznie przeciwdziedziną (zbiorem wartości) liniowego ograniczonego operatora, określonego w przestrzeni dopuszczalnych sterowań i zdefiniowanego relacją (4.3.5). Ponieważ z założenia przestrzenie X oraz U są przestrzeniami Hilberta, więc zbiór wartości operatora jest gęsty w przestrzeni X wtedy i tylko wtedy, gdy operator do niego sprzężony jest iniektywny, co z kolei jest równoważne warunkowi, że samosprzężony operator $W(t_0,t_1)$ jest dodatnio określony. Zatem układ dynamiczny SV^M_∞ jest względnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(t_0,t_1)$ jest dodatnio określony. Zupełnie analogicznie przebiega dowód dla przypadku absolutnej aproksymacyjnej sterowalności, w związku z czym został pominięty.

Uwaga 4.5.1. Należy podkreślić, że twierdzenie 4.5.1 jest prawdziwe bez żadnych dodatkowych założeń o analityczności funkcji $v_i(t)$, i=0,1,2,...,M lub półgrupy S(t).

Uwaga 4.5.2. Twierdzenie 4.5.1 rozszerza, na przypadek zmiennych w czasie opóźnień w sterowaniu, rezultaty podane w pracy [186, Tw. 2]. Podobne wyniki dla układów dynamicznych bez opóźnień w sterowaniu zostały uzyskane w pracy [73].

Uwaga 4.5.3. Jeżeli operatory $W(t_0,t_1)$ lub $W_a(t_0,t_1)$ są dodatnio określone, wówczas istnieją odpowiednie operatory odwrotne, lecz nie muszą być one operatorami ograniczonymi.

TWIERDZENIE 4.5.2. Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Jeżeli operator A spełnia założenia H 1, H 3, H 4, to układ dynamiczny SV^M_p jest względnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące równości:

$$\text{rząd } B_k^{m(t_1)} = l_k \qquad \text{dla} \quad k = 1,2,3,... \tag{4.5.3}$$

gdzie

$$B_k^{m(t_1)} =$$

$$\begin{bmatrix} \langle b_{11},x_{k1}\rangle_X,\ldots,\langle b_{1p},x_{k1}\rangle_X,\langle b_{21},x_{k1}\rangle_X,\ldots,\langle b_{2p},x_{k1}\rangle_X,\ldots,\langle b_{m(t_1)p},x_{k1}\rangle_X \\ \langle b_{11},x_{k2}\rangle_X,\ldots,\langle b_{1p},x_{k2}\rangle_X,\langle b_{21},x_{k2}\rangle_X,\ldots,\langle b_{2p},x_{k2}\rangle_X,\ldots,\langle b_{m(t_1)p},x_{k2}\rangle_X \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \langle b_{11},x_{kl_k}\rangle_X,\ldots,\langle b_{1p},x_{kl_k}\rangle_X,\langle b_{2p},x_{kl_k}\rangle_X,\ldots,\langle b_{2p},x_{kl_k}\rangle_X,\ldots,\langle b_{m(t_1)p},x_{kl_k}\rangle_X \end{bmatrix} \tag{4.5.4}$$

D o w ó d. Dowód twierdzenia 4.5.2 wynika bezpośrednio z wniosku 4.3.2 oraz z rezultatów zawartych w następujących pracach: [95], [291], [330, Tw. 3.4].

Wniosek 4.5.1. Jeżeli założenia twierdzenia 4.5.2 są spełnione, to układ dynamiczny SV_p^M jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ $(t_0 < v_M(t_1))$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące równości:

$$\text{rząd } B_k^M = l_k \quad \text{dla} \quad k = 1,2,3,... \tag{4.5.5}$$

D o w ó d. Ponieważ w przypadku, gdy $t_0 < v_M(t_1)$ zachodzi równość $m(t_1) = M$, więc wniosek 4.5.1 jest konsekwencją twierdzeń 4.5.1 oraz 4.5.2.

Wniosek 4.5.2. Twierdzenie 4.5.2 oraz wniosek 4.5.1 są słuszne także w przypadku gdy operator A zamiast założenia H 3 spełnia założenie H 5.

D o w ó d. W przypadku gdy przestrzeń X jest przestrzenią Hilberta, operator A spełniający założenie H 5 generuje analityczną półgrupę $S(t)$, $t > 0$, liniowych, ograniczonych operatorów [330, p. 3]. Zatem w przypadku przestrzeni Hilberta X założenie H 3 jest równoważne założeniu H 5, co z kolei implikuje tezę wniosku 4.5.2.

W przypadku gdy X oraz U są przestrzeniami Hilberta, można stosunkowo łatwo uzyskać kryteria względnej dokładnej sterowalności oraz absolutnej dokładnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego postaci (4.2.1).

TWIERDZENIE 4.5.3. Jeżeli X oraz U są przestrzeniami Hilberta, to układ dynamiczny SV_∞^M jest względnie dokładnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy operator $W(t_0,t_1)$ określony równością (4.5.1) posiada ograniczony operator odwrotny.

D o w ó d. Niech $C(t_0,t_1)$ będzie liniowym ograniczonym operatorem, $C(t_0,t_1) : L_2([t_0,t_1],U) \to X$, zdefiniowanym następującą równością:

$$C(t_0,t_1)u = \sum_{i=0}^{i=m(t_1)} \int_{t_0}^{v_i(t_1)} \dot{r}_i(t) S(t_1 - r_i(t)) B_i u(t) dt \tag{4.5.6}$$

Zatem, uwzględniając fakt, że $X^* = X$ oraz $U^* = U$, operator sprzężony $C^*(t_0,t_1) : X \to L_2([t_0,t_1],U)$, ma postać następującą:

$$C^*(t_0,t_1)x(t) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{j=i} \dot{r}_j(t) B_j^* S^*(t_1 - r_j(t))x, \text{ dla } t \in (v_{i+1}(t_1), v_i(t_1)], i=0,1,2,\ldots,m(t_1)-1 \\ \sum_{j=0}^{j=m(t_1)} \dot{r}_j(t) B_j^* S^*(t_1 - r_j(t))x, \text{ dla } t \in [t_0, v_{m(t_1)}] \end{cases} \tag{4.5.7}$$

Z definicji 4.2.1 wynika, że układ dynamiczny SV_∞^M jest względnie dokładnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy operator $C(t_0,t_1)$ jest suriektywny, tzn. jego przeciwdziedzina, będąca jednocześnie zbiorem osiągalnym $K_{[t_0,t_1]}$, jest całą przestrzenią X. Ponieważ operator $C(t_0,t_1)$ jest suriektywny wtedy i tylko wtedy, gdy samosprzężony operator $W(t_0,t_1) = C(t_0,t_1)\, C^*(t_0,t_1) : X \to X$ posiada ograniczony operator odwrotny, więc teza twierdzenia 4.5.3 została dowiedziona.

Wniosek 4.5.3. Jeżeli X oraz U są przestrzeniami Hilberta, to układ dynamiczny SV_∞^M jest absolutnie dokładnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy operator $W_a(t_0,t_1)$, określony równością (4.5.2), posiada ograniczony operator odwrotny.

D o w ó d. Wykorzystując definicję 4.2.2 oraz twierdzenie 4.5.3 uzyskuje się bezpośrednio tezę wniosku 4.5.3. Należy jedynie w miejsce operatora $C(t_0,t_1)$ podstawić operator

$$C_a(t_0,t_1)u = \sum_{i=0}^{i=M} \int_{t_0}^{v_M(t_1)} \dot{r}_i(t) B_i S(t_1 - r_i(t)) B_i u(t)\,dt \tag{4.5.8}$$

Stąd $W_a(t_0,t_1) = C_a(t_0,t_1) C_a^*(t_0,t_1)$, co kończy dowód wniosku 4.5.3.

4.6. Sterowanie z minimalną energią [186], [193]

Zagadnienie sterowania z minimalną energią, nieskończenie wymiarowymi, ciągłymi układami dynamicznymi z opóźnieniami w sterowaniu może być efektywnie rozwiązane przy pewnych dodatkowych założeniach. Problematyka ta, podobnie jak w przypadku skończenie wymiarowych układów dynamicznych, wiąże się ściśle z względną dokładną sterowalnością w przedziale $[t_0,t_1]$.

Niech będzie dany układ dynamiczny postaci (4.2.1), przy czym dodatkowo zakłada się, że X oraz U są przestrzeniami Hilberta, $A \in \mathcal{L}(X)$ oraz $u \in L_2([v_M(t_0),t_1], U)$. Założenie ograniczoności operatora A $(A \in \mathcal{L}(X))$ implikuje spełnienie wszystkich założeń wyszczególnionych w podrozdziale 4.1 [326], [330]. Kwadratowy wskaźnik jakości jest postaci:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle u(t),\ R(t)u(t) \right\rangle_U dt \qquad (4.6.1)$$

gdzie $R(t) \in \mathcal{L}(U)$, dla $t \in [t_0,t_1]$ jest samosprzężonym ograniczonym, dodatnio określonym operatorem, posiadającym ograniczony operator odwrotny $R^{-1}(t) \in \mathcal{L}(U)$ dla wszystkich $t \in [t_0,t_1]$.

Dla skrócenia zapasu wprowadza się następujące oznaczenia:

$$G_i(t_1,t) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{j=i} \exp(A(t_1 - r_j(t))B_j, \text{ dla } t \in (v_{i+1}(t_1), v_i(t_1)], i=0,1,2,\ldots,(m(t_1)-1) \\ \sum_{j=0}^{j=m(t_1)} \exp(A(t_1 - r_j(t))B_j, \text{ dla } t \in [t_0, v_{m(t_1)}(t_1)], \ i = m(t_1) \end{cases} \qquad (4.6.2)$$

gdzie $\exp(At) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$, [326], $G_i(t_1,t) \in \mathcal{L}(U,X)$ dla ustalonego $t \in [t_0,t_1]$.

$$X \ni q(z_{t_0},x_1) = x_1 - \sum_{i=0}^{i=m(t_1)} \int_{v_i(t_0)}^{t_0} \exp(A(t_1-r_i(t))B_i u_{t_0}(t)dt - \exp(A(t_1-t_0))x(t_0) -$$

$$- \sum_{i=m(t_1)+1}^{i=M} \int_{v_i(t_0)}^{v_i(t_1)} \exp(A(t_1 - r_i(t))B_i u_{t_0}(t)dt \qquad (4.6.3)$$

$$\mathcal{L}(X) \ni W_R(t_0,t_1) = \sum_{i=0}^{i=m(t_1)-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} G_i(t_1,t)R^{-1}(t)G_i^*(t_1,t)dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{v_{m(t_1)}(t_1)} G_{m(t_1)}(t_1,t)R^{-1}(t)G_{m(t_1)}^*(t_1,t)dt \qquad (4.6.4)$$

$$L_2([t_0,t_1],\ U) \ni u_{opt}(t) = R^{-1}(t)G_i^*(t_1,t)W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1) \qquad (4.6.5)$$

$$\text{dla } t \in (v_{i+1}(t_1),v_i(t_1)],\ i = 0,1,2,\ldots,m(t_1)-1$$
$$\text{dla } t \in [t_0,v_{m(t_1)}(t_1)],\quad i = m(t_1)$$

$W_R(t_0,t_1)$ jest samosprzężonym, półdodatnio określonym operatorem.

Postępując analogicznie jak w przypadku skończenie wymiarowych układów dynamicznych (podrozdział 1.5), można efektywnie rozwiązać problem sterowania z minimalną energią.

TWIERDZENIE 4.6.1. Jeżeli spełniona są powyższe założenia oraz układ dynamiczny (4.2.1) jest względnie dokładnie sterowalny w przedziale $[t_0,t_1]$, to sterowanie $u_{opt}(t)$, zdefiniowane wzorem (4.6.5), przeprowadza układ dynamiczny (4.2.1) z początkowego stanu zupełnego z_{t_0} do zadanego końcowego stanu chwilowego x_1 w chwili t_1. Ponadto, jeżeli $\bar{u} \in L_2([t_0,t_1],U)$ jest dowolnym sterowaniem przeprowadzającym układ dynamiczny (4.2.1) z początkowego stanu zupełnego z_{t_0} do zadanego końcowego stanu chwilowego x_1 w chwili t_1, wówczas zachodzi następująca nierówność:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar{u}(t),\ R(t)\bar{u}(t) \right\rangle_U dt \geqslant \int_{t_0}^{t_1} \left\langle u_{opt}(t),\ R(t)u_{opt}(t) \right\rangle_U dt \qquad (4.6.6)$$

oraz minimalna wartość wskaźnika jakości (4.6.1) jest dana następującą zależnością:

$$J(u_{opt}) = \left\langle q(z_{t_0},x_1),\ W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1) \right\rangle_X \qquad (4.6.7)$$

D o w ó d. Podstawiając (4.6.5) do wzoru (4.2.2) po prostych przekształceniach i uwzględnieniu zależności (4.3.1), (4.3.2), (4.3.3),(4.6.4) otrzymuje się

$$x(t_1,z_{t_0},u_{opt}) = x_1 \qquad (4.6.8)$$

Zatem sterowanie $u_{opt}(t)$ przeprowadza układ dynamiczny (4.2.1) z początkowego stanu zupełnego z_{t_0} do zadanego końcowego stanu chwilowego x_1 w chwili t_1, a ponieważ z założenia $\bar{u}(t)$ spełnia również powyższy warunek, więc na podstawie (4.3.3) otrzymuje się równość

$$\sum_{i=0}^{i=m(t_1)-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} G_i(t_1,t)\bar{u}(t)dt + \int_{t_0}^{v_{m(t_1)}(t_1)} G_{m(t_1)}(t_1,t)\bar{u}(t)dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=m(t_1)-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} G_i(t_1,t)u_{opt}(t)dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{v_{m(t_1)}(t_1)} G_{m(t_1)}(t_1,t)u_{opt}(t)dt \qquad (4.6.9)$$

Po odjęciu stronami i zastosowaniu iloczynu skalarnego otrzymuje się zależność następującą:

$$\left\langle \sum_{i=0}^{i=m(t_1)-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} G_i(t_1,t)(\bar{u}(t) - u_{opt}(t))dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{v_{m(t_1)}(t_1)} G_{m(t_1)}(t_1,\vartheta)(\bar{u}(t)-u_{opt}(t))dt, \right.$$

$$\left. W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1) \right\rangle_X = 0 \qquad (4.6.10)$$

Wykorzystując własności iloczynu skalarnego, na podstawie (4.6.10) uzyskuje się równość

$$\sum_{i=0}^{i=m(t_1)-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \left\langle \bar{u}(t) - u_{opt}(t), R(t)u_{opt}(t) \right\rangle_U dt +$$

$$\int_{t_0}^{v_{m(t_1)}(t_1)} \left\langle \tilde{u}(t) - u_{opt}(t),\ R(t)u_{opt}(t) \right\rangle_U dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \tilde{u}(t) - u_{opt}(t),\ R(t)u_{opt}(t) \right\rangle_U dt = 0 \qquad (4.6.11)$$

Postępując analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 1.5.1, po prostych przekształceniach dochodzi się do następującej nierówności:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \tilde{u}(t),\ R(t)\tilde{u}(t) \right\rangle_U dt \geqslant \int_{t_0}^{t_1} \left\langle u_{opt}(t),\ R(t)u_{opt}(t) \right\rangle_U dt \qquad (4.6.12)$$

Zatem nierówność (4.6.6) została dowiedziona, co kończy pierwszą część dowodu twierdzenia.

W drugiej części dowodu zostanie wykazana prawdziwość wzoru (4.6.7), określającego minimalną wartość wskaźnika jakości $J(u_{opt})$, odpowiadającą sterowaniu optymalnemu u_{opt}.

$$J(u_{opt}) = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle u_{opt}(t),\ R(t)u_{opt}(t) \right\rangle_U dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=m(t_1)-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \Big\langle R^{-1}(t)G_1^*(t_1,t)W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1),$$

$$G_1^*(t_1,t)W_R^{-1}(t_0,t_1)\,q(z_{t_0},x_1)\Big\rangle_U dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{v_{m(t_1)}(t_1)} \Big\langle R^{-1}(t)G_{m(t_1)}^*(t_1,t)W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1),$$

$$G_{m(t_1)}^*(t_1,t)W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1)\Big\rangle_U dt \quad . \qquad (4.6.13)$$

Ponieważ operator $W_R(t_0,t_1)$ jest samosprzężony,więc operator $W^{-1}(t_0,t_1)\in\mathcal{L}(X)$ jest także operatorem samosprzężonym.Stąd wykorzystując własności iloczynu skalarnego oraz operatorów samosprzężonych wskaźnik jakości $J(u_{opt})$ wyrazić można następującym wzorem:

$$J(u_{opt}) = \sum_{i=0}^{i=m(t_1)-1} \int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} \Big\langle q(z_{t_0},x_1),$$

$$W_R^{-1}(t_0,t_1)G_i(t_1,t)R^{-1}(t)G_i^*(t_1,t)W_R^{-1}(t_0,t_1)\cdot q(z_{t_0},x_1)\Big\rangle_X\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{v_{m(t_1)}(t_1)} \Big\langle q(z_{t_0},x_1),$$

$$W_R^{-1}(t_0,t_1)G_{m(t_1)}(t_1,t)R^{-1}(t)G_{m(t_1)}^*(t_1,t)W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1)\Big\rangle_X\, dt =$$

$$= \Big\langle q(z_{t_0},x_1),$$

$$W_R^{-1}(t_0,t_1)\sum_{i=0}^{i=m(t_1)-1}\int_{v_{i+1}(t_1)}^{v_i(t_1)} G_i(t_1,t)R^{-1}(t)G_i(t_1,t)dt\; W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1)+$$

$$+W_R^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{v_{m(t_1)}(t_1)} G_{m(t_1)}(t_1,t)R^{-1}(t)G_{m(t_1)}(t_1,t)dt\; W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1)\Big\rangle_X =$$

$$= \Big\langle q(z_{t_0},x_1),\; W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1)\Big\rangle_X \qquad (4.6.14)$$

Zatem wzór (4.6.7) został dowiedziony. Założenie o względnej dokładnej sterowalności w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego (4.2.1) gwarantuje istnienie $W_R^{-1}(t_0,t_1)\in\mathcal{L}(X)$.

Uwaga 4.6.1. Twierdzenie 4.6.1 może być dowiedzione także przy nieco słabszych założeniach odnośnie do operatora A, jednak na tyle silnych,by mogły zagwarantować względną dokładną sterowalność w przedziale $[t_0,t_1]$ układu dynamicznego postaci (4.2.1), [326] , [330] .

4.7. Uwagi o stabilizowalności oraz o wpływie zakłóceń [358]

Zagadnienie stabilizowalności ciągłych, nieskończenie wymiarowych układów dynamicznych jest znacznie bardziej skomplikowane niż w przypadku skończenie wymiarowych układów dynamicznych. Wynika to między innymi z istnienia wielu nieekwiwalentnych rodzajów stabilności, zależnych od topologii stosowanej w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych [20], [21].

Problematyce tej, ściśle związanej z aproksymacyjną oraz dokładną sterowalnością, poświęcono w ostatnim okresie wiele publikacji [20], [21], [259], [271], [272], [305], [327], [329]. Uzyskane w nich rezultaty zależą w istotny sposób od własności operatora A, a także od rodzaju przestrzeni X oraz przyjętej definicji stabilności.

Prace [20], [21], [259], [305] dotyczą tak zwanej słabej stabilizowalności układów dynamicznych oraz jej związków z aproksymacyjną sterowalnością dla przypadku, gdy X jest przestrzenią Hilberta, natomiast operator A generuje zwężającą półgrupę S(t) ($\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1$ dla $t \geqslant 0$). Ponadto, w pracach tych podana jest ogólna postać stabilizującego sprzężenia zwrotnego zależna w głównej mierze od postaci operatorów sterowanie.

Jedyną pracę dotyczącą stabilizowalności nieskończenie wymiarowych układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu jest publikacja [272], w której podano warunki konieczne i wystarczające stabilizowalności w oparciu o równanie Riccatiego.

Stabilizowalność niestacjonarnych układów dynamicznych bez opóźnień, określonych w przestrzeniach Hilberta, rozpatrywana jest między innymi w publikacjach [233-237], [271], [272], [282-285], [333], gdzie w oparciu o rozwiązania równania Riccatiego sformułowano warunki konieczne i wystarczające różnych rodzajów stabilizowalności.

Istotne z praktycznego punktu widzenia jest określenie wpływu perturbacji operatorów A oraz B_i, $i = 0,1,2,\ldots,M$ na dokładną oraz aproksymacyjną sterowalność. Dla przestrzeni X nieskończenie wymiarowej sytuacja jest nieco odmienna niż dla skończenie wymiarowych układów dynamicznych. Co prawda w literaturze brak dotychczas opracowań tego zagadnienia w odniesieniu do układów z opóźnieniami w sterowaniu, jednak rezultaty uzyskane dla układów bez opóźnień w sterowaniu przenoszę się w całości także na przypadek występowania opóźnień. Dla ograniczonego operatora A, przy założeniu, że X oraz U są przestrzeniami Hilberta, w pracach [238], [239] udowodniono, że zbiór układów dynamicznych dokładnie sterowalnych jest zbiorem otwartym w przestrzeni wszystkich układów, natomiast zbiór układów dynamicznych aproksymacyjnie sterowalnych nie jest ani zbiorem otwartym, ani domkniętym, ani gęstym w tej przestrzeni. W publikacjach tych omówiono także szereg przypadków szczególnych. Przypadek nieograniczonego operatora A jest dokładnie rozpatrzony w pracy [260].

ROZDZIAŁ 5

STEROWALNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH, Z OPÓŹNIENIAMI W STEROWANIU

5.1. Wprowadzenie

Najczęściej spotykaną w praktyce klasę układów dynamicznych określonych w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych są układy dynamiczne opisane równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Jest to oczywiście przypadek nieograniczonego operatora A, zatem do badania sterowalności tej klasy układów dynamicznych można stosować ogólne twierdzenia dotyczące sterowalności w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych [73], [91], [92], [93], [326], [330]. Tym niemniej, ze względu na szereg specyficznych problemów związanych z zagadnieniami sterowalności tych układów, w ostatnich latach ukazało się wiele publikacji dotyczących wyłącznie tej problematyki.

Ogólnie publikacje te można podzielić z grubsza na dwie zasadnicze grupy: jedna dotyczy sterowalności układów cząstkowych typu parabolicznego i należę do niej przede wszystkim prace: [28], [36], [37], [73], [94], [95], [97], [98], [190], [218], [219], [229], [230], [231], [232], [254], [255], [256], [278], [288], [291], [299], [300], [336], [359]. Druga grupa publikacji dotyczy sterowalności układów cząstkowych typu hiperbolicznego, a należą do niej następujące prace: [44], [45], [96], [119], [203], [204], [205], [289]. Natomiast wzajemne zależności pomiędzy sterowalnością układów cząstkowych typu parabolicznego oraz hiperbolicznego wyjaśnione są w pracy [332] w oparciu o teorię półgrup operatorów oraz w pracy [290], w oparciu o twierdzenia analizy harmonicznej. Należy podkreślić, że przy analizowaniu zagadnień sterowalności układów dynamicznych, opisanych równaniami cząstkowymi, istotne znaczenie posiadają następujące czynniki: rodzaj sterowania (rozłożone lub brzegowe), kształt obszaru określoności równania oraz typ warunków brzegowych (Dirichleta, Neumanna lub typu mieszanego).

Problematyce stabilizowalności układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi, ściśle związanej z zagadnieniami sterowalności tych układów, poświęcone są między innymi prace [255] i [333].

W niniejszym rozdziale, wykorzystując w znacznej mierze rezultaty zawarte w rozdziale 4, sformułowane zostaną kryteria względnej aproksymacyjnej sterowalności oraz absolutnej aproksymacyjnej sterowalności układów dy-

namicznych opisanych równaniami różniczkowymi częstkowymi typu parabolicznego z wielokrotnymi stałymi opóźnieniami w sterowaniu.

5.2. Opis układu dynamicznego [190], [194]

Niech będzie dany układ dynamiczny opisany liniowym n-wymiarowym równaniem różniczkowym częstkowym typu parabolicznego, z wielokrotnymi stałymi opóźnieniami w sterowaniu

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x_j^2} + \sum_{i=0}^{i=M} B_i(x)u(t - h_i) \qquad (5.2.1)$$

określonym w prostopadłościanie $D = \left\{ x \in R^n : 0 \leqslant x_j \leqslant d_j, j=1,2,3,\ldots,n \right\}$, dla $t \in [0,T]$, gdzie: $w(t,x) : [0,T]\ R^n \to R$,

d_j, $j = 1,2,3,\ldots,n$ są dodatnimi liczbami rzeczywistymi,

$0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_i < \ldots < h_M$ są stałymi opóźnieniami,

$B_i(s) = \left[b_{i1}(x), b_{i2}(x),\ldots,b_{il}(x),\ldots,b_{ip}(x) \right]^T$, $i = 0,1,2,\ldots,M$ są p-wymiarowymi wektorami o elementach $b_{il}(x) \in L_2(D,R)$, dla $i = 0,1,2,\ldots,M$ oraz $l = 1,2,3,\ldots,p$.

Zakłada się, że sterowania dopuszczalne $u \in L_2([0,T], R^p)$.

Warunki początkowe dla układu dynamicznego (5.2.1) są dane następującymi zależnościami:

$$\lim_{t \to 0^+} w(t,x) = w_0(x) \in L_2(D,R) \qquad (5.2.2)$$

$$u(t) = u_0(t) \in L_2([-h_M,0], R^p) \qquad (5.2.3)$$

gdzie $w_0(x)$ oraz $u_0(t)$ są danymi funkcjami, a granica we wzorze (5.2.2) jest rozumiana w sensie normy w przestrzeni Hilberta $L_2(D,R)$.
Zakłada się, że rozwiązanie $w(t,x)$ równania (5.2.1) spełnia warunek brzegowy Dirichleta

$$w(t,s) = 0 \quad \text{dla} \quad s \in \partial D, \qquad (5.2.4)$$

gdzie ∂D jest brzegiem prostopadłościanu D.

Przy powyższych założeniach istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (5.2.1) [95], [291]. Ponieważ układ dynamiczny (5.2.1) zawiera opóźnienia

w sterowaniu, więc początkowy stan zupełny z_0 jest parą funkcji, tzn. $z_0 = \{w_0(s),\ u_0(t)\} \in L_2(D,R) \times L_2([-h_M,0],\ R^p)$.

W celu wyznaczenia rozwiązania $w(t,x)$ równania (5.2.1), przy zadanym początkowym stanie zupełnym z_0, należy równanie (5.2.1) przedstawić w postaci abstrakcyjnego równania różniczkowego w przestrzeni Hilberta $L_2(D,R)$, [91], [95], [326], [330].

$$\dot{y}(t) = A\,y(t) + \sum_{i=0}^{i=M} B_i u(t - h_i) \qquad t \in [0,T] \tag{5.2.5}$$

gdzie $y(t) = w(t,x) \in L_2(D,R)$

$\dot{y}(t) = \frac{\partial w(t,x)}{\partial t}$ jest pochodną względem normy w przestrzeni Hilberta $L_2(D,R)$

$A : D(A) \to L_2(D,R)$ jest liniowym, nieograniczonym operatorem, określonym równością

$$A(y) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x_j^2} \tag{5.2.6}$$

$$D(A) = \left\{ w(t,x) \in L_2(D,R) : A\,w(t,x) \in L_2(D,R),\ \ w(t,s) = 0 \ \text{ dla } \ s \in \partial D \right\} \tag{5.2.7}$$

Ponadto

$$B_i = \left[b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{il}, \ldots, b_{ip} \right] \qquad i = 0,1,2,\ldots,M \tag{5.2.8}$$

gdzie

$$b_{il} \in L_2(D,R) \qquad i = 0,1,2,\ldots,M, \quad l = 1,2,3,\ldots,p$$

Wiadomo [290], [291], [299], [300], [330], że operator A jest samosprzężony oraz posiada wyłącznie punktowe widmo, które składa się w całości z rzeczywistych wartości własnych

$$\lambda_{\alpha} = \sum_{j=1}^{j=n} c_j^2 \alpha_j^2 \tag{5.2.9}$$

gdzie:

$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n]$ jest wektorem dodatnich, całkowitych indeksów,

$c_j = \frac{\pi}{d_j}$ $\quad j = 1,2,3,\ldots,n$ są liczbami rzeczywistymi

przy założeniu, że liczby rzeczywiste c_j^2, $j = 1,2,3,\ldots,n$ są liniowo niezależne nad pierścieniem liczb całkowitych, wszystkie wartości własne λ_α mają krotność równą jedności, a ponadto znormalizowane funkcje własne $g_\alpha(x)$, odpowiadające wartościom własnym λ_α, są następującej postaci [95], [97], [98], [291], [299]:

$$g_\alpha(x) = 2^{\frac{n}{2}}(d_1 d_2 \ldots d_j \ldots d_n)^{-\frac{1}{2}} \sin(c_1\alpha_1 x_1)$$

$$\sin(c_1\alpha_1 x_2)\ldots\sin(c_j\alpha_j x_j)\ldots\sin(c_n\alpha_n x_n) \qquad (5.2.10)$$

Stąd, można wartości własne uporządkować w sposób następujący

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots. \qquad (5.2.11)$$

przy czym $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$

Zatem każdej wartości własnej λ_k odpowiada funkcja własna $g_k(x)$. Funkcje własne $g_k(x)$, $k = 1,2,3,\ldots$ tworzą ortonormalny układ zupełny w przestrzeni Hilberta $L_2(D,R)$, [95], [98], [290].

Wiadomo [91], [97], [291], [300], [330], że operator A jest infinitezymalnym generatorem samosprzężonej, zwartej oraz analitycznej dla $t > 0$ półgrupy liniowych, ograniczonych operatorów $S(t) : L_2(D,R) \to L_2(D,R)$, określonej w sposób następujący:

$$L_2(D,R) \ni y = \sum_{k=1}^{k=\infty} \langle w(x),\ g_k(x)\rangle_{L_2(D,R)}\, g_k(x) \to$$

$$\to (S(t)y)(x) = \int_D \sum_{k=1}^{k=\infty} \exp(-\lambda_k t) g_k(x) g_k(v) w(v)\,dv =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\infty} \exp(-\lambda_k t)\langle w(v), g_k(v)\rangle_{L_2(D,R)} g_k(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \exp(-\lambda_k t) w_k g_k(x) \qquad (5.2.12)$$

gdzie $w_k = \langle w(v),\ g_k(v)\rangle_{L_2(D,R)}$

Zatem, stosując teorię liniowych równań różniczkowych w przestrzeniach Hilberta [91], [291], [330], jednoznaczne rozwiązanie równania (5.2.5) przy zadanym początkowym stanie zupełnym $z_0 = \{w_0(x), u_0(t)\}$ może być przedstawione w następującej postaci:

$$y(t,z_0,u) = S(t)w_0(x) + \int_0^t S(t-\xi)\sum_{i=0}^{i=M} B_i(x)u(\xi-h_i)d\xi =$$

$$= S(t)w_0(x) + \sum_{i=0}^{i=M}\int_{-h_i}^{t-h_i} S(t-\xi-h_i)B_i(x)u(\xi)d\xi \quad (5.2.13)$$

Po prostych przekształceniach równość (5.2.13) może być przedstawiona w następującej formie:

$$y(t,z_0,u) = S(t)w_0(x) + \sum_{i=0}^{i=m(t)}\int_{-h_i}^{0} S(t-\xi-h_i)B_i(x)u_0(\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{i=m(t)+1}^{i=M}\int_{-h_i}^{t-h_i} S(t-\xi-h_i)B_i(x)u_0(\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=m(t)}\int_{0}^{t-h_i} S(t-\xi-h_i)B_i(x)u(\xi)d\xi =$$

$$= y(t,z_0,0) + y(t,0,u) \quad (5.2.14)$$

gdzie

$$m(t) = \begin{cases} m, & \text{dla } t\in(h_m, h_{m+1}], \quad m = 0,1,2,\ldots,M-1 \\ M, & \text{dla } t > h_M \end{cases} \quad (5.2.15)$$

$$y(t,z_0,0) = S(t)w_0(x) + \sum_{i=0}^{i=m(t)}\int_{-h_i}^{0} S(t-\xi-h_i)B_i(x)u_0(\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{i=m(t)+1}^{i=M} \int_{-h_i}^{t-h_i} S(t - \xi - h_i)B_i(x)u_0(\xi)d\xi \qquad (5.2.16)$$

$$y(t,0,u) = \sum_{i=0}^{i=m(t)} \int_{0}^{t-h_i} S(t - \xi - h_i)B_i(x)u(\xi)d\xi \qquad (5.2.17)$$

Składowa rozwiązania $y(t,z_0,0)$ zależy jedynie od początkowego stanu zupełnego z_0, natomiast składowa rozwiązania $y(t,0,u)$ jest zależna tylko od sterowania $u \in L_2([0,T], R^p)$, a zatem ma ona decydujące znaczenie dl sterowalności układu dynamicznego (5.2.1).

Ponieważ półgrupa $S(t)$ jest zwarta, podobnie jak operatory B_i, $i = 0,1,2,\ldots,M$, więc na podstawie uwagi 4.4.5 układ dynamiczny postaci (5.2.1) nie może być ani względnie dokładnie sterowalny, ani absolutnie dokładnie sterowalny. Zatem, jedynymi rodzajami sterowalności, jakie należy rozpatrywać w odniesieniu do układu dynamicznego (5.2.1) są: względna aproksymacyjna sterowalność oraz absolutna aproksymacyjna sterowalność.

Poniżej, dla wygody Czytelnika, zostaną przytoczone jeszcze raz definicje względnej oraz absolutnej aproksymacyjnej sterowalności, przy użyciu symboliki stosowanej dla układu dynamicznego (5.2.1).

Definicja 5.2.1. Układ dynamiczny (5.2.1) nazywa się układem względnie aproksymacyjnie sterowalnym w przedziale $[0,T]$, jeżeli dla każdego początkowego stanu zupełnego z_0 każdej funkcji $w_T(x) \in L_2(D,R)$ oraz każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje sterowanie $u \in L_2([0,T], R^p)$ takie, że odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria $w(t,x)$ układu dynamicznego (5.2.1) spełnia następujący warunek:

$$\|w(T,x) - w_T(x)\|_{L_2(D,R)} \leq \varepsilon \qquad (5.2.18)$$

Definicja 5.2.2. Układ dynamiczny (5.2.1) nazywa się układem absolutnie aproksymacyjnie sterowalnym w przedziale $[0,T]$ $(h_M < T)$, jeżeli dla każdego początkowego stanu zupełnego z_0, każdego końcowego stanu zupełnego z_T oraz dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje sterowanie $u \in L_2([0,T], R^p)$ takie, że $u(s) = u_{t_1}(s)$ dla $s \in [T - h_M, T)$ oraz odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria $w(t,x)$ układu dynamicznego (5.2.1) spełnia następujący warunek:

$$\|w(T,x) - w_T(x)\|_{L_2(D,R)} \leq \varepsilon \qquad (5.2.19)$$

Korzystając z ogólnych kryteriów sterowalności podanych w rozdziale 4, w następnym podrozdziale zostaną sformułowane warunki konieczne i wystarczające względnej aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[0,T]$ układu dynamicznego (5.2.1).

5.3. Warunki względnej aproksymacyjnej sterowalności [190], [194]

TWIERDZENIE 5.3.1. Układ dynamiczny (5.2.1) jest względnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące nierówności:

$$\sum_{i=0}^{i=m(T)} \sum_{l=1}^{l=p} b_{ilk}^2 \neq 0, \quad \text{dla} \quad k = 1,2,3,... \tag{5.3.1}$$

gdzie

$$b_{ilk} = \langle b_{il}(x),\ g_k(x) \rangle_{L_2(D,R)}, \quad \text{dla} \quad l = 1,2,3,....,p \tag{5.3.2}$$

D o w ó d. Operator A, określony formułą (5.2.6) o dziedzinie danej relacją (5.2.7), spełnia założenia H 1, H 4 oraz H 5 [95], [291], [300] podane w podrozdziale 4.1. Ponadto przestrzeń $L_2(D,R)$, w której określone jest równanie (5.2.1), jest ośrodkową przestrzenią Hilberta [326], [330]. Spełnione są więc wszystkie założenia twierdzenia 4.5.2 (na mocy wniosku 4.5.2, założenie H 3 jest równoważne założeniu H 5). Na podstawie rezultatów podrozdziału 5.2 krotność wartości własnych λ_k jest równa jeden, tzn. $l_k = 1$ dla $k = 1,2,3,...$ Z twierdzenia 4.5.2 wynika, że warunkiem koniecznym i wystarczającym względnej aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[0,T]$ układu dynamicznego (5.2.1) jest, aby:

$$\text{rząd } B_k^{m(T)} = 1 \quad \text{dla} \quad k = 1,2,3,... \tag{5.3.3}$$

gdzie

$$B_k^{m(T)} = \Big[\langle b_{11}, g_k(x) \rangle_{L_2(D,R)}, ..., \langle b_{1p},$$

$$g_k(x) \rangle_{L_2(D,R)}, \langle b_{21},\ g_k(x) \rangle_{L_2(D,R)}, ...$$

$$... \langle b_{2p},\ g_k(x) \rangle_{L_2(D,R)}, ..., \langle b_{m(T)p},\ g_k(x) \rangle_{L_2(D,R)} \Big] \quad k = 1,2,3,... \tag{5.3.4}$$

Wykorzystując zależności (5.3.2) oraz (5.3.4) relacje (5.3.3) można przedstawić w następującej formie:

$$\text{rząd } B_k^{m(T)} = \text{rząd}\left[b_{11k},\ldots,b_{1pk},b_{21k},\ldots,b_{2pk},\ldots,b_{m(T)pk}\right] = 1,\ k=1,2,3,\ldots \tag{5.3.5}$$

Ponieważ relacje (5.3.5) są równoważne relacjom (5.3.1), zatem teza twierdzenia 5.3.1 została dowiedziona.

Wniosek 5.3.1. Jeżeli $T > h_M$, to układ dynamiczny (5.2.1) jest względnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące nierówności:

$$\sum_{i=0}^{i=M}\sum_{l=1}^{l=p} b_{ilk}^2 \neq 0, \quad \text{dla } k = 1,2,3,\ldots \tag{5.3.6}$$

D o w ó d. Jeżeli $T > h_M$, to na podstawie zależności (5.2.15) $m(T) = M$. Zatem teza wniosku 5.3.1 wynika bezpośrednio z twierdzenia 5.3.1.

Wniosek 5.3.2. Jeżeli $T < h_1$, to układ dynamiczny (5.2.1) jest względnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą nierówności

$$\sum_{l=1}^{l=p} b_{0lk}^2 \neq 0, \quad \text{dla } k = 1,2,3,\ldots \tag{5.3.7}$$

D o w ó d. Jeżeli $T < h_1$, to na podstawie zależności (5.2.15) $m(T) = 0$. Zatem teza wniosku 5.3.2 wynika bezpośrednio z twierdzenia 5.3.1.

Wniosek 5.3.3. Jeżeli $M = 1$ oraz $T > h_1$, to układ dynamiczny (5.2.1) jest względnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą nierówności

$$\sum_{l=1}^{l=p} b_{0lk}^2 + \sum_{l=1}^{l=p} b_{1lk}^2 \neq 0, \quad \text{dla } k = 1,2,3,\ldots \tag{5.3.8}$$

D o w ó d. Jeżeli $M = 1$ oraz $T > h_1$, to na podstawie zależności (5.2.15) $m(T) = M = 1$. Zatem teza wniosku 5.3.3 wynika bezpośrednio z twierdzenia 5.3.1.

Uwaga 5.3.1. W przypadku gdy $T < h_1$, z punktu widzenia sterowalności mamy do czynienia z układem dynamicznym bez opóźnień w sterowaniu. Zatem wniosek 5.3.2 jest jednocześnie znanym [231], [291], [330] warunkiem ko-

niecznym i wystarczającym aproksymacyjnej sterowalności układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego, bez opóźnień w sterowaniu.

Uwaga 5.3.2. Kryteria względnej aproksymacyjnej sterowalności uzyskane w niniejszym podrozdziale są słuszne dla innych typów warunków brzegowych i innych obszarów określoności równania (5.2.1), jednakże pod warunkiem, że krotności wartości własnych operatora A będą równe jedności. Zastrzeżenie to jest bardzo istotne, gdyż zmiana warunków brzegowych lub kształtu obszaru określoności równania (5.2.1) wpływa w zasadniczy sposób na krotności wartości własnych operatora A.

5.4. Warunki absolutnej aproksymacyjnej sterowalności [190], [194]

Wykorzystując rezultaty podrozdziału 4.4 (w szczególności wniosek 4.4.1), w niniejszym podrozdziale zostaną sformułowane warunki konieczne i wystarczające absolutnej aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[0,T]$ $(h_M < T)$ układu dynamicznego (5.2.1). Założenie $h_M < T$ obowiązuje w całym podrozdziale 5.4.

TWIERDZENIE 5.4.1. Układ dynamiczny (5.2.1) jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące nierówności:

$$\sum_{l=1}^{l=p}\left(\sum_{i=0}^{i=M}\exp(\lambda_k h_i)b_{ilk}\right)^2 \neq 0, \quad \text{dla} \quad k = 1,2,3,\ldots \qquad (5.4.1)$$

D o w ó d. Na podstawie wniosku 4.4.1 układ dynamiczny (5.2.1) jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ dynamiczny bez opóźnień w sterowaniu, postaci

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x_j^2} + \sum_{i=0}^{i=M} S(h_M - h_i)B_i(x)u(t), \qquad (5.4.2)$$

jest aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,T-h_M]$.

Uwzględniając zależności (5.2.12) oraz (5.2.8) uzyskuje się następujące równości:

$$\sum_{i=0}^{i=M} S(h_M - h_i)B_i(x) = \sum_{i=0}^{i=M}\sum_{k=1}^{k=\infty}\exp(-\lambda_k(h_M - h_i))B_{ik}g_k(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=M} \sum_{k=1}^{k=\infty} \exp(-\lambda_k h_M)\exp(\lambda_k h_i) B_{ik} g_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\infty} \exp(-\lambda_k h_M) \sum_{i=0}^{i=M} \exp(\lambda_k h_i) B_{ik} g_k(x) \qquad (5.4.3)$$

$$B_{ik} = \left[b_{i1k}, b_{i2k}, \ldots, b_{ilk}, \ldots, b_{ipk}\right]^T, \quad i = 0,1,2,\ldots,M, \quad k = 1,2,3,\ldots \qquad (5.4.4)$$

oznacza p-wymiarowy wektor wierszowy.

Stosując do układu dynamicznego (5.4.2) znane-[291], [300], [330] - kryteria aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[0, T - h_M]$ uzyskuje się, że układ dynamiczny (5.2.1) jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left[\sum_{i=0}^{i=M} \exp(\lambda_k h_i) b_{iok}, \sum_{i=0}^{i=M} \exp(\lambda_k h_i) b_{i1k}, \ldots, \sum_{i=0}^{i=M} \exp(\lambda_k h_i) b_{ilk}, \ldots\right.$$

$$\left. \ldots, \sum_{i=0}^{i=M} \exp(\lambda_k h_i) b_{ipk}\right] \neq 0_{R^p}, \quad \text{dla } k = 1,2,3,\ldots \qquad (5.4.5)$$

Ponieważ nierówności (5.4.5) są równoważne nierównościom (5.4.1), więc teza twierdzenia 5.4.1 została dowiedziona.

5.5. Względna aproksymacyjna sterowalność jednowymiarowych układów dynamicznych typu parabolicznego [194]

Wyniki uzyskane w podrozdziałach 4.5 oraz 5.3 mogę być zastosowane do badania względnej aproksymacyjnej sterowalności układów dynamicznych typu parabolicznego ze współczynnikami zależnymi od zmiennych przestrzennych. Niech będzie dany układ dynamiczny S opisany liniowym równaniem różniczkowym częstkowym typu parabolicznego z warunkami brzegowymi typu mieszanego oraz z opóźnieniem w sterowaniu, postaci następującej:

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right) + q(x)w(t,x) +$$

$$+ b_0(x)u(t) + b_h(x)u(t - h) \qquad (5.5.1)$$

określonym dla $(t,x) \in [0,T] \times [0,d]$, gdzie $0 < d$ oraz $0 < h < T$, spełniającym warunki brzegowe

$$(Fw)(t,x) = 0 \tag{5.5.2}$$

oraz warunki początkowe

$$\lim_{t \to 0^+} \|w(t,x) - w_0(x)\|_{L_2[0,d]} = 0, \quad \text{gdzie } w_0(x) \in L_2[0,d] \tag{5.5.3}$$

$$u(t) = u_0(t) \in L_2[-h,0] \tag{5.5.4}$$

gdzie $p(x) \in C^2[0,d]$, $p(x) > 0$, $q(x) \in C[0,d]$, $b_0(x)$, $b_h(x) \in L_2[0,d]$ (5.5.5)

Operator brzegowy $F : H^2[0,d] \to R^2$ ($H^2[0,d]$ jest przestrzenią Sobolewa) jest postaci:

$$(Fw)(t,x) = \begin{bmatrix} a_{00}w(t,0) + a_{10}\frac{\partial w}{\partial x}(t,0) \\ a_{0d}w(t,d) + a_{1d}\frac{\partial w}{\partial x}(t,d) \end{bmatrix} \tag{5.5.6}$$

gdzie $a_{00}, a_{10}, a_{0d}, a_{1d} \in R$, $a_{00}^2 + a_{10}^2 \neq 0$ oraz $a_{0d}^2 + a_{1d}^2 \neq 0$.

W przypadku warunków brzegowych typu Dirichleta ($a_{10} = a_{1d} = 0$, $a_{00} = a_{0d} = 1$) operator brzegowy $F = F_D$ jest postaci następującej:

$$(F_D w)(t,x) = \begin{bmatrix} w(t,0) \\ w(t,d) \end{bmatrix} \tag{5.5.7}$$

a odpowiedni układ dynamiczny oznacza się symbolem S_D.

W przypadku warunków brzegowych typu Neumanna ($a_{00} = a_{0d} = 0$, $a_{10} = a_{1d} = 1$), operator brzegowy $F = F_N$ jest postaci następującej:

$$(F_N w)(t,x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x}(t,0) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(t,d) \end{bmatrix} \tag{5.5.8}$$

a odpowiedni układ dynamiczny oznacza się symbolem S_N.

W szczególnym przypadku, gdy $p(x) = 1$ oraz $q(x) = 0$ dla $x \in [0,d]$, odpowiednie układy dynamiczne oznacza się symbolami $\bar{S}$, $\bar{S}_D$, $\bar{S}_N$.

Dla układu dynamicznego S stan zupełny w chwili $t = 0$, $z_0 = \{w_0(x), u_0(t)\} \in L_2[0,d] \times L_2[-h,0]$. Definicja 5.2.1 względnej aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[0,T]$ pozostaje w mocy dla układu dynamicznego S. Podobnie jak w podrozdziale 5.2, definiuje się liniowy nieograniczony operator $A : D(A) \to L_2[0,d]$ w sposób następujący:

$$(Aw)(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right) + q(x)w(t,x) \qquad (5.5.9)$$

oraz

$$D(A) = \left\{w(t,x) \in L_2[0,d] : (Aw)(t,x) \in L_2[0,d],\ (Fw)(t,x) = 0\right\} \qquad (5.5.10)$$

Wiadomo [97], [231], [290], [291], [299], że operator A jest samosprzężony, a jego wartości własne λ_k, $k = 1,2,3,...$ są rzeczywiste i pojedyncze oraz o krotności równej jeden, a odpowiadające im funkcje własne $g_k(x)$, $x \in [0,d]$, $k = 1,2,3,...$ tworzą ortonormalny układ zupełny w przestrzeni Hilberta $L_2[0,d]$. Ponadto, ponieważ operator A jest infinitezymalnym generatorem silnie ciągłej, analitycznej półgrupy liniowych ograniczonych operatorów, więc wszystkie założenia twierdzenia 4.5.2 są spełnione. Wprowadza się oznaczenia

$$b_{0k} = \int_0^d b_0(x)g_k(x)dx, \quad b_{hk} = \int_0^d b_h(x)g_k(x)dx, \quad k = 1,2,3,... \qquad (5.5.11)$$

TWIERDZENIE 5.5.1. Układ dynamiczny S jest względnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące nierówności:

$$b_{0k}^2 + b_{hk}^2 \neq 0, \quad \text{dla} \quad k = 1,2,3,... \qquad (5.5.12)$$

D o w ó d. Ponieważ spełnione są założenia twierdzenia 4.5.2 oraz twierdzenia 5.3.1, więc można wykorzystać bezpośrednio tezy tych twierdzeń. Zatem, uwzględniając zależności (5.3.1), (5.3.2) oraz (5.5.11), a także fakt, że w przypadku rozpatrywanego układu dynamicznego S sterowanie jest skalarne ($p = 1$), uzyskuje się tezę twierdzenia 5.5.1.

Uwaga 5.5.1. Funkcje własne $g_k(x)$, $k = 1,2,3,...$ operatora A zależą w istotny sposób od typu warunków brzegowych oraz postaci funkcji $p(x)$ i $q(x)$. Tym niemniej, dla równania postaci (5.5.1) oraz warunków brzegowych

postaci (5.5.6), (5.5.7) lub (5.5.8) krotności wartości własnych operatora A λ_k, $k = 1,2,3,...$ są zawsze równe jedności [97], [231], [291], a zatem twierdzenie 5.5.1 jest prawdziwe także dla układów dynamicznych S_D oraz S_N. Dla układów dynamicznych $\bar{S}$, $\bar{S}_D$, $\bar{S}_N$ funkcje własne $g_k(x)$, $k = 1,2,3,...$ można jawnie wyznaczyć stosując rezultaty prac [95], [97], [231], [291], [330].

Uwaga 5.5.2. Układ dynamiczny $\bar{S}_D$ jest szczególnym przypadkiem układu dynamicznego (5.2.1) dla $j = 1$, $M = 1$, $p = 1$, $B_0(x) = b_0(x)$, $B_1(x) = b_h(x)$. Oczywiście w tym przypadku twierdzenie 5.5.1 pokrywa się całkowicie z twierdzeniem 5.3.1.

5.6. Względna, aproksymacyjna, brzegowa sterowalność jednowymiarowych układów dynamicznych typu parabolicznego [194]

W układach dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi mamy do czynienia z dwoma zasadniczymi rodzajami sterowania - sterowaniem rozłożonym oraz sterowaniem brzegowym. Dotychczasowe rezultaty, podane w poprzednich podrozdziałach, dotyczyły wyłącznie sterowania rozłożonego (sterowanie występuje bezpośrednio w równaniu układu). Obecnie zostaną sformułowane warunki konieczne i wystarczające względnej aproksymacyjnej brzegowej sterowalności w przedziale $[0,T]$ dla jednowymiarowego układu dynamicznego S^0

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right) + q(x)w(t,x) \tag{5.6.1}$$

określonego dla $(t,x) \in [0,T] \times [0,d]$, $0 < d$, $0 < h < T$, spełniającego warunki początkowe

$$\lim_{t \to 0^+} \| w(t,x) - w_0(x) \|_{L_2[0,d]} = 0, \text{ gdzie } w_0(x) \in L_2[0,d] \tag{5.6.2}$$

$$u(t) = u_0(t) \in L_2([-h,0], R^2) \tag{5.6.3}$$

oraz warunek brzegowy

$$(Fw)(t,x) = B_0 u(t) + B_h u(t-h) \tag{5.6.4}$$

gdzie operator brzegowy F oraz funkcje $p(x)$, $q(x)$ spełniają założenia poczynione w podrozdziale 5.5, natomiast B_0 oraz B_h są stałymi macierzami 2×2-wymiarowymi, postaci

$$B_0 = \begin{bmatrix} b_{110} & b_{120} \\ b_{210} & b_{220} \end{bmatrix} \qquad B_h = \begin{bmatrix} b_{11h} & b_{12h} \\ b_{21h} & b_{22h} \end{bmatrix} \tag{5.6.5}$$

Podobnie jak w podrozdziale 5.5, układ dynamiczny (5.6.1) z warunkami brzegowymi typu Dirichleta ($F = F_D$) oznacza się symbolem S_D^0, natomiast z warunkami brzegowymi typu Neumanna ($F = F_N$) oznacza się symbolem S_N^0. W szczególnym przypadku, gdy $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, dla $x \in [0,d]$, odpowiednie układy dynamiczne oznacza się symbolami $\bar{S}^0$, $\bar{S}_D^0$, $\bar{S}_N^0$.

Definicja 5.5.1. Układ dynamiczny S^0 nazywa się względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalnym w przedziale $[0,T]$, jeżeli dla dowolnego stanu zupełnego w chwili $t = 0$, $z_0 = \{w_0(x), u_0(t)\} \in L_2[0,d] \times L_2([-h,0], R^2)$, dowolnej funkcji $w_T(x) \in L_2[0,d]$ oraz dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje sterowanie $u \in L_2([0,T], R^2)$ takie, że odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria $w(t,x)$ układu dynamicznego S^0 spełnia warunek

$$\|w(T,x) - w_T(x)\|_{L_2[0,d]} \leq \varepsilon \tag{5.6.6}$$

Definicja 5.5.1 jest modyfikacją (dla sterowania brzegowego) definicji 5.2.1.

W celu wyznaczenia efektywnych kryteriów względnej aproksymacyjnej brzegowej sterowalności w przedziale $[0,T]$ układu dynamicznego S^0, wykorzystane zostaną ogólne rezultaty podrozdziałów 4.5 oraz 5.3. W tym celu wprowadza się następujące oznaczenia:

$$B_{0k} = \begin{bmatrix} f_{0k}, & f_{dk} \end{bmatrix} B_0, \qquad B_{hk} = \begin{bmatrix} f_{0k}, & f_{dk} \end{bmatrix} B_h, \qquad k = 1,2,3,... \tag{5.6.7}$$

gdzie

$$f_{0k} = p(0)\,\frac{a_{00}\frac{dg_k}{dx}(0) - a_{10}g_k(0)}{a_{00}^2 + a_{10}^2}, \qquad f_{dk} = p(d)\,\frac{-a_{0d}\frac{dg_k}{dx}(d) + a_{1d}g_k(d)}{a_{0d}^2 + a_{1d}^2},$$

$$k = 1,2,3,... \tag{5.6.8}$$

TWIERDZENIE 5.6.1. Układ dynamiczny S^0 jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące zależności:

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} B_{0k}, & B_{hk} \end{bmatrix} = 1, \quad \text{dla} \quad k = 1,2,3,... \tag{5.6.9}$$

D o w ó d. Rozwiązanie $w(t,x)$ równania (5.6.1) z warunkami (5.6.3) oraz (5.6.4) można przedstawić w postaci następującego szeregu funkcyjnego [28], [36], [37], [190], [218], [219]:

$$w(t,x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} w_k(t)g_k(x), \quad (t,x) \in [0,T] \times [0,d] \tag{5.6.10}$$

gdzie $w_k(t)$ są współczynnikami rozwinięcia względem zupełnego, ortonormalnego układu $g_k(x)$, $k = 1,2,3,...$ Współczynniki $w_k(t)$, $k = 1,2,3,...$ są jednocześnie rozwiązaniami przeliczalnego układu równań różniczkowych zwyczajnych postaci następującej [218], [219]:

$$\dot{w}_k(t) = \lambda_k w_k(t) + B_{0k}u(t) + B_{hk}u(t-h), \quad k = 1,2,3,... \tag{5.6.11}$$

Zatem układ dynamiczny S^0 jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k = 1,2,3,...$ układ dynamiczny opisany równaniami (5.6.11) jest względnie sterowalny w przedziale $[0,T]$. Stąd, wykorzystując znane [261] warunki konieczne i wystarczające względnej sterowalności w przedziale $[0,T]$ układów dynamicznych postaci (5.6.11), uzyskuje się tezę twierdzenia 5.6.1.

Wykorzystując zależności (5.6.7) oraz (5.6.8), na podstawie twierdzenia 5.6.1, można otrzymać szereg warunków koniecznych i wystarczających względnej aproksymacyjnej brzegowej sterowalności w przedziale $[0,T]$ dla szczególnych przypadków układu dynamicznego S^0. Przypadki te uzyskuje się poprzez specyfikację elementów macierzy B_0 oraz B_h, jak również poprzez zmianę typu warunków brzegowych (układy dynamiczne S_D^0, S_N^0) lub funkcji $p(x)$ oraz $q(x)$ (układy dynamiczne $\bar{S}^0$, $\bar{S}_D^0$, $\bar{S}_N^0$). Poniższe wnioski precyzują warunki konieczne i wystarczające względnej aproksymacyjnej brzegowej sterowalności dla tych przypadków szczególnych. Ponieważ wszystkie te wnioski wynikają bezpośrednio z twierdzenia 5.6.1 oraz zależności (5.6.7) i (5.6.8), więc zostaną one podane bez dowodów.

<u>Wniosek 5.6.1</u>. Układ dynamiczny S_D^0 jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(b_{110}p(0)\frac{dg_k}{dx}(0) - b_{210}p(d)\frac{dg_k}{dx}(d))^2 +$$

$$+ (b_{120}p(0)\frac{dg_k}{dx}(0) - b_{220}p(d)\frac{dg_k}{dx}(d))^2 +$$

$$+ \left(b_{11h}p(0)\frac{dg_k}{dx}(0) - b_{21h}p(d)\frac{dg_k}{dx}(d)\right)^2 +$$

$$+ \left(b_{12h}p(0)\frac{dg_k}{dx}(0) - b_{22h}p(d)\frac{dg_k}{dx}(d)\right)^2 \neq 0 \qquad (5.6.12)$$

dla $k = 1,2,3,\ldots$

Wniosek 5.6.2. Układ dynamiczny S_N^0 jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left(-b_{110}p(0)g_k(0) + b_{210}p(d)g_k(d)\right)^2 + \left(-b_{120}p(0)g_k(0) + b_{220}p(d)g_k(d)\right)^2 +$$

$$+\left(-b_{11h}p(0)g_k(0) + b_{21h}p(d)\right)^2 + \left(-b_{12h}p(0)g_k(0) + b_{22h}p(d)g_k(d)\right)^2 \neq 0$$

dla $k = 1,2,3,\ldots$ (5.6.13)

Wniosek 5.6.3. Jeżeli $b_{120} = b_{210} = b_{12h} = b_{21h} = 0$, to układ dynamiczny S^0 jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left(p(0)\left(a_{00}\frac{dg_k}{dx}(0) - a_{10}g_k(0)\right)\right)^2\left(b_{110}^2 + b_{11h}^2\right) +$$

$$+ \left(p(d)\left(a_{1d}g_k(d) - a_{0d}\frac{dg_k}{dx}(d)\right)\right)^2\left(b_{220}^2 + b_{22h}^2\right) \neq 0, \quad \text{dla} \quad k = 1,2,3,\ldots \qquad (5.6.14)$$

Wniosek 5.6.4. Jeżeli $b_{120} = b_{220} = b_{12h} = b_{22h} = 0$, to układ dynamiczny S^0 jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left(b_{110}p(0)\frac{a_{00}\frac{dg_k}{dx}(0) - a_{10}g_k(0)}{a_{00}^2 + a_{10}^2} + b_{210}p(d)\frac{-a_{0d}\frac{dg_k}{dx}(d) + a_{1d}g_k(d)}{a_{0d}^2 + a_{1d}^2}\right)^2 +$$

$$+\left(b_{11h}p(0)\frac{a_{00}\frac{dg_k}{dx}(0) - a_{10}g_k(0)}{a_{00}^2 + a_{10}^2} + b_{21h}p(d)\frac{-a_{0d}\frac{dg_k}{dx}(d) + a_{1d}g_k(d)}{a_{0d}^2 + a_{1d}^2}\right)^2 \neq 0$$

dla $k = 1,2,3,\ldots$ (5.6.15)

Wniosek 5.6.5. Jeżeli $b_{120} = b_{210} = b_{12h} = b_{21h} = 0$, to układ dynamiczny S_D^0 jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(p(0)\frac{dg_k}{dx}(0))^2(b_{110}^2 + b_{11h}^2) +$$

$$+ (p(d)\frac{dg_k}{dx}(d))^2(b_{220}^2 + b_{22}^2) \neq 0, \quad \text{dla} \quad k = 1,2,3,\ldots \quad (5.6.16)$$

Wniosek 5.6.6. Jeżeli $b_{120} = b_{220} = b_{12h} = b_{22h} = 0$, to układ dynamiczny S_N^0 jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(-b_{110}p(0)g_k(0) + b_{210}p(d)g_k(d))^2 +$$

$$+ (-b_{11h}p(0)g_k(0)g_k(0) + b_{21h}p(d)g_k(d))^2 \neq 0, \quad \text{dla} \quad k = 1,2,3,\ldots \quad (5.6.17)$$

Wniosek 5.6.7. Jeżeli $b_{120} = b_{210} = b_{12h} = b_{21h} = 0$, to układ dynamiczny S_N^0 jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(p(0)g_k(0))^2(b_{110}^2 + b_{11h}^2) +$$

$$+ (p(d)g_k(d))^2(b_{220}^2 + b_{22h}^2) \neq 0, \quad \text{dla} \quad k = 1,2,3,\ldots \quad (5.6.18)$$

Wniosek 5.6.8. Jeżeli $b_{120} = b_{12h} = b_{220} = b_{22h} = 0$, to układ dynamiczny S_D^0 jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(b_{110}p(0)\frac{dg_k}{dx}(0) - b_{210}p(d)\frac{dg_k}{dx}(d))^2 +$$

$$+ (b_{11h}p(0)\frac{dg_k}{dx}(0) - b_{21h}p(d)\frac{dg_k}{dx}(d))^2 \neq 0 \quad \text{dla} \quad k = 1,2,3,\ldots \quad (5.6.19)$$

Przykład 5.6.1. Niech będzie dany układ dynamiczny $\bar{S}_D^0$, dla którego $b_{120} = b_{220} = b_{12h} = b_{22h} = 0$. Wiadomo, [95], [291], [299], że dla powyższego układu dynamicznego wartości własne λ_k, $k = 1,2,3,...$ oraz funkcje własne $g_k(x)$, $k = 1,2,3,...$ mają następującą postać:

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 \qquad k = 1,2,3,... \qquad (5.6.20)$$

$$g_k(x) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left(\frac{k\pi x}{d}\right), \quad x \in [0,d], \quad k = 1,2,3,... \qquad (5.6.21)$$

Stąd

$$\frac{dg_k}{dx}(0) = \frac{k\pi}{d}\sqrt{\frac{2}{d}} \qquad k = 1,2,3,... \qquad (5.6.22)$$

$$\frac{dg_k}{dx}(d) = \frac{k\pi}{d}\sqrt{\frac{2}{d}}(-1)^k \qquad k = 1,2,3,... \qquad (5.6.23)$$

Ponieważ $p(0) = p(d) = 1$, zatem na mocy wniosku 5.6.8, rozpatrywany układ dynamiczny $\bar{S}_D^0$ jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące nierówności:

$$(b_{110} - b_{210}(-1)^k)^2 + (b_{11h} - b_{21h}(-1)^k)^2 \neq 0, \text{ dla } k = 1,2,3,... \qquad (5.6.24)$$

Zależności (5.6.24) są równoważne następującemu warunkowi:

$$|b_{110}| \neq |b_{210}| \quad \text{lub} \quad |b_{11h}| \neq |b_{21h}| \qquad (5.6.25)$$

Warunek (5.6.25) jest najprostszym warunkiem koniecznym i wystarczającym względnej sterowalności w przedziale $[0,T]$ rozpatrywanego układu dynamicznego $\bar{S}_D^0$.

R O Z D Z I A Ł 6

STEROWALNOŚĆ LINIOWYCH, DYSKRETNYCH, NIESKOŃCZENIE WYMIAROWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z OPÓŹNIENIAMI W STEROWANIU

6.1. Wprowadzenie

Równolegle z rozwojem teorii sterowalności ciągłych układów dynamicznych powstawały prace dotyczące zagadnień sterowalności dyskretnych układów dynamicznych opisanych liniowymi równaniami różnicowymi [152], [153], [310], [345]. W przypadku, gdy układ dyskretny otrzymuje się na drodze dyskretyzacji liniowego, ciągłego, skończenie wymiarowego układu dynamicznego, sterowalność układu ciągłego nie zawsze gwarantuje sterowalność układu dyskretnego. Zależne jest to w sposób istotny od wartości własnych macierzy stanu układu ciągłego [18], [40], [89]. Podobnie jak dla ciągłych układów dynamicznych, także w przypadku układów dyskretnych rozpatruje się sterowalność układów złożonych [266].

W ostatnich latach, oprócz układów dyskretnych z jedną zmienną niezależną, rozpatruje się w literaturze także liniowe układy dyskretne skończenie wymiarowe o dwu zmiennych niezależnych, tzw. 2-D układy. Wiąże się to ściśle z zastosowaniem tych układów w teorii dwuwymiarowych filtrów liniowych [101], a także w teorii procesów dwuliniowych [287]. Wśród szeregu prac poświęconych problematyce 2-D układów kilka dotyczy bezpośrednio zagadnień sterowalności tych układów, są to mianowicie prace: [84], [85], [101], [287], [311].

Sterowalność liniowych, skończenie wymiarowych układów dyskretnych z opóźnieniami w stanie lub sterowaniu była rozpatrywana w następujących pracach: [123], [183], [184], [192], [244], [253].

Rozszerzenie rezultatów dotyczących sterowalności liniowych układów dyskretnych na przypadek układów dyskretnych określonych w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha lub Hilberta oraz na analizę wynikających stąd problemów zawierają następujące pozycje literaturowe: [104], [105], [106], [108], [109], [110], [125], [126], [188]. Stosunkowo dużo uwagi poświęcono w nich dyskretnym układom dynamicznym z operatorem przesunięcia, a także problematyce ich realizacji, z wykorzystaniem podprzestrzeni niezmienniczych operatora przesunięcia oraz wektorowych operatorów Hankela [106], [108], [109].

W niniejszym rozdziale zostaną sformułowane warunki konieczne i wystarczające różnych rodzajów sterowalności dla liniowych, dyskretnych,określonych w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Hilberta,układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu.

6.2. Opis układu dynamicznego i podstawowe definicje [183] , [184] , [186]

Podobnie jak w przypadku układów ciągłych, także dla dyskretnych układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu, określonych w przestrzeniach Hilberta, można zdefiniować kilka różnych rodzajów sterowalności.W niniejszym podrozdziale zostaną sformułowane podstawowe definicje sterowalności dla następującego dyskretnego układu dynamicznego z wielokrotnymi opóźnieniami w sterowaniu:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + \sum_{i=0}^{i=M} B_i(k)u(k-i) \qquad k \in [k_0,k_{N-1}] \qquad (6.2.1)$$

gdzie:

$[k_0,k_N] = \{k_0,k_0+1, k_0+2,\ldots,k_0+N\}$,$k_0$ jest liczbą całkowitą

$x(k) \in X$, dla $k \in [k_0,k_N]$, X jest przestrzenią Hilberta

$u(k) \in U$, dla $k \in [k_0-M,k_{N-1}]$, U jest przestrzenią Hilberta

$A(k) \in \mathcal{L}(X)$, dla $k \in [k_0,k_{N-1}]$

$B_i(k) \in \mathcal{L}(U,X)$, dla $k \in [k_0,k_{N-1}]$ oraz $i \in [0,M]$

Symbolika dotycząca przestrzeni Hilberta oraz operatorów liniowych w przestrzeniach Hilberta, podana w podrozdziale 4.1, będzie również obowiązywała w niniejszym rozdziale. Podobnie jak dla układów ciągłych, stan zupełny w chwili k układu dynamicznego (6.2.1) jest postaci:

$$z_k = \{x(k),u(k-M),u(k-M+1),\ldots,u(k-2),u(k-1)\} \in X \times U \times U \times \ldots \times U = X \times U^M.$$

Jeżeli $A(k) = A$ oraz $B_i(k) = B_i$ dla $k \in [k_0,k_{N-1}]$ oraz $i \in [0,M]$, wówczas układ dynamiczny (6.2.1) staje się układem stacjonarnym następującej postaci:

$$x(k+1) = A\,x(k) + \sum_{i=0}^{i=M} B_i u(k-i) \qquad k \in [0,N-1] \qquad (6.2.2)$$

Dla dyskretnych, stacjonarnych układów dynamicznych można, bez utraty ogólności przyjąć, że chwila początkowa $k_0 = 0$.

Dla nieskończenie wymiarowych układów dysktetnych z opóźnieniami w sterowaniu, z tych samych względów jak dla układów ciągłych (podrozdział 4.2), wprowadza się następujące rodzaje sterowalności: względną aproksymacyjną (dokładną) sterowalność oraz absolutną aproksymacyjną (dokładną) sterowalność.

Definicja 6.2.1. Układ dynamiczny (6.2.1) nazywa się układem względnie aproksymacyjnie (dokładnie) sterowalnym w przedziale $[k_0,k_N]$, jeżeli dla każdego początkowego stanu zupełnego z_{k_0}, każdego wektora $x_N \in X$ oraz każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 0$) istnieje sekwencja sterowań $u(k_0)$, $u(k_0+1),\ldots,u(k_N-2),u(k_N-1)$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji sterowań trajektoria $x(k)$ układu dynamicznego (6.2.1) spełnia warunek

$$\|x(k_N) - x_N\|_X \leqslant \varepsilon \tag{6.2.3}$$

Definicja 6.2.2. Układ dynamiczny (6.2.1) nazywa się układem absolutnie aproksymacyjnie (dokładnie) sterowalnym w przedziale $[k_0,k_N]$, $(M< N)$, jeżeli dla każdego początkowego stanu zupełnego z_{k_0}, każdego końcowego stanu zupełnego $z_{k_N} = \left\{\bar{x}(k_N),u(k_N-M),u(k_N-M+1),\ldots,u(k_N-2),u(k_N-1)\right\}$ oraz każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 0$) istnieje sekwencja sterowań $u(k_0),u(k_0+1),u(k_0+2),\ldots,u(k_N-M-2),u(k_N-M-1)$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji sterowań trajektoria $x(k)$ układu dynamicznego (6.2.1) spełnia warunek

$$\|x(k_N) - \bar{x}(k_N)\|_X \leqslant \varepsilon \tag{6.2.4}$$

Modyfikacje powyższych definicji dla układu dynamicznego (6.2.2) są oczywiste ($k_0 = 0$).

6.3. Warunki względnej aproksymacyjnej sterowalności [188]

Przy zadanym początkowym stanie zupełnym z_{k_0} jednoznaczne rozwiązanie liniowego równania różnicowego (6.2.1) jest następującej postaci [183], [184], [310]:

$$x(k) = F(k,k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{j=k-1} F(k,j+1) \sum_{i=0}^{i=M} B_i(j)u(j-i) \quad \text{dla} \quad k > k_0 \tag{6.3.1}$$

gdzie $F(k,j) \in \mathcal{L}(X)$ jest operatorem tranzycji układu (6.2.1) o następujących własnościach:

$F(k,j) = F(k,j+1)A(j) = A(k-1)A(k-2)\ldots A(j+1)A(j)$ dla $k > j$

$F(k,k) = I$

$F(k,j)$ nie jest określony dla $k < j$.

W przypadku gdy operatory $A(k)$ posiadają dla wszystkich k ograniczone operatory odwrotne, tzn. $A^{-1}(k)$ istnieją oraz $A^{-1}(k) \in \mathcal{L}(X)$, wówczas operator tranzycji $F(k,j)$ jest określony także dla $k < j$ w następujący sposób: [183], [192], [310]

$$F(k,j) = A^{-1}(k)F(k+1,j) = A^{-1}(k)A^{-1}(k+1)\ldots A^{-1}(j-2)A^{-1}(j-1) \quad \text{dla } k < j$$

W tym przypadku operator tranzycji $F(k,j)$ posiada pewne dodatkowe własności

(i) $F(k,j)$ posiada ograniczony operator odwrotny dla wszystkich k,j,a ponadto zachodzi następująca równość: $F^{-1}(k,j) = F(j,k) \in \mathcal{L}(X)$

(ii) $F(k,j) = F(k,i)F(i,j)$ dla wszystkich k,i,j.

Jeżeli $A(k) = A$ dla wszystkich k, wówczas $F(k,j) = A^{k-j}$ dla $k > j$, a jeśli ponadto $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, wówczas $F(k,j) = A^{k-j}$ dla wszystkich k oraz j.

We wszystkich powyższych zależnościach potęgowanie operatorów jest rozumiane w sensie kolejnego składania operatorów.

Wykorzystując zależność (6.2.5) oraz dokonując zmian w kolejności sumowania, rozwiązanie równania (6.2.1) dla $k = k_N$ można przedstawić w następującej formie:

$$x(k_N) = F(k_N,k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{j=k_N-1} F(k_N,j+1) \sum_{i=0}^{i=M} B_i(j)u(j-i) =$$

$$= F(k_N,k_0)x(k_0) + \sum_{i=0}^{i=M} \sum_{j=k_0}^{j=k_N-1} F(k_N,j+1)B_i(j)u(j-i) =$$

$$= F(k_N,k_0)x(k_0) + \sum_{i=0}^{i=M} \sum_{j=k_0-i}^{j=k_N-i-1} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)u(j) \qquad (6.3.2)$$

Niech

$$m = \begin{cases} N-1, & \text{dla } M \geq N \\ M & \text{dla } M < N \end{cases} \qquad (6.3.3)$$

Ponieważ wartości sterowania $u(j)$ dla $j \in [k_0-M, k_0-1]$ wchodzą do definicji stanu zupełnego z_{k_0}, więc w celu ich wydzielenia należy zależność (6.3.2) przekształcić do następującej postaci:

$$x(k_N) = F(k_N,k_0)x(k_0) + \sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=k_0-i}^{j=k_0-1} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)u(j) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=k_0}^{j=k_N-i-1} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)u(j) +$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{i=M} \sum_{j=k_0-i}^{j=k_N-i-1} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)u(j) =$$

$$= x(k_N,z_{k_0},0) + x(k_N,0,u(k_0),u(k_0+1),\ldots,u(k_N-2),u(k_N-1)) \quad (6.3.4)$$

gdzie

$$x(k_N,z_{k_0},0) = F(k_N,k_0)x(k_0) + \sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=k_0-i}^{j=k_0-1} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)u(j) +$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{i=M} \sum_{j=k_0-i}^{j=k_N-i-1} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)u(j) \quad (6.3.5)$$

$$x(k_N,0,u(k_0),u(k_0+1),\ldots,u(k_N-2),u(k_N-1)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=k_0}^{j=k_N-i-1} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)u(j) \quad (6.3.6)$$

Składowa $x(k_N,z_{k_0},0)$ jest zależna wyłącznie od początkowego stanu zupełnego z_{k_0} i nie ma żadnego wpływu na sterowalność układu dynamicznego (6.2.1). Natomiast składowa (6.3.6) jest zależna od sekwencji sterowań $u(k_0),u(k_0+1), u(k_0+2),\ldots,u(k_N-2),u(k_N-1)$, w związku z czym ma ona decydujący wpływ na sterowalność układu dynamicznego (6.2.1).

Dla skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenia:

$$X \ni q_m(z_{k_0}, x(k_N)) = x(k_N) - F(k_N, k_0)x(k_0) -$$

$$- \sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=k_0-i}^{j=k_0-1} F(k_N, j+i+1)B_i(j+i)u(j) -$$

$$- \sum_{i=m+1}^{i=M} \sum_{j=k_0-i}^{j=k_N-i-1} F(k_N, j+i+1)B_i(j+i)u(j) \qquad (6.3.7)$$

$$\mathcal{L}(U,X) \ni P(j) = \sum_{i=0}^{i=m(j)} F(k_N, j+i+1)B_i(j+i) \qquad j \in [k_0, k_N-1] \qquad (6.3.8)$$

gdzie

$$m(j) = \min(m, k_N-j-1) \qquad (6.3.9)$$

$S(k_0,k_N) \in \mathcal{L}(U^N, X)$ jest operatorem zdefiniowanym następującą równością:

$$U^N \ni \{u(k_0), u(k_0+1), \ldots, u(k_N-2), u(k_N-1)\} \to \sum_{j=k_0}^{j=k_N-1} P(j)u(j) \in X \qquad (6.3.10)$$

Obecnie zostanie zdefiniowany tzw. operator względnej sterowalności $W(k_0,k_N)$, będący odpowiednikiem dla przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowych, znanej, [183], [184], macierzy względnej sterowalności. Operator ten jest zdefiniowany w sposób następujący:

$$W(k_0,k_N) = S(k_0,k_N)S^*(k_0,k_N) = \sum_{j=k_0}^{j=k_N-1} P(j)P^*(j) =$$

$$= \sum_{j=k_0}^{j=k_N-1} \left[\sum_{i=0}^{i=m(j)} F(k_N, j+i+1)B_i(j+i)\right]\left[\sum_{i=0}^{i=m(j)} B_i^*(j+i)F^*(k_N, j+i+1)\right] \qquad (6.3.11)$$

Ponieważ dla przestrzeni Hilberta X zachodzi równość $X^* = X$, więc operator względnej sterowalności $W(k_0,k_N) \in \mathcal{L}(X)$ oraz na mocy (6.3.11) $W(k_0,k_N) = W^*(k_0,k_N)$, czyli jest operatorem samosprzężonym. Wprowadzenie operatora względnej sterowalności umożliwia badanie różnych rodzajów sterowalności układu dynamicznego (6.2.1) w podobny sposób, jak w przypadku skończenie wymiarowych, dyskretnych układów dynamicznych [183], [184].

TWIERDZENIE 6.3.1. Następujące warunki są równoważne

(i) Układ dynamiczny (6.2.1) jest względnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$.

(ii) $\overline{S(k_0,k_N)U^N} = X$

(iii) Operator $S(k_0,k_N)$ posiada operator odwrotny (niekoniecznie ograniczony).

(iv) Operator względnej sterowalności $W(k_0,k_N)$ posiada operator odwrotny (niekoniecznie ograniczony).

D o w ó d. (i)$\Longleftrightarrow$(ii). Na podstawie definicji 6.2.1 oraz relacji (6.3.4), (6.3.5), (6.3.6) układ dynamiczny (6.2.1) jest względnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wartości operatora określonego prawą stroną równości (6.3.6) jest gęsty w przestrzeni X. Ponieważ zachodzą następujące równości:

$$\sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=k_0}^{j=k_N-i-1} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)u(j) =$$

$$= \sum_{j=k_0}^{j=k_N-1} \sum_{i=0}^{i=m(j)} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)u(j) =$$

$$= \sum_{j=k_0}^{j=k_N-1} P(j)u(j) = S(k_0,k_N)\{u(k_0),u(k_0+1),\ldots,u(k_N-2),u(k_N-1)\} \in X \tag{6.3.12}$$

więc na podstawie zależności (6.3.6) oraz (6.3.12) układ dynamiczny (6.2.1) jest względnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek (ii).

(ii) $\Longrightarrow$(iii). Jeżeli zachodzi równość (ii), to operator $S^*(k_0,k_N)$ ma jednoelementową podprzestrzeń zerową, tzn, $N(S^*(k_0,k_N)) = 0_X$. Zatem operator $S^*(k_0,k_N)$ jest operatorem injektywnym i posiada operator odwrotny, który niekoniecznie jest operatorem ograniczonym.

(iii) $\Longrightarrow$(iv). Jeżeli operator $S^{*}(k_0,k_N)$ posiada operator odwrotny (niekoniecznie ograniczony), to wówczas, na podstawie zależności (6.3.11), operator $W(k_0,k_N)$ posiada także operator odwrotny (niekoniecznie ograniczony).

(iv) $\Longrightarrow$(ii). Jeżeli operator $W(k_0,k_N)$ posiada operator odwrotny, wówczas jego zbiór wartości jest co najmniej gęsty w przestrzeni Hilberta X (gdyż jest operatorem samosprzężonym). Zatem na mocy pierwszej równości we wzorze (6.3.11) operator $S(k_0,k_N)$ także ma co najmniej gęsty zbiór wartości w przestrzeni X.

Biorąc pod uwagę powyżej dowiedzione implikacje równoważność warunków w tezie twierdzenia 6.3.1 została udowodniona.

Wniosek 6.3.1. Jeżeli $B_i(k)$ są dla $i \in [0,M]$ oraz $k \in [k_0,k_{N-1}]$ operatorami skończenie wymiarowymi, wówczas układ dynamiczny (6.2.1) nie jest względnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$ dla nieskończenie wymiarowych przestrzeni Hilberta X.

D o w ó d. Jeżeli założenia wniosku 6.3.1 są spełnione, to przeciwdziedzina operatora $S(k_0,k_N)$ jest skończoną sumą skończenie wymiarowych podprzestrzeni liniowych, a więc nie może być gęsta w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta X.

Uwaga 6.3.1. W przypadku stacjonarnego układu dynamicznego postaci (6.2.2) operatory $S(k_0,k_N)$ oraz $W(k_0,k_N)$, po uwzględnieniu zależności (6.3.8), (6.3.10) oraz (6.3.11), są następującej postaci:

$$S(k_0,k_N)\left\{u(k_0),u(k_0+1),\ldots,u(k_N-2),u(k_N-1)\right\} =$$

$$= \sum_{j=k_0}^{j=k_N-1} \sum_{i=0}^{i=m(j)} A^{(k_N-j-i-1)} B_i(j+i) \qquad (6.3.13)$$

$$W(k_0,k_N) = \sum_{j=k_0}^{j=k_N-1} \left[\sum_{i=0}^{i=m(j)} A^{(k_N-j-i-1)} B_i(j+i)\right]\left[\sum_{j=0}^{i=m(j)} B_i^{*}(j+i) A^{*(k_N-j-i-1)}\right] \qquad (6.3.14)$$

We wzorach (6.3.13) oraz (6.3.14) można przyjąć, bez utraty ogólności rozważań, że $k_0 = 0$, $k_N = N$, a więc rozpatrywać względną aproksymacyjną sterowalność w przedziale $[0,N]$.

6.4. Warunki absolutnej aproksymacyjnej sterowalności [188]

Przy formułowaniu warunków absolutnej aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[k_0,k_N]$, na mocy definicji 6.2.2 zakłada się, że $M < N$. Zało-

żenie to obowiązuje w całym podrozdziale 6.4, w którym zostaną sformułowane warunki konieczne i wystarczające absolutnej aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[k_0,k_N]$ układu dynamicznego (6.2.1). Podobnie jak w przypadku ciągłych układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu,także dla układów dynamicznych dyskretnych z opóźnieniami w sterowaniu zostanie dowiedzione, że absolutna aproksymacyjna sterowalność w przedziale $[k_0,k_N]$ jest równoważna aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[k_0,k_N-M]$ pewnego dyskretnego układu dynamicznego bez opóźnień w sterowaniu.

TWIERDZENIE 6.4.1. Jeżeli operatory $A(k)$ posiadają ograniczone operatory odwrotne dla $k \in [k_0,k_N-1]$, to układ dynamiczny (6.2.1) jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dyskretny układ dynamiczny bez opóźnień

$$x(k+1) = A(k)x(k) + D(k)u(k) \tag{6.4.1}$$

gdzie

$$D(k) = \sum_{i=0}^{i=M} F(k,k+i+1)B_i(k+i) \tag{6.4.2}$$

jest aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N-M]$.

D o w ó d. Jeżeli operatory $A(k)$ mają ograniczone operatory odwrotne dla $k \in [k_0,k_N-1]$, to wykorzystując własności operatora tranzycji $F(k,j)$, wyszczególnione w podrozdziale 6.2 oraz zależności (6.3.4),(6.3.5),(6.3.7), można rozwiązanie równania (6.2.1) przedstawić w następującej,dogodnej do dalszych rozważań postaci:

$$x(k_N) = x(k_N,z_{k_0},0) + x(k_N,0,u(k_0),u(k_0+1),\ldots,u(k_N-2-M),u(k-M-1)) +$$

$$+ x(k_N,0,u(k_N-M),u(k_N-M+1),\ldots,u(k_N-2),u(k_N-1)) \tag{6.4.3}$$

gdzie

$$x(k_N,0,u(k_0),u(k_0+1),\ldots,u(k_N-2-M),u(k_N-M-1)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=M} \sum_{j=k_0}^{j=k_N-M-1} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)u(j) \tag{6.4.4}$$

$$x(k_N,0,u(k_N-M),u(k_N-M+1),\ldots,u(k_N-2),u(k_N-1)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=M} \sum_{j=k_N-M}^{j=k_N-i-1} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)u(j) \qquad (6.4.5)$$

Składowa rozwiązania dana relacją (6.4.5) jest zależna od stanu zupełnego z_{k_N} i nie ma wpływu na sterowalność układu. Składowa rozwiązania dana relacją (6.4.4) jest zależna od sterowania w przedziale $[k_0,k_N-M-1]$ i ma decydujący wpływ na absolutną aproksymacyjną sterowalność w przedziale $[k_0,k_N]$ układu dynamicznego (6.2.1). Ponadto, na mocy wzoru (6.4.2), zależność (6.4.4) można przekształcić następująco:

$$\sum_{i=0}^{i=M} \sum_{j=k_0}^{j=k_N-M-1} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)u(j) =$$

$$= \sum_{j=k_0}^{j=k_N-M-1} \sum_{i=0}^{i=M} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)u(j) =$$

$$= F(k_N,k_N-M-1) \sum_{j=k_0}^{j=k_N-M-1} F(k_N-M-1,j) \sum_{i=0}^{i=M} F(j,j+i+1)B_i(j+i)u(j) =$$

$$= F(k_N,k_N-M-1) \sum_{j=k_0}^{j=k_N-M-1} F(k_N-M-1,j)D(j)u(j) \qquad (6.4.6)$$

Ponieważ operator $F(k_N,k_N-M-1)$ jest odwracalny, a ponadto odwrotny do niego operator jest operatorem ograniczonym, więc na podstawie definicji 6.2.2 układ dynamiczny (6.2.1) jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wartości operatora $\sum_{j=k_0}^{j=k_N-M-1} F(k_N-M-1,j)D(j)u(j)$ jest gęsty w przestrzeni X, co z drugiej strony jest równoważne aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[k_0,k_N-M]$ układu dynamicznego postaci (6.4.1) [104], [125], [126].

Wniosek 6.4.1. Jeżeli $A^{-1}(k) \in \mathcal{L}(X)$ oraz $B_i(k)$ są operatorami skończenie wymiarowymi dla $k \in [k_0, k_N-1]$, $i \in [0,M]$, to układ dynamiczny (6.2.1) nie jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$ dla nieskończenie wymiarowej przestrzeni X.

D o w ó d. Jeżeli założenia wniosku 6.4.1 są spełnione, to przeciwdziedzina operatora określonego relacją (6.4.6) jest skończoną sumą skończenie wymiarowych podprzestrzeni liniowych, a więc nie może być gęsta w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta X.

Wniosek 6.4.2. Jeżeli $A^{-1}(k) \in \mathcal{L}(X)$, dla $k \in [k_0,k_N-1]$, to układ dynamiczny (6.2.1) jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy samosprzężony operator $W_M(k_0,k_N) : X \to X$, zdefiniowany następującą równością:

$$W_M(k_0,k_N) = \sum_{j=k_0}^{j=k_N-M-1} F(k_N-M-1,j)D(j)D^*(j)F^*(k_N-M-1,j) \in \mathcal{L}(X) \tag{6.4.7}$$

posiada operator odwrotny (niekoniecznie ograniczony).

D o w ó d. Jeżeli $A^{-1}(k) \in \mathcal{L}(X)$ dla $k \in [k_0,k_N-1]$, wówczas operator tranzycji jest odwracalny oraz $F^{-1}(k_N,k_N-M-1) \in \mathcal{L}(X)$. Zatem, na podstawie twierdzenia 6.4.1 oraz znanych [104], [108], warunków koniecznych i wystarczających aproksymacyjnej sterowalności w przedziale $[k_0,k_N]$ dyskretnego układu dynamicznego bez opóźnień w sterowaniu, układ dynamiczny (6.2.1) jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy operator $W_M(k_0,k_N)$ posiada operator odwrotny (niekoniecznie ograniczony).

W sytuacji, gdy nie wszystkie operatory $A(k)$, $k \in [k_0,k_N-1]$ posiadają ograniczone operatory odwrotne, wówczas twierdzenie 6.4.1 nie może być zastosowane, w związku z czym należy poszukiwać innych, ogólniejszych kryteriów absolutnej aproksymacyjnej sterowalności. W tym celu definiuje się samosprzężony operator $W_a(k_0,k_N) : X \to X$ w sposób następujący:

$$W_a(k_0,k_N) = \sum_{j=k_0}^{j=k_N-M-1} \left[\sum_{i=0}^{i=M} F(k_N,j+i+1)B_i(j+i)\right]\left[\sum_{i=0}^{i=M} B_i^*(j+i)F^*(k_N,j+i+1)\right] \tag{6.4.8}$$

Operator $W_a(k_0,k_N)$ odgrywa przy badaniu absolutnej aproksymacyjnej sterowalności tę samą rolę, co operator $W(k_0,k_N)$ przy badaniu względnej aproksymacyjnej sterowalności.

TWIERDZENIE 6.4.2. Układ dynamiczny (6.2.1) jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy operator $W_a(k_0,k_N)$ jest odwracalny.

D o w ó d. Na podstawie definicji 6.2.2 oraz relacji 6.4.4 układ dynamiczny 6.2.1 jest absolutnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy operator $S_a(k_0,k_N) \in \mathcal{L}(U^{N-M},X)$, zdefiniowany następującą równością:

$$U^{N-M} \ni \left\{u(k_0),u(k_0+1),\ldots,u(k_N-M-2),u(k_N-M-1)\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sum_{j=k_0}^{j=k_N-M-1} \sum_{i=0}^{i=M} F(k_N,j+i+1)B_i(j+1)u(j) \qquad (6.4.9)$$

posiada gęstą przeciwdziedzinę w przestrzeni X. Ponieważ $W_a(k_0,k_N) = S_a(k_0,k_N)S_a^*(k_0,k_N)$, więc gęstość przeciwdziedziny operatora $S_a(k_0,k_N)$ jest równoważna istnieniu operatora $W_a(k_0,k_N)$ (niekoniecznie ograniczonego), co kończy dowód twierdzenia.

Uwaga 6.4.1. W przypadku gdy układ dyskretny postaci (6.2.1) uzyskuje się poprzez dyskretyzację układu ciągłego postaci (4.2.1), wówczas przy założeniu, że operator A jest infinitezymalnym generatorem silnie ciągłej grupy przekształceń liniowych S(t), $t \in R$, otrzymuje się zawsze odwracalne operatory A(k) dla $k \in [k_0,k_N-1]$, a ponadto $A^{-1}(k) \in \mathcal{L}(X)$. Jest to uogólnienie, na przypadek nieskończenie wymiarowy, znanego faktu z teorii dyskretnych układów dynamicznych skończenie wymiarowych [40], [192], [310].

Uwaga 6.4.2. Dyskretne układy dynamiczne postaci (6.2.1) z operatorami $A^{-1}(k) \in \mathcal{L}(X)$ są układami dynamicznymi niezdegenerowanymi [192], [222], [345] i wówczas bez utraty ogólności można przyjąć, że stan końcowy $x(k_N) = 0_X$. Brak degeneracji w układzie gwarantuje nam, że możliwość osiągnięcia końcowego stanu zerowego jest równoważna możliwości osiągnięcia, z dowolną dokładnością, dowolnego niezerowego stanu końcowego. Dla układów zdegenerowanych równoważność taka nie zawsze występuje (do stanu zerowego jest się łatwiej "dosterować").

6.5. Warunki względnej oraz absolutnej dokładnej sterowalności [188]

Wykorzystując oznaczenia wprowadzone w poprzednich podrozdziałach niniejszego rozdziału, obecnie zostaną sformułowane warunki konieczne i wystarczające względnej oraz absolutnej dokładnej sterowalności w przedziale $[k_0,k_N]$ układu dynamicznego postaci (6.2.1).

TWIERDZENIE 6.5.1. Następujące warunki są równoważne:

(i) Układ dynamiczny (6.2.1) jest względnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$.

(ii) $S(k_0,k_N)u^N = X$.

(iii) Operator $S^*(k_0,k_N)$ posiada ograniczony operator odwrotny.

(iv) Operator $W(k_0,k_N)$ posiada ograniczony operator odwrotny.

D o w ó d. (i)$\Longleftrightarrow$(ii). Na podstawie definicji 6.2.1 oraz relacji (6.3.6), (6.3.12), a także dowodu twierdzenia 6.3.1 układ dynamiczny (6.2.1) jest względnie dokładnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek (ii).

(ii) $\Longrightarrow$(iii). Podobnie jak w twierdzeniu 6.3.1, z warunku (ii) wynika, że operator $S^*(k_0,k_N)$ jest odwracalny. Ponadto, ponieważ zbiór wartości operatora $S^*(k_0,k_N)$ jest domknięty, więc na mocy twierdzenia o odwzorowaniu otwartym $S^{-1*}(k_0,k_N)$ jest operatorem ograniczonym.

(iii) $\Longrightarrow$(iv). Implikacja ta wynika bezpośrednio z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym.

(iv) $\Longrightarrow$(ii). Ponieważ operator $W(k_0,k_N)$ jest samosprzężony oraz posiada ograniczony operator odwrotny, więc uwzględniając pierwszą równość w relacji (6.3.11), otrzymuje się warunek (ii).

Wniosek 6.5.1. Jeżeli założenia twierdzenia 6.4.1 są spełnione, to układ dynamiczny (6.2.1) jest absolutnie dokładnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ dynamiczny (6.4.1) jest dokładnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N-M]$.

D o w ó d. Wniosek 6.5.1 wynika bezpośrednio z definicji 6.2.2 oraz z twierdzenia 6.4.1.

Wniosek 6.5.2. Jeżeli $B_i(k)$, $k \in [k_0,k_N-1]$, $i \in [0,M]$ są operatorami zwartymi, a przestrzeń X jest nieskończenie wymiarowa, to układ dynamiczny (6.2.1) nie jest względnie dokładnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$, ani absolutnie dokładnie sterowalny w przedziale $[k_0,k_N]$.

D o w ó d. Jeżeli spełnione są założenia wniosku 6.5.2, to operator $S(k_0,k_N)$ jest także zwarty (jako skończona suma operatorów zwartych), a więc jego przeciwdziedzina nie może być równa z nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta X.

Uwaga 6.5.1. Zwartość operatorów $A(k)$, $k \in [k_0,k_N]$ nie jest warunkiem wystarczającym braku względnej lub absolutnej dokładnej sterowalności w przedziale $[k_0,k_N]$.

6.6. Sterowanie z minimalną energią [188]

Podobnie jak w przypadku ciągłych układów dynamicznych, także dla dyskretnych układów dynamicznych zagadnienie sterowania z minimalną energią wiąże się ściśle z problematyką sterowalności.

Niech będzie dany układ dynamiczny (6.2.1) oraz kwadratowy wskaźnik jakości postaci

$$J(u) = \sum_{k=k_0}^{k=k_{N-1}} \left\langle u(k),\ R(k)u(k) \right\rangle_U \tag{6.6.1}$$

gdzie $R(k) \in \mathcal{L}(U)$, $k \in [k_0, k_{N-1}]$ jest samosprzężonym, dodatnio określonym operatorem, posiadającym operator odwrotny $R^{-1}(k) \in \mathcal{L}(U)$ dla wszystkich $k \in [k_0, k_{N-1}]$.

Dla skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenia:

$$W_R(k_0, k_N) = \sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} P(k)R^{-1}(k)P^*(k) \tag{6.6.2}$$

$$u_{opt}(k) = R^{-1}(k)P^*(k)W_R^{-1}(k_0, k_N)q_m(z_{k_0}, x_N) \qquad k \in [k_0, k_N-1] \tag{6.6.3}$$

$W_R(k_0, k_N)$ jest samosprzężonym, półdodatnio określonym operatorem.

Postępując w podobny sposób jak w przypadku ciągłych układów dynamicznych, można efektywnie rozwiązać zagadnienie sterowania z minimalną energią dyskretnymi, niestacjonarnymi, nieskończenie wymiarowymi układami dynamicznymi określonymi w przestrzeniach Hilberta.

TWIERDZENIE 6.6.1. Jeżeli układ dynamiczny (6.2.1) jest względnie dokładnie sterowalny w przedziale $[k_0, k_1]$, to sterowanie $u_{opt}(k)$, zdefiniowane wzorem (6.6.3), przeprowadza układ dynamiczny (6.2.1) z początkowego stanu zupełnego z_{k_0} do zadanego końcowego x_N w chwili k_N. Ponadto, jeżeli $\bar{u}(k)$, $k \in [k_0, k_N-1]$ jest dowolnym sterowaniem przeprowadzającym układ dynamiczny (6.2.1) z początkowego stanu zupełnego z_{k_0} do zadanego końcowego stanu chwilowego x_N w chwili k_N, wówczas zachodzi następująca nierówność:

$$\sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} \left\langle \bar{u}(k),\ R(k)\bar{u}(k) \right\rangle_U \geq \sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} \left\langle u_{opt}(k),\ R(k)u_{opt}(k) \right\rangle_U \tag{6.6.4}$$

oraz minimalna wartość wskaźnika jakości (6.6.1) jest dana następującą zależnością:

$$J(u_{opt}) = \sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} \left\langle u_{opt}(k),\ R(k)u_{opt}(k) \right\rangle_U =$$

$$= \left\langle q_m(z_{k_0}, x_N),\ W^{-1}(k_0, k_N) q_m(z_{k_0}, x_N) \right\rangle_X \qquad (6.6.5)$$

D o w ó d. Na podstawie twierdzenia 6.5.1 założenie o względnej dokładnej sterowalności w przedziale $[k_0, k_N]$ układu dynamicznego (6.2.1) zapewnia istnienie operatora $W^{-1}(k_0, j_N) \in \mathcal{L}(X)$. Zatem wzór (6.6.3), określający sterowanie optymalne, ma sens.

Podstawiając (6.6.3) do wzoru (6.3.4) oraz uwzględniając zależność (6.6.2) uzyskuje się dla dowolnych z_{k_0} oraz x_N następującą równość:

$$x(k_N, z_{k_0}, u_{opt}) = x_N \qquad (6.6.6)$$

Zatem sterowanie $u_{opt}(k)$ przeprowadza układ dynamiczny (6.2.1) z początkowego stanu zupełnego z_{k_0} do zadanego końcowego stanu chwilowego x_N w chwili k_N, a ponieważ z założenia sterowanie $\bar{u}(k)$ spełnia również powyższy warunek, więc na podstawie zależności (6.3.6), (6.3.8), (6.3.9) oraz (6.3.10) otrzymuje się następującą równość:

$$\sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} P(k)\bar{u}(k) = \sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} P(k)u_{opt}(k) \qquad (6.6.7)$$

Po odjęciu stronami oraz zastosowaniu iloczynu skalarnego uzyskuje się równość postaci:

$$\left\langle \sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} P(k)(\bar{u}(k) - u_{opt}(k)),\ W_R^{-1}(k_0, k_N) q_m(z_{k_0}, x_N) \right\rangle_X = 0 \qquad (6.6.8)$$

która implikuje na podstawie (6.6.3) następującą zależność:

$$\sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} \left\langle \bar{u}(k) - u_{opt}(k),\ P^*(k)W_R^{-1}(k_0,k_N)q_m(z_{k_0},x_N) \right\rangle_U =$$

$$= \sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} \left\langle \bar{u}(k) - u_{opt}(k),\ R(k)u_{opt}(k) \right\rangle_U = 0 \qquad (6.6.9)$$

Wykorzystując własności iloczynu skalarnego na podstawie (6.6.9) uzyskuje się równość

$$\sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} \left\langle \bar{u}(k),\ R(k)\bar{u}(k) \right\rangle_U = \sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} \left\langle \bar{u}(k) - u_{opt}(k),\right.$$

$$\left. R(k)(\bar{u}(k) - u_{opt}(k)) \right\rangle_U + \sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} \left\langle u_{opt}(k),\ R(k)u_{opt}(k) \right\rangle_U \qquad (6.6.10)$$

która bezpośrednio prowadzi do nierówności (6.6.4) w tezie twierdzenia.

W drugiej części dowodu zostanie wykazana prawdziwość wzoru (6.6.5), określającego minimalną wartość wskaźnika jakości $J(u_{opt})$, odpowiadającą sterowaniu optymalnemu u_{opt}.

$$J(u_{opt}) = \sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} \left\langle R^{-1}(k)P^*(k)W_R^{-1}(k_0,k_N)q_m(z_{k_0},x_N),\right.$$

$$\left. P^*(k)W_R^{-1}(k_0,k_N)q_m(z_{k_0},x_N) \right\rangle_U \qquad (6.6.11)$$

Ponieważ operator $W_R(k_0,k_N)$ jest samosprzężony, więc operator $W_R^{-1}(k_0,k_N)$ $\in \mathcal{L}(X)$ jest także operatorem samosprzężonym. Stąd, wykorzystując własności iloczynu skalarnego oraz operatorów samosprzężonych, uzyskuje się następujący wzór na wskaźnik jakości $J(u_{opt})$:

$$J(u_{opt}) = \sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} \left\langle q_m(z_{k_0},x_N), W_R^{-1}(k_0,k_N)P(k)R^{-1}(k)P^*(k)W_R^{-1}(k_0,k_N)q_m(z_{k_0},x_N) \right\rangle_X =$$

$$= \left\langle q_m(z_{k_0}, x_N),\ W_R^{-1}(k_0, k_N)\left(\sum_{k=k_0}^{k=k_N-1} P(k)R^{-1}(k)P^*(k)\right) W_R^{-1}(k_0, k_N) q_m(z_{k_0}, x_N)\right\rangle_X =$$

$$= \left\langle q_m(z_{k_0}, x_N),\ W_R^{-1}(k_0, k_N) q_m(z_{k_0}, x_N)\right\rangle_X \qquad (6.6.12)$$

Zatem wzór (6.6.5) został dowiedziony, co jednocześnie kończy dowód twierdzenia 6.6.1.

ROZDZIAŁ 7

STEROWALNOŚĆ BILINIOWYCH DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

7.1. Wprowadzenie

W ciągu ostatnich lat nastąpił szybki rozwój teorii biliniowych układów dynamicznych zarówno ciągłych, jak i dyskretnych - [29], [30], [38], [87], [88], [90], [121], [318], [342]. Wiąże się to bezpośrednio z faktem, że dla coraz większej klasy układów dynamicznych, szczególnie w biologii i ekonomii [245], a także w astronautyce [343], [344] opis liniowy okazuje się niewystarczający i zachodzi konieczność wykorzystywania w coraz szerszym zakresie modeli biliniowych.

Wraz ze wzrostem zainteresowania biliniowymi układami dynamicznymi rozwijały się również badania dotyczące sterowalności tych układów. Przy formułowaniu warunków sterowalności dla ciągłych biliniowych układów dynamicznych wykorzystuje się zarówno teorię algebr Liego [29], [30], [38], jak również inne metody analizy matematycznej [342], [343], [344]. W przypadku dyskretnych biliniowych układów dynamicznych w ostatnim okresie uzyskano szereg nowych warunków koniecznych i wystarczających sterowalności zarówno dla układów jednorodnych [87], [88], jak i dla układów niejednorodnych, [90].

W niniejszym rozdziale, wykorzystując kanoniczną formę Jordana dyskretnych, biliniowych układów dynamicznych, uzyskano, dla pewnej klasy tych układów, proste kryteria sterowalności. Kryteria te bazują na znajomości wartości własnych macierzy, stanowiącej liniową część dyskretnego biliniowego układu dynamicznego. Otrzymane rezultaty dotyczą zarówno jednorodnego, jak i niejednorodnego dyskretnego biliniowego układu dynamicznego. Uzyskane wyniki są ilustrowane licznymi przykładami.

W niniejszym rozdziale rozpatrzono jedynie pewną klasę dyskretnych biliniowych układów dynamicznych, a mianowicie układy, w których część liniowa układu reprezentowana jest przez macierz normalną. Założenie to w znacznym stopniu upraszcza kryteria sterowalności. Pozostałe ograniczenia dotyczące klasy rozpatrywanych układów są konsekwencją założeń zamieszczonych w następujących pracach: [87], [88], [90], [121], [245], [318]. Założenia te gwarantują istnienie rozwiązania problemu sterowalności i jak dotychczas brak w literaturze prac dotyczących sterowalności szerszych klas biliniowych, dyskretnych układów dynamicznych. Problematyka sterowalności

omawianych układów łączy się ściśle z zagadnieniami sterowania minimalno-energetycznego przy ustalonym stanie końcowym układu dynamicznego [343], [344]. Należy także nadmienić, że układy biliniowe stanowią jak gdyby pomost pomiędzy układami liniowymi oraz nieliniowymi [245].

7.2. Opis układu dynamicznego i przegląd dotychczasowych wyników [192]

W teorii biliniowych dyskretnych układów dynamicznych rozróżnia się dwa zasadnicze rodzaje układów: układy jednorodne oraz układy niejednorodne.

Biliniowy, dyskretny, jednorodny układ dynamiczny opisuje następujące równanie różnicowe [88]:

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}(I + u(k)\tilde{B})\tilde{x}(k) \qquad k = 0,1,2,... \qquad (7.2.1)$$

gdzie:

$\tilde{A}$ jest $n \times n$ - wymiarową macierzą nieosobliwą,

I jest $n \times n$ - wymiarową macierzą jednostkową,

$\tilde{B}$ jest $n \times n$ - wymiarową macierzą, przy czym rząd $\tilde{B} = 1$,

$\tilde{x}(k) \in R^n$, $k = 0,1,2,3,...$ jest wektorem stanu układu,

$u(k) \in R$, $k = 0,1,2,...$ jest skalarnym sterowaniem.

Ponieważ rząd $\tilde{B} = 1$, więc macierz $\tilde{B}$ może być przedstawiona w postaci następującej [88]:

$$\tilde{B} = \tilde{c}\,\tilde{d}^T,$$

gdzie $\tilde{c}$ oraz $\tilde{d}$ są n-wymiarowymi wektorami, natomiast symbol T oznacza transpozycję wektora.

Dyskretny, biliniowy, niejednorodny układ dynamiczny opisuje następujące równanie różnicowe [90]:

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}((I + u(k)\tilde{B})\tilde{x}(k) + \tilde{c}\,u(k)) \qquad k = 0,1,2,... \qquad (7.2.2)$$

przy czym zakłada się, że spełniony jest warunek [90]:

$$\text{rząd}\,[\tilde{B} \,\vdots\, \tilde{A}\,\tilde{c}] = 1$$

Dla dyskretnych biliniowych układów dynamicznych (zarówno jednorodnych, jak i niejednorodnych) wprowadza się następującą definicję sterowalności [88], [90].

Definicja 7.2.1. Biliniowy, dyskretny niejednorodny (jednorodny), układ dynamiczny nazywa się układem sterowalnym, jeżeli dla dowolnej pary stanów początkowego i końcowego, $x(0)$, $x_F \in R^n$ ($x(0)$, $x_F \in R^n - \{0\}$) istnieje liczba naturalna q oraz skończona sekwencja sterowań $u(0),u(1),\ldots,u(q-2),u(q-1)$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji trajektoria układu dynamicznego, wychodząca ze stanu początkowego $x(0)$, spełnia następujący warunek:

$$x(q,x(0),u(0),u(1),\ldots,u(q-2),u(q-1)) = x_F$$

Uwaga 7.2.1. Długość sekwencji sterowań q jest w istotny sposób zależna od stanu początkowego $x(0)$ oraz od stanu końcowego x_F. W przeciwieństwie do liniowych układów dynamicznych [40], [183], [310] dla układów biliniowych nie istnieje pojęcie indeksu sterowalności, rozumianego jako minimalna ilość kroków potrzebnych do osiągnięcia dowolnego stanu końcowego z dowolnego stanu początkowego.

Wprowadza się następujące oznaczenia:

$$J = \left\{ j : \tilde{d}^T \tilde{A}^j \tilde{c} \neq 0,\ 0 < j \leqslant n^2 \right\}$$

r największy wspólny dzielnik wszystkich elementów zbioru J.

$$W[\tilde{A} \mid \tilde{c}] = [\tilde{c} \mid \tilde{A}\tilde{c} \mid \tilde{A}^2\tilde{c} \mid \ldots \mid \tilde{A}^{n-1}\tilde{c}]$$

$W[\tilde{A} \mid \tilde{c}]$ jest $n \times n$ - wymiarową macierzą, będącą odpowiednikiem macierzy sterowalności dla układów liniowych [40], [157], [158], [199], [207].

Poniżej, dla wygody Czytelnika, przytoczono znane z literatury warunki konieczne i wystarczające sterowalności biliniowych, dyskretnych, jednorodnych oraz niejednorodnych układów dynamicznych [87], [88], [89], [90].

TWIERDZENIE 7.2.1. Biliniowy, dyskretny, jednorodny układ dynamiczny (7.2.1) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd } W[\tilde{A} \mid \tilde{c}] = \text{rząd } W[\tilde{A}^T \mid \tilde{d}] = n \qquad (7.2.3)$$

$$r = 1 \qquad (7.2.4)$$

TWIERDZENIE 7.2.2. Biliniowy, dyskretny, niejednorodny układ dynamiczny (7.2.2) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd } W[\tilde{A} \mid \tilde{c}] = n \qquad (7.2.5)$$

oraz

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} 1 & \tilde{d}^T \\ 1 & \tilde{d}^T\tilde{A}^r \\ 1 & \tilde{d}^T\tilde{A}^{2r} \\ \cdots & \cdots \\ 1 & \tilde{d}^T\tilde{A}^{ar} \end{bmatrix} = a + 1 \qquad (7.2.6)$$

gdzie

$$a = \frac{m}{r}, \quad m = \text{rząd } W[\tilde{A}^T \vdots \tilde{d}], \quad m \leqslant n \qquad (7.2.7)$$

Uwaga 7.2.2. W pracy [90] dowiedziono, że liczba a,dana wzorem (7.2.7), jest zawsze liczbą naturalną (zatem równość (7.2.6) ma sens).

Uwaga 7.2.3. Warunki konieczne i wystarczające sformułowane w twierdzeniach 7.2.1 oraz 7.2.2 uzyskano na drodze kolejnego osłabiania warunków koniecznych i wzmacniania warunków wystarczających. Proces ten można zaobserwować śledząc chronologicznie następujące pozycje literaturowe: [38], [88], [90], [121], [318].

Uwaga 7.2.4. W dotychczasowej literaturze dotyczącej problematyki sterowalności biliniowych, dyskretnych układów dynamicznych brak jest kryteriów sterowalności dla układów postaci (7.2.1) oraz (7.2.2),ale bez dodatkowych założeń odnośnie do macierzy $\tilde{A}$ oraz $\tilde{B}$. W niektórych pozycjach literaturowych rozważa się nieco szerszą klasę układów, ale przy dodatkowych ograniczeniach na sterowania [38], [245].

7.3. Zastosowanie kanonicznej formy Jordana do badania sterowalności [192]

Do badania sterowalności biliniowych, dyskretnych układów dynamicznych, podobnie jak w przypadku układów liniowych, można zastosować kanoniczną formę Jordana macierzy.

Sprowadzenie biliniowego, dyskretnego układu dynamicznego do kanonicznej formy Jordana daje jasny pogląd na jego strukturę wewnętrzną, ułatwia symulację cyfrową, a także w znacznej mierze upraszcza kryteria sterowalności układu. Przy generalnym założeniu, które obowiązywać będzie w całej dalszej części niniejszego rozdziału, że macierz $\tilde{A}$ posiada liniowe dzielniki elementarne [258, s. 48], można poprzez nieosobliwe przekształcenie $\tilde{x}(k) = Q\,x(k)$, $\det Q \neq 0$, $k = 0,1,2,\ldots$ sprowadzić biliniowe,dyskretne układy dynamiczne postaci (7.2.1) oraz (7.2.2) do następującej kanonicznej formy Jordana:

$$x(k+1) = A(I + u(k)B)x(k) = A\,x(k) + u(k)A\,B\,x(k) \qquad (7.3.1)$$

$$x(k+1) = A((I + u(k)B)x(k) + c\,u(k)) = A(I + u(k)B)x(k) + A\,c\,u(k) \tag{7.3.2}$$

gdzie:

$$A = Q^{-1}\tilde{A}\,Q = \operatorname{diag}[s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n], \quad \text{macierz diagonalna} \tag{7.3.3}$$

s_i, $i = 1,2,3,\ldots,n$, wartości własne macierzy $\tilde{A}$

$$B = Q^{-1}\tilde{B}\,Q = Q^{-1}\tilde{c}\,\tilde{d}^T Q = c\,d^T = [c_i d_j] = [b_{ij}], \quad i,j=1,2,3,\ldots,n \tag{7.3.4}$$

$$c = Q^{-1}\tilde{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_n]^T \tag{7.3.5}$$

$$d^T = \tilde{d}^T Q = [d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots, d_n] \tag{7.3.6}$$

Ponieważ nieosobliwa transformacja układu współrzędnych nie wpływa na sterowalność biliniowego, dyskretnego układu dynamicznego, więc istnieje możliwość określania sterowalności układów (7.2.1) oraz (7.2.2) na podstawie badania sterowalności ich kanonicznych form Jordana (7.3.1) oraz (7.3.2). Wykorzystując zamieszczone w podrozdziale 7.2 warunki konieczne i wystarczające sterowalności, można sformułować następujące, równoważne kryteria sterowalności.

TWIERDZENIE 7.3.1. Biliniowy, dyskretny, jednorodny układ dynamiczny (7.2.1) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą równocześnie następujące warunki:

1) wartości własne s_i, $(i = 1,2,3,\ldots,n)$ są parami różne,

2) macierz B nie zawiera elementów zerowych,

3) największy wspólny dzielnik r, dla wszystkich $j \in J = \left\{ j: \sum_{i=1}^{i=n} b_{ii} s_i^j \neq 0,\ 0 < j \leqslant n^2 \right\}$, jest równy jeden.

D o w ó d. Ponieważ $A = \operatorname{diag}[s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n]$, więc zachodzą następujące równości:

$$A^p c = [c_1 s_1^p, c_2 s_2^p, \ldots, c_i s_i^p, \ldots, c_n s_n^p]^T, \quad p = 0,1,2,\ldots \tag{7.3.7}$$

Stąd macierz $W[A \mid c]$ ma postać następującą:

$$W[A \mid c] = \begin{bmatrix} c_1, & c_1 s_1 & \cdots & c_1 s_1^p & \cdots & c_1 s_1^{n-1} \\ c_2, & c_2 s_2 & \cdots & c_2 s_2^p & \cdots & c_2 s_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_i, & c_i s_i & \cdots & c_i s_i^p & \cdots & c_i s_i^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n, & c_n s_n & \cdots & c_n s_n^p & \cdots & c_n s_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{7.3.8}$$

Wykorzystując własności wyznacznika Vandermonde'a otrzymuje się, że rząd $W\left[A \mid c\right] = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s_i \neq s_j$, dla $i \neq j$ oraz $c_i \neq 0$, dla $i = 1,2,3,...$

W podobyn sposób uzyskuje się

$$A^T{}^p d = \left[d_1 s_1^p, d_2 s_2^p \ \dots\ d_i s_i^p \ \dots\ d_n s_n^p\right]^T, \quad p = 0,1,2,... \tag{7.3.9}$$

Zatem macierz $W\left[A^T \mid d\right]$ jest postaci następującej:

$$W\left[A^T \mid d\right] = \begin{bmatrix} d_1, & d_1 s_1 & \dots & d_1 s_1^p & \dots & d_1 s_1^{n-1} \\ d_2, & d_2 s_2 & \dots & d_2 s_2^p & \dots & d_2 s_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_i, & d_i s_i & \dots & d_i s_i^p & \dots & d_i s_i^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_n, & d_n s_n & \dots & d_n s_n^p & \dots & d_n s_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{7.3.10}$$

Stąd, rząd $W\left[A^T \mid d\right] = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s_i \neq s_j$, dla $i \neq j$ oraz $c_i \neq 0$ dla $i = 1,2,3,...$ Zatem warunek (7.2.3) twierdzenia 7.2.1 jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $s_i \neq s_j$ dla $i \neq j$ oraz $c_i \neq 0$, $d_i \neq 0$ dla $i = 1,2,3,...$

Ponieważ $B = c\, d^T$, więc niezerowanie się elementów wektorów c oraz d jest równoważne warunkowi, że macierz B nie zawiera elementów zerowych.

Ponadto zachodzą następujące równości:

$$d^T A^j c =$$

$$= \left[d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_n\right] \operatorname{diag}\left[s_1^j, s_2^j, \dots, s_i^j, \dots, s_n^j\right] \left[c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_n\right]^T =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} c_i d_i s_i^j = \sum_{i=1}^{i=n} b_{ii} s_i^j, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n^2 \tag{7.3.11}$$

Zatem

$$J = \left\{j : d^T A^j c \neq 0, \quad 0 < j \leqslant n^2\right\} = \left\{j : \sum_{i=1}^{i=n} b_{ii} s_i^j \neq 0, \quad 0 < j \leqslant n^2\right\}$$

Stąd warunek (7.2.4) twierdzenia 7.2.1 jest równoważny warunkowi 3) twierdzenia 7.3.1. Wykazano więc równoważność twierdzenia 7.2.1 oraz twierdzenia 7.3.1.

TWIERDZENIE 7.3.2. Biliniowy, dyskretny układ dynamiczny niejednorodny, postaci (7.2.2) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą równocześnie następujące warunki:

1) wartości własne s_i $(i = 1,2,3,...)$ są parami różne,

2) macierz B nie zawiera wierszy zerowych,

3) $s_i \neq 1$, dla $i \in I = \{i : d_i \neq 0\}$.

O w ó d. Ponieważ brak wierszy zerowych w macierzy B jest równoważny nierównościom $c_i \neq 0$ dla $i = 1,2,3,...,n$, więc na podstawie dowodu twierdzenia 7.3.1 warunki 1) oraz 2) twierdzenia 7.3.2 są równoważne warunkowi (7.2.5) twierdzenia 7.2.2..

Wykorzystując zależności (7.3.9) uzyskuje się następującą równość:

$$\begin{bmatrix} 1, d^T \\ 1, d^T A^r \\ 1, d^T A^{2r} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1, d^T A^{pr} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1, d^T A^{ar} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, d_1 & d_2 & \cdots d_i & \cdots d_n \\ 1, d_1 s_1^r, & d_2 s_2^r & \cdots d_i s_i^r & \cdots d_n s_n^r \\ 1, d_1 s_1^{2r}, & d_2 s_2^{2r} & \cdots d_i s_i^{2r} & \cdots d_n s_n^{2r} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 1, d_1 s_1^{pr}, & d_2 s_2^{pr} & \cdots d_i s_i^{pr} & \cdots d_n s_n^{pr} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 1, d_1 s_1^{ar}, & d_2 s_2^{ar} & \cdots d_i s_i^{ar} & \cdots d_n s_n^{ar} \end{bmatrix} \qquad (7.3.12)$$

Ponieważ $ar = m =$ rząd $W\left[A^T \mid d\right]$ = ilość niezerowych elementów wektora d (dla przypadku, gdy $s_i \neq s_j$, $i \neq j$), więc rząd macierzy określonej równością (7.3.12) będzie maksymalny, to znaczy równy $(a+1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek 3) twierdzenia 7.3.2. Wynika to bezpośrednio z własności wyznacznika Vandermonde'a oraz podstawowych zależności dotyczących obliczania rzędów macierzy. Zatem dowiedziono równoważności warunku (7.2.5) twierdzenia 7.2.2 oraz warunku 3) twierdzenia 7.3.2.Wykazano więc równoważność twierdzenia 7.2.2 oraz twierdzenia 7.3.2.

Uwaga 7.3.1. Kanoniczną formę Jordana stosowano często do badania sterowalności układów liniowych [40], [43], [56], [167], [170], [258], [355] oraz złożonych układów liniowych [39], [42], [70], [78], [168], [169], [174], [267], [350], [351]. Brak natomiast w literaturze rezultatów dotyczących jej zastosowania do badania sterowalności układów biliniowych.

7.4. Przykłady [192]

1) Niech będzie dany biliniowy, dyskretny, jednorodny układ dynamiczny postaci (7.3.1) o następujących macierzach i wektorach:

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad d^T = [1 \quad 0]$$

gdzie $0 \neq s_1 \neq s_2 \neq 0$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $n = 2$.

Stąd otrzymuje się:

$$\sum_{i=1}^{i=n} b_{ii} s_i^j = c_1 s_1^j \neq 0, \quad \text{dla} \quad 0 < j \leq n^2 = 4$$

Zatem $j = \{1, 2, 3, 4\}$, czyli $r = 1$.

Ponieważ macierz B zawiera elementy zerowe, więc warunek 2) twierdzenia 7.3.1 nie jest spełniony, a zatem rozpatrywany układ dynamiczny nie jest sterowalny.

Niesterowalne stany początkowe układu dynamicznego można wyznaczyć na podstawie analizy relacji (7.3.1), skąd otrzymuje się następujące zależności:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + u(k) \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + c_1 u(k) & 0 \\ c_2 u(k) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_1 + s_1 c_1 u(k) & 0 \\ s_2 c_2 u(k) & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s_1 + s_1 c_1 u(k)) x_1(k) \\ s_2 c_2 u(k) x_1(k) + s_2 x_2(k) \end{bmatrix} \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Zatem, dla $x(0) = [0 \quad x_2(0)]^T$ ($x_2(0)$ dowolne) otrzymuje się następujące równości:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_2 x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_2^{k+1} x_2(0) \end{bmatrix} \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Wynika stąd, że początkowe stany układu dynamicznego postaci $x(0) = [0 \quad x_2(0)]^T$ ($x_2(0)$ dowolne) nie są sterowalne (pierwsza współrzędna jest zawsze zerowa).

2) Niech będzie dany biliniowy, dyskretny, jednorodny układ dynamiczny postaci (7.3.1) o następujących macierzach i wektorach:

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b & b \\ -b & -b \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \qquad d^T = [1 \quad 1]$$

gdzie $0 \neq s_1 \neq s_2 \neq 0$, $b \neq 0$, $n = 2$.

Ponadto

$$\sum_{i=1}^{i=n} b_{ii} s_i^j = b_{11} s_1^j + b_{22} s_2^j = b s_1^j - b s_2^j = b(s_1^j - s_2^j), \quad \text{dla} \quad 0 < j \leqslant n^2 = 4$$

Ponieważ $b(s_1 - s_2) \neq 0$, więc $r = 1$. Ponieważ macierz B nie zawiera elementów zerowych, wartości własne macierzy A są parami różne oraz $r = 1$, więc na mocy twierdzenia 7.3.1 rozpatrywany układ dynamiczny jest sterowalny.

3) Niech będzie dany biliniowy, dyskretny, niejednorodny układ dynamiczny postaci (7.3.2) o następujących macierzach i wektorach:

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad d^T = [1 \quad 0]$$

gdzie $0 \neq s_1 \neq s_2 \neq 0$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $n = 2$.

Zatem warunki 1) oraz 2) twierdzenia 7.3.2 są spełnione.

Jeżeli $s_1 \neq 1$ oraz $s_2 \neq 1$, to również warunek 3) twierdzenia 7.3.2 jest spełniony, a więc rozpatrywany układ dynamiczny jest sterowalny.

Jeżeli natomiast $s_1 = 1$, to ponieważ $d_1 = 1 \neq 0$, więc $I = \{i : d_i \neq 0\} = 1$. Zatem warunek 3) twierdzenia 7.3.2 nie jest spełniony i rozpatrywany układ dynamiczny nie jest sterowalny.

Niesterowalne stany początkowe układu dynamicznego można wyznaczyć na podstawie analizy relacji (7.3.2), skąd otrzymuje się następujące zależności:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + u(k) \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} u(k) \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 + c_1 u(k) & 0 \\ c_2 u(k) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} u(k) \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) + c_1 u(k) x_1(k) + c_1 u(k) \\ c_2 u(k) x_1(k) + x_2(k) + c_2 u(k) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1(k) + c_1 u(k) x(k) + c_1 u(k) \\ s_2 (c_2 u(k) x_1(k) + x_2(k) + c_2 u(k)) \end{bmatrix} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Zatem, dla $x(0) = [-1 \quad x_2(0)]^T$ ($x_2(0)$ dowolne) otrzymuje się następujące równości:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ s_2 x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ s_2^{k+1} x_2(0) \end{bmatrix} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Wynika stąd, że początkowe stany układu dynamicznego postaci $x(0) = [-1 \quad x_2(0)]^T$ ($x_2(0)$ dowolne) nie są sterowalne (pierwsza współrzędna jest zawsze równa -1).

Jeżeli $s_1 \neq 1$, to ponieważ $I = \{1\}$, więc nawet w przypadku, gdy $s_2 = 1$, rozpatrywany układ dynamiczny jest sterowalny na podstawie twierdzenia 7.3.2.

4) Niech będzie dany biliniowy, dyskretny, niejednorodny układ dynamiczny postaci (7.3.2), o następujących macierzach i wektorach:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & c_1 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad d^T = [0 \quad 1]$$

gdzie $s_2 \neq 0$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $n = 2$.
Ponieważ $I = \{2\}$ oraz $d_2 = 1 \neq 0$, więc warunki 1), 2), 3) twierdzenia 7.3.2 są spełnione, a zatem rozpatrywany układ dynamiczny jest sterowalny.

5) Niech będzie dany biliniowy, dyskretny, niejednorodny układ dynamiczny postaci (7.3.2) o następujących macierzach i wektorach:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ b & b & 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} \quad d^T = [1 \quad 1 \quad 0]$$

gdzie $b \neq 0$, $1 \neq s_3 \neq -1$, $s_3 \neq 0$, $n = 3$.

Zatem $I = \{1, 2\}$, a ponieważ $s_1 = 1$, więc warunek 3) twierdzenia 7.3.2 nie jest spełniony i rozpatrywany układ dynamiczny nie jest sterowalny.

Dla porównania nakładu obliczeń zbadamy obecnie sterowalność tego samego układu dynamicznego, ale w oparciu o twierdzenie 7.2.2. Łatwo można sprawdzić, że zachodzą równości

$$m = \text{rząd } W\left[A^T \mid d\right] = \text{rząd } \left[d \mid A^T d \mid A^{T^2} d\right] = 2$$

$$\text{oraz rząd } W\left[A \mid c\right] = \text{rząd}\left[c \mid Ac \mid A^2 c\right] = 3 = n$$

$$d^T A^j c = \begin{cases} 0, & \text{dla } j \text{ nieparzystych} \\ 2, & \text{dla } j \text{ parzystych} \end{cases} \qquad 0 < j \leqslant n^2 = 9$$

Zatem $J = \{2, 4, 6, 8\}$, czyli $r = 2$, a więc $a = \frac{m}{r} = \frac{2}{2} = 1$.

Wykorzystując relację (7.2.6) oraz powyższe zależności otrzymuje się następującą równość:

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} 1 & d^T \\ 1 & d^T A^2 \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2 = a + 1$$

Tak więc warunek (7.2.6) twierdzenia 7.2.2 nie jest spełniony i rozpatrywany układ dynamiczny nie jest sterowalny. W powyższym przykładzie widać, że nakład obliczeń przy wykorzystaniu twierdzenia 7.2.2 był znacznie większy niż przy stosowaniu twierdzenia 7.3.2.

Uwaga 7.4.1. Pomiędzy sterowalnością biliniowego, dyskretnego, jednorodnego układu dynamicznego postaci (7.2.1) oraz sterowalnością układu niejednorodnego postaci (7.2.2) o tych samych parametrach nie ma żadnych wzajemnych implikacji. Układ jednorodny może być sterowalny, natomiast układ niejednorodny może być niesterowalny i odwrotnie - sterowalność układu niejednorodnego nie musi pociągać za sobą sterowalności układu jednorodnego. Wynika to z dokładniejszej analizy warunków zawartych w sformułowanych w poprzednich podrozdziałach twierdzeń. Znajduje to także swoje odbicie w przytoczonych przykładach. Jeżeli w przykładzie 1) $s_1 \neq 1$, to układ jednorodny pozostaje w dalszym ciągu niesterowalny, natomiast układ niejednorodny jest sterowalny. W przykładzie 3) układ jednorodny jest sterowalny, natomiast jeżeli $s_1 = 1$ lub $s_2 = 1$, to układ niejednorodny nie jest sterowalny.

Uwaga 7.4.2. Nakład obliczeń przy stosowaniu twierdzeń opartych o kanoniczną formę Jordana jest na ogół mniejszy niż przy stosowaniu twierdzeń podrozdziału 7.2.

Uwaga 7.4.3. Stosowanie kanonicznej formy Jordana umożliwia łatwe wyznaczenie stanów niesterowalnych, tworzących rozmaitości liniowe (przykład 1) oraz przykład 3)).

W N I O S K I

W pracy rozpatrzono problematykę sterowalności liniowych oraz nieliniowych układów dynamicznych z różnego typu opóźnieniami w sterowaniu. Sformułowano liczne kryteria sterowalności dla pewnych klas układów dynamicznych. Do najważniejszych rezultatów należy zaliczyć:

1) warunki konieczne i wystarczające względnej i absolutnej sterowalności liniowych układów dynamicznych ze skupionymi i rozłożonymi,zmiennymi w czasie opóźnieniami w sterowaniu,
2) warunki wystarczające globalnej i lokalnej sterowalności nieliniowych układów dynamicznych z wielokrotnymi, zmiennymi w czasie, skupionymi opóźnieniami w sterowaniu,
3) warunki konieczne i wystarczające aproksymacyjnej sterowalności liniowych układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego z opóźnieniami w sterowaniu,
4) warunki konieczne i wystarczające sterowalności biliniowych, dyskretnych układów dynamicznych, umożliwiające w stosunkowo prosty sposób wyznaczenie niesterowalnych stanów układu,
5) analityczne rozwiązanie problemu sterowania z minimalną energią układami dynamicznymi liniowymi, niestacjonarnymi, skończenie wymiarowymi ze zmiennymi opóźnieniami w sterowaniu.

Uzyskane rezultaty stanowią uogólnienie i rozszerzenie wyników spotykanych w literaturze dotyczącej sterowalności. Dzięki szerokiemu wykorzystaniu metod analizy funkcjonalnej, a w szczególności teorii operatorów liniowych i teorii półgrup operatorów, uzyskano zwięzłość i prostotę dowodów oraz precyzję sformułowań. Przytoczono kilka przykładów ilustrujących zastosowanie podanych kryteriów sterowalności.

Praca zawiera również syntetyczny przegląd zagadnień sterowalności układów dynamicznych wraz z danymi bibliograficznymi.

D O D A T E K

W dodatku zostaną zamieszczone dwa lematy, będące uzupełnieniem dowodu twierdzenia 2.3.1. Dowody tych lematów wymagają żmudnych przeliczeń o charakterze czysto matematycznym, nie związanych bezpośrednio z zasadniczą tematyką pracy, w związku z czym umieszczone zostały w dodatku.

Lemat 1. Operator P, określony równością (2.3.5), przekształca domknięty, wypukły podzbiór przestrzeni Banacha $C_n[t_0,t_1]$ w jego zwarty podzbiór.

D o w ó d. Dowód lematu 1 opiera się zasadniczo na twierdzeniu Arzela-Ascoli [337, ss. 34, 131], które, dla wygody Czytelnika, zostanie przytoczone w pełnym brzmieniu: "Zbiór $\Omega \subset C_n[t_0,t_1]$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą dwa poniższe warunki:

1) funkcje $y(t) \subset \Omega$ są wspólnie ograniczone, czyli istnieje stała dodatnia K taka, że

$$\sup_{y \subset \Omega} \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |y(t)| \leqslant K \tag{1}$$

2) funkcje $y(t) \subset \Omega$ są jednakowo ciągłe, czyli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\eta > 0$, zależne tylko od ε, że nierówność $|y(t) - y(\bar{t})| < \varepsilon$ zachodzi dla dowolnych $t, \bar{t} \in [t_0,t_1]$, spełniających warunek $|t - \bar{t}| < \eta$ oraz dla wszystkich funkcji $y(t) \subset \Omega$.

Oprócz oznaczeń wprowadzonych w rozdziale 2, dla macierzy n x p - wymiarowych G(t), których elementy $g_{ij}(t) \in C_1[t_0,t_1]$, i = 1,2,3,...,n, j = 1,2,3,...,p definiuje się normę w sposób następujący:

$$\|G(t)\| = \max_j \sum_{i=1}^{i=n} |g_{ij}(t)| \tag{2}$$

Niech rozpatrywanym, domkniętym, wypukłym podzbiorem przestrzeni $C_n[t_0,t_1]$ będzie kula domknięta $\Psi \in C_n[t_0,t_1]$ o środku w zerze i promieniu K, tzn.

$$\Psi = \left\{ y = y \in C_n[t_0,t_1], \|y\| \leqslant K \right\} \tag{3}$$

gdzie stała K wyraża się następującą zależnością:

$$K = [(1+K_w)|x(t_0)| + K_w|x_1| \exp(nN(t_1 - t_0)) +$$

$$+ K_f(t_1 - t_0)(1+K_w)\exp(nN(t_1 - t_0))] \exp(nN(t_1 - t_0)) \qquad (4)$$

gdzie:

$$K_w = \sup_{y \in C_n[t_0,t_1]} \|W^{-1}(t_0,t_1;y)\| npM^2(t_1 - t_0)\exp(2nN(t_1 - t_0)) \qquad (5)$$

Ponieważ $F(t,t_0;y)$ jest macierzą tranzycji układu liniowego (2.2.9), więc spełnia ona następujące, macierzowe równanie różniczkowe [355, s. 339] :

$$\frac{d}{dt} F(t,t_0;y) = A(t,y(t))F(t,t_0;y) \qquad (6)$$

z warunkiem początkowym $F(t_0,t_0;y) = I$

Zatem

$$F(t,t_0;y) = I + \int_{t_0}^{t} A(s,y(s))F(s,t_0;y)ds \qquad (7)$$

Stąd

$$\|F(t,t_0;y)\| = \|I + \int_{t_0}^{t} A(x,y(s))F(s,t_0;y)ds\| \leqslant \|I\| +$$

$$+ \| \int_{t_0}^{t} A(s,y(s))F(s,t_0;y)ds\| \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \int_{t_0}^{t} \|A(s,y(s))F(s,t_0;y)\|ds \leqslant 1 + \int_{t_0}^{t} \|A(s,y(s)\| \cdot \|F(s,t_0;y)\| \, ds \qquad (8)$$

Na mocy nierówności Bellmana nierówność (8) jest równoważna następującej nierówności:

$$\|F(t,t_0;y)\| \leqslant \exp(\int_{t_0}^{t} \|A(s,y(s))\|ds) \qquad (9)$$

Ponieważ na podstawie nierówności (2.2.2) oraz definicji normy macierzy (2) zachodzi

$$\|A(t,y(t))\| = \max_j\left(\sum_{i=1}^{i=n}\left|a_{ij}(t,y(t))\right|\right) \leqslant n\,N \tag{10}$$

więc

$$\|F(t,t_0;y)\| \leqslant \exp\left(\int_{t_0}^{t}\|A(s,y(s))\|\,ds\right) \leqslant \exp\int_{t_0}^{t} n\,N\,ds =$$

$$= \exp(nN(t-t_0)) \leqslant \exp(nN(t_1-t_0)) \tag{11}$$

Ponieważ zachodzi nierówność (2.2.3), więc

$$\|B(t,y(t))\| = \max_j\left(\sum_{i=1}^{i=n}\left|b_{ij}(t,y(t))\right|\right) \leqslant n\,M \tag{12}$$

Wykorzystując definicję normy macierzy (2) oraz własności macierzy transponowanych, otrzymuje się następujące nierówności:

$$\|A^T(t,y(t))\| = \max_i\left(\sum_{j=1}^{j=n}\left|a_{ij}(t,y(t))\right|\right) \leqslant n\,N \tag{13}$$

$$\|B^T(t,y(t))\| = \max_i\left(\sum_{j=1}^{j=m}\left|b_{ij}(t,y(t))\right|\right) \leqslant m\,M \tag{14}$$

$$\|F^T(t,t_0;y)\| \leqslant \exp(nN(t-t_0)) \leqslant \exp(nN(t_1-t_0)) \tag{15}$$

Ponieważ $F^{-1}(t,t_0;y) = F(t_0,t;y)$ [355, s. 341], więc na mocy (11) otrzymuje się zależność:

$$\|F^{-1}(t,t_0;y)\| \leqslant \exp(nN(t-t_0)) \leqslant \exp(nN(t_1-t_0)) \tag{16}$$

Uwzględniając nierówności (11), (12), (14), (15) oraz zależność (2.2.10) uzyskuje się:

$$\|F(t_0,t;y)B(t,y(t))\| \leqslant \|F(t_0,t;y)\| \cdot \|B(t,y(t))\| \leqslant$$

$$\leqslant nM\exp(nN(t - t_0) \leqslant nM \exp(nN(t_1 - t_0)) \qquad (17)$$

$$\|B^T(t,y(t))F^T(t_0,t;y)\| \leqslant \|B^T(t,y(t))\| \cdot \|F^T(t_0,t;y)\| \leqslant mM \exp(nN(t_1 - t_0)) \qquad (18)$$

$$\|W(t_0,t;y)\| = \int_{t_0}^{t} nM \exp(nN(t_1 - t_0))mM \exp(nN(t_1 - t_0))ds =$$

$$= nmM^2\exp(2nN(t_1 - t_0))(t - t_0) \leqslant nmM^2(t_1 - t_0)\exp(2nN(t_1 - t_0)) \qquad (19)$$

Powyższe oszacowania będą wykorzystane do określenia promienia kuli o środku w zerze, w której znajdować się będzie co najmniej jeden punkt stały operatora P.

Niech $y \in \Psi$, wówczas na podstawie (2.3.5) oraz nierówności (11), (17), (18), (19), a także (2.2.4) otrzymuje się następujące oszacowania:

$$\|Py\| \leqslant \|F(t,t_0;y)\| \cdot |x(t_0)| + \int_{t_0}^{t} \|F(t,s;y)B(s,y)\|ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|F(t,s;y)B(s,y)\| \cdot \|B^T(s,y)F^T(t_0,s;y)\| ds \cdot$$

$$\cdot \|W^{-1}(t_0,t_1;y)\| \left(|x(t_0)| + \|F(t_0,t_1;y)\| \cdot |x_1| + \int_{t_0}^{t_1} \|F(t_0,s;y)\| \cdot \|f(s,y)\| ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant |x(t_0)| \exp(nN(t_1 - t_0)) + (t_1 - t_0)K_f \exp(nN(t_1 - t_0)) +$$

$$+ (t_1 - t_0)nmM^2\exp(2nN(t_1 - t_0)) \cdot \sup_{y \in C_n[t_0,t_1]} \|W^{-1}(t_0,t_1;y)\|(|x(t_0)| +$$

$$+ (t_1 - t_0)K_f\exp(nN(t_1 - t_0)) + |x_1| \exp(2nN(t_1 - t_0))) = K \qquad (20)$$

Zatem $\|Py\| \leqslant K$, a więc operator P przekształca zbiór Ψ w siebie, bo element $y \in \Psi$ był wybrany w sposób dowolny.

W dowodzie zwartości zbioru $\Omega = P\Psi$ wykorzystane zostanie twierdzenie Arzela-Ascoli, cytowane na wstępie niniejszego dowodu. Ponieważ na mocy nierówności (20) funkcje $y \in \Omega$ są wspólnie ograniczone przez stałą K, więc warunek (1) twierdzenia Arzela-Ascoli jest spełniony. Dla dowodu jednakowej ciągłości funkcji $y \in \Omega$ wystarczy dowieść, [337, rozdz. I.2], że funkcje należące do zbioru Ω spełniają w przedziale $[t_0, t_1]$ warunek Lipschitza z jednakową stałą L. Dla każdej funkcji $y \in \Omega$, na mocy (2.3.5) oraz dla każdych $t, \bar{t} \in [t_0, t_1]$ otrzymuje się następujące równości:

$$\|y(t) - y(\bar{t})\| = \|(F(t,t_0;y) - F(\bar{t},t_0;y))x(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} F(t,s;y)f(s,y)ds - \int_{t_0}^{\bar{t}} F(\bar{t},s;y)f(s,y)ds +$$

$$+ \Big(\int_{t_0}^{\bar{t}} F(\bar{t},s;y)B(s,y)B^T(s,y)F^T(t_0,s;y)ds -$$

$$- \int_{t_0}^{t} F(t,s;y)B(s,y)B^T(s,y)F^T(t_0,s;y)ds\Big) \cdot$$

$$\cdot W^{-1}(t_0,t_1;y)\Big(x(t_0) - F(t_0,t_1;y)x_1 + \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;y)f(s,y)ds\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \|F(t,t_0;y) - F(\bar{t},t_0;y)\| \cdot |x(t_0)| + \Big\|F(t,t_0;y)\int_{t_0}^{t} F(t_0,s;y)f(s,y)ds -$$

$$- F(\bar{t},t_0;y)\int_{t_0}^{\bar{t}} F(t_0,s;y)f(s,y)ds\Big\| +$$

$$+ \Big\|F(\bar{t},t_0;y)\int_{t_0}^{\bar{t}} F(t_0,s;y)B(s,y)B^T(s,y)F^T(t_0,s;y)ds -$$

$$- F(t,t_0;y) \int_{t_0}^{t} F(t_0,s;y)B(s,y)B^T s,y)F^T(t_0,s;y)ds\| \cdot$$

$$\cdot \|W^{-1}(t_0,t_1;y)\| \cdot |x(t_0)| + \|F(t_0,t_1;y)\| \cdot |x_1| + \int_{t_0}^{t_1} \|F(t_0,s;y)f(s,y)\| ds \tag{21}$$

W celu oszacowania wyrażenia $\|F(t,t_0;y) - F(\bar{t},t_0;y)\|$ wykorzystuje się fakt, że poszczególne elementy macierzy $F(t,t_0;y)$ są różniczkowalne w przedziale $[t_0,t_1]$, [355, s. 339]. Zatem, wykorzystując definicję normy macierzy (2), otrzymuje się następujące oszacowanie:

$$\|F(t,t_0;y) - F(\bar{t},t_0;y)\| =$$

$$= \max_j \left(\sum_{i=1}^{i=n} |f_{ij}(t,t_0;y) - f_{ij}(\bar{t},t_0;y)| \right) \leqslant \max_j \left(\sum_{i=1}^{i=n} d_{ij} |t - \bar{t}| \right) \leqslant nd|t - \bar{t}| \tag{22}$$

gdzie $f_{ij}(t,t_0;y)$, $i,j = 1,2,3,\ldots,n$ elementy macierzy $F(t,t_0;y)$

$$d_{ij} = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \left| \frac{d}{dt}(f_{ij}(t,t_0;y)) \right| \qquad i,j = 1,2,3,\ldots,n$$

$$d = \max_{i,j} d_{ij}$$

Korzystając z relacji (9), (12), (14), (15), (19), a także wykorzystując znane twierdzenia analizy matematycznej [337] można dokonać następujących oszacowań:

$$\|F(\bar{t},t_0;y) \int_{t_0}^{\bar{t}} F(t_0,s;y)B(s,y)B^T(s,y)F^T(t_0,s;y)ds -$$

$$- F(t,t_0;y) \int_{t_0}^{t} F(t_0,s;y)B(s,y)B^T(s,y)F^T(t_0,s;s)ds\| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \Big\| \Big(\frac{d}{dt} F(t,t_0;y)\Big) \int_{t_0}^{t} F(t_0,s;y)B(s,y)B^T(s,y)F^T(t_0,s;y)ds \; +$$

$$+ F(s,t_0;y)\frac{d}{dt}\Big(\int_{t_0}^{t} F(t_0,s;y)B(s,y)B^T(s,y)F^T(t_0,s;y)ds\Big\|\Big) \cdot \left|t - \bar{t}\right| =$$

$$= \Big(\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \Big\| A(t,y)F(s,t_0;y) \int_{t_0}^{t} F(t_0,s;y)B(s,y)B^T(s,y)F^T(t_0,s;y)ds \; +$$

$$+ F(t,t_0;y)F(t_0,t;y)B(t,y)B^T(t,y)\; F(t_0,t;y)\Big\|\Big) \left|t - \bar{t}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|A(t,y)\| \cdot \|F(t,t_0;y)\| \cdot \|F(t_0,t;y)B(t,y)\| \cdot \|B^T(t,y)F^T(t_0,t;y)\| \cdot |t-t_0| +$$

$$+ \|F(t,t_0;y)\| \cdot \|F(t_0,t;y)\| \; \|B(t,y)\| \; \|B^T(t,y)\| \; \|F^T(t_0,t;y)\|\Big) \cdot \left|t - \bar{t}\right| \leqslant$$

$$\leqslant nN \exp(nN(t_1 - t_0))nmM^2\exp(2nN(t_1 - t_0)) \left|t_1 - t_0\right| +$$

$$+ \exp(nN(t_1 - t_0))nmM^2\exp(2nN(t_1 - t_0)) \left|t - \bar{t}\right| =$$

$$= nmM^2\exp(3nN(t_1 - t_0))(nN(t_1 - t_0) + 1) \cdot \left|t - \bar{t}\right| = K_1 \left|t - \bar{t}\right| \qquad (23)$$

gdzie:

$$K_1 = nmM^2(nN(t_1 - t_0) + 1)\exp(3nN(t_1 - t_0)) \qquad (24)$$

Korzystając z relacji (2.2.4), (2.2.5), (11) otrzymuje się następujące oszacowania:

$$\Big\| F(t,t_0;y) \int_{t_0}^{t} F(t_0,s;y)f(s,y)ds - F(\bar{t},t_0;y) \int_{t_0}^{\bar{t}} F(t_0,s;y)f(s,y)ds\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_q} \Big\| \Big(\frac{d}{dt} F(t,t_0;y)\Big) \int_{t_0}^{t} F(t_0,s;y)f(s,y)ds \; +$$

$$+ F(s,t_0;y)\left(\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} F(t_0,s;y)f(s,y)ds\right)\| \big)\ |t - \bar{t}| =$$

$$= \Big(\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|A(t,y)F(t,t_0;y) \int_{t_0}^{t} F(t_0,s;y)f(s,y)ds +$$

$$+ F(t,t_0;y)F(t_0,t;y)f(t,y)\| \big)\ |t - \bar{t}| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|A(t,y)\|\ \|F(t,t_0;y)\|\ \|F(t_0,t;y)\|\ \|f(t,y)\|\ |t_1 - t_0| +$$

$$+ \|F(t,t_0;y)\|\ \|F(t_0,t;y)\|\ \|f(t,y)\| \big)\ |t - \bar{t}| \leqslant$$

$$\leqslant nNK_f(t_1 - t_0)\exp(2nN(t_1 - t_0)) + K_f\exp(2nN(t_1 - t_0))|t - \bar{t}| =$$

$$= K_f(nN(t_1 - t_0) + 1)\exp(2nN(t_1 - t_0))\ |t - \bar{t}| = K_2|t - \bar{t}| \qquad (25)$$

gdzie

$$K_2 = K_f\ nN((t_1 - t_0) + 1)\exp(2nN(t_1 - t_0)) \qquad (26)$$

Zatem, na podstawie nierówności (22), (23) oraz (25) zachodzą następujące zależności:

$$\bigwedge_{y \in \Omega}\ \bigwedge_{t,\bar{t} \in [t_0,t_1]} \|y(t) - y(\bar{t})\| \leqslant nd|x(t_0)\|t - \bar{t}| + K_2|t - \bar{t}| +$$

$$\sup_{y \in C_n[t_0,t_1]} \|W^{-1}(t_0,t_1;y)\| \left(|x(t_0)| + K_f(t_1 - t_0)\exp(nN(t_1 - t_0))\right)K_1|t - \bar{t}| =$$

$$= L|t - \bar{t}| \qquad (27)$$

gdzie:

$$L = nd|x(t_0)| + K_2 + \sup_{y \in C_n[t_0,t_1]} \|W^{-1}(t_0,t_1;y)\|K_1(|x(t_0)| +$$

$$+ K_f(t_1 - t_0)\cdot\exp(nN(t_1 - t_0))) \qquad (28)$$

Z nierówności (27) wynika, że każda funkcja $y \in \Omega$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L, w przedziale $[t_0,t_1]$ (stała Lipschitza L jest wspólna dla wszystkich funkcji $y \in \Omega$). Zatem funkcje $y \in \Omega$ tworzą rodzinę funkcji jednakowo ciągłych w przedziale $[t_0,t_1]$. Tak więc, wszystkie założenia twierdzenia Arzela-Ascoli odnośnie do zbioru Ω są spełnione, a zatem zbiór Ω jest zbiorem zwartym w topologii przestrzeni Banacha $C_n[t_0,t_1]$. W ten sposób lemat 1 został udowodniony.

Na podstawie twierdzenia 2.3.1 istnieje co najmniej jedna funkcja $\bar{y} \in C_n[t_0,t_1]$, spełniająca równość (2.3.7), tzn.

$$\bar{y}(t) = F(t,t_0;\bar{y})x(t_0) -$$

$$- \int_{t_0}^{t} F(t,s;\bar{y})B(s,\bar{y})B^T(s,\bar{y})F^T(t_0,s;\bar{y})ds\ W^{-1}(t_0,t_1;\bar{y})\Big(x(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;\bar{y})f(s,\bar{y})ds - F(t_0,t_1;\bar{y})x_1\Big) + \int_{t_0}^{t} F(t,s;\bar{y})f(s,y)ds \quad t \in [t_0,t_1] \tag{29}$$

W celu wykazania, że funkcja $\bar{y} \in C_n[t_0,t_1]$ spełnia równanie różniczkowe postaci (2.2.1), należy wykazać, że:

1) $\bar{y}(t_0) = x(t_0)$

2) $\dot{\bar{y}}(t) = \dot{x}(t)$ dla $t \in [t_0,t_1]$

Własność 1) wynika natychmiast z następujących przeliczeń:

$$\bar{y}(t_0) = F(t_0,t_0;\bar{y})x(t_0) -$$

$$- \int_{t_0}^{t_0} F(t_0,s;\bar{y})B(s,\bar{y})B^T(s,\bar{y})F^T(t_0,s;\bar{y})dx\ W^{-1}(t_0,t_1;\bar{y})(x(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;\bar{y})f(s,\bar{y})ds - F(t_0,t_0;\bar{y})x_1) + \int_{t_0}^{t_0} F(t_0,s;\bar{y})f(s,\bar{y})ds =$$

$$= F(t_0,t_0;\bar{y})x(t_0) = x(t_0) \tag{30}$$

Własność 2) zostanie wykazana w lemacie 2.

Lemat 2. Zachodzi następująca równość:

$$\dot{\bar{y}}(t) = \dot{x}(t) \qquad t \in [t_0, t_1]$$

D o w ó d. Wykorzystując zależności (2.3.5), (6) oraz (30) otrzymuje się równości:

$$\dot{\bar{y}}(t) = \frac{d}{dt} F(t,t_0;\bar{y})x(t_0) - \frac{d}{dt}(F(t,t_0;\bar{y}) \int_{t_0}^{t} F(t_0,s;\bar{y})B(s,\bar{y})B^T(s,\bar{y})F^T(t_0,s;\bar{y})ds).$$

$$\cdot W^{-1}(t_0,t_1;\bar{y})(x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;\bar{y})f(s,\bar{y})ds - F(t_0,t_1;\bar{y})x_1) +$$

$$+ \frac{d}{dt}(F(t,t_0;\bar{y})f(s,\bar{y})ds) = A(t,\bar{y})F(t,t_0;\bar{y})x(t_0) -$$

$$- (A(t,\bar{y})F(t,t_0;\bar{y}) \int_{t_0}^{t} F(t_0,s;\bar{y})B(s,\bar{y})B^T(s,\bar{y})F^T(s,\bar{y})F^T(t_0,s;\bar{y})ds +$$

$$+ F(t,t_0;\bar{y})F(t_0,t;\bar{y})B(t,\bar{y})B^T(t,\bar{y})F^T(t_0,t;\bar{y}))W^{-1}(t_0,t_1;\bar{y})(x(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;\bar{y})f(s,\bar{y})ds - F(t_0,t_1;\bar{y})x_1) + A(t,\bar{y})F(t,t_0;\bar{y}) \int_{t_0}^{t} F(t_0,s;\bar{y})f(s,\bar{y})ds +$$

$$+ F(t,t_0;\bar{y})F(t_0,t;\bar{y})f(t,\bar{y}) = A(t,\bar{y})F(t,t_0;\bar{y})x(t_0) -$$

$$- B(t,\bar{y})B^T(t,\bar{y})F^T(t_0,t;\bar{y})W^{-1}(t_0,t_1;\bar{y})(x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;\bar{y})f(s,\bar{y})ds -$$

$$- F(t_0,t_1;\bar{y})x_1) + f(t,\bar{y}) - A(t,\bar{y})F(t,t_0;\bar{y}) \int_{t_0}^{t} F(t_0,s;y)B(s,y)B^T(s,y)F^T(t_0,s;y)ds.$$

$$\cdot W^{-1}(t_0,t_1;\bar{y})(x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;\bar{y})f(s,\bar{y})ds - F(t_0,t_1;\bar{y})x_1) +$$

$$+ A(t,\bar{y})F(t,t_0;\bar{y}) \int_{t_0}^{t} F(t_0,s;\bar{y})f(s,\bar{y})ds = A(t,\bar{y})(F(t,t_0;\bar{y})x(t_0) -$$

$$- \int_{t_0}^{t} F(t,s;\bar{y})B(s,\bar{y})B^T(s,\bar{y})F^T(t_0,s;\bar{y})ds \cdot W^{-1}(t_0,t_1;\bar{y})(x(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;\bar{y})f(s,\bar{y})ds - F(t_0,t_1;\bar{y})x_1) + \int_{t_0}^{t} F(t,s;\bar{y})f(s,\bar{y})ds) -$$

$$- B(t,\bar{y})B^T(t,\bar{y})F^T(t_0,t;\bar{y})W^{-1}(t_0,t_1;\bar{y})(x(t_0) - F(t_0,t_1;\bar{y})x_1 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} F(t_0,s;\bar{y})f(s,\bar{y})ds) + f(t,\bar{y})$$

Uwzględniając zależności (2.2.8), (2.3.2) oraz (30) uzyskuje się następującą równość:

$$\dot{\bar{y}}(t) = A(t,\bar{y})x(t) + B(t,\bar{y})u(t) + f(t,\bar{y}) = \dot{x}(t) \quad t \in [t_0,t_1]$$

Zatem funkcja $\bar{y} \in C_n[t_0,t_1]$, określona równością (2.3.5), jest rozwiązaniem równania różniczkowego (2.2.1) z warunkiem początkowym $\bar{y}(t_0) = x(t_0)$.

WYKAZ OZNACZEŃ

$L_q([t_0,t_1], R^p)$ - przestrzeń funkcji całkowalnych w q-tej potędze, określonych w przedziale $[t_0,t_1]$, o wartościach w przestrzeni euklidesowej R^p

$C_n[t_0,t_1]$ - przestrzeń funkcji ciągłych, określonych w przedziale $[t_0,t_1]$, o wartościach w przestrzeni R^n

$PC_p[t_0,t_1]$ - przestrzeń funkcji przedziałami ciągłych, określonych w przedziale $[t_0,t_1]$, o wartościach w przestrzeni R^p

X, U - przestrzenie Banacha lub Hilberta

X^*, U^* - przestrzenie sprzężone do przestrzeni X oraz U

A, B - operatory działające w odpowiednich przestrzeniach

A^*, B^* - operatory sprzężone do operatorów A oraz B

$\mathcal{L}(U,X)$ - przestrzeń operatorów działających z przestrzeni U do przestrzeni X

$\varrho(A)$ - zbiór rezolwenty liniowego operatora A

$R(\lambda,A)$ - rezolwenta liniowego operatora A

λ_k - wartości własne operatora A

$g_k(x)$ - funkcje własne operatora A, odpowiadające wartościom własnym λ_k

$\sigma(A)$ - widmo operatora A

$S(t)$, $t \geqslant 0$ - półgrupa liniowych, ograniczonych operatorów

$\langle \cdot , \cdot \rangle_X$ - iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta X

$\| \cdot \|_X$ - norma w przestrzeni X

$sp\{E_n, n \geqslant 0\}$ - liniowa otoczka wypukła podprzestrzeni $E_n \subset X, n=0,1,2,\ldots$

$\bar{E}$ - domknięcie zbioru $E \subset X$

D(A) - dziedzina operatora A

R(A) - przeciwdziedzina (zbiór wartości) operatora A

N(A) - podprzestrzeń zerowa (jądro) operatora A

$\mathcal{D}_a(A)$ - zbiór wektorów analitycznych operatora A

$K_{[t_0,t_1]}$ - zbiór osiągalny w przedziale $[t_0,t_1]$

$diag[s_i]$ - macierz diagonalna o elementach s_i na przekątnej głównej

T - znak transpozycji wektora lub macierzy

LITERATURA

[1] ALBRECHT F., WAX N.: The controllability of certain nonlinear planar systems. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol.63,no 3, 1978, ss. 762-771.

[2] ALEKSIEJEW N.K.: Niekotoryje woprosy uprawliajemosti dwumiernych sistiem. Differencjalnyje Urawnienije, tom XIII, no 3, 1977,ss.387-397.

[3] ALEKSIEJEW N.K., ROTTIJEW N.S.: O zawisimosti mnożestwa uprawliajemosti ot paramietra. Differencjalnyje Urawnienija, tom XIV,no 9,1978, ss. 1687-1688.

[4] AMBORSKI K.: Stopień sterowalności liniowych układów dynamicznych.Podstawy Sterowania, tom 3, zeszyt 2, 1973, ss. 91-97.

[5] ARONSSON G.: A new approach to nonlinear controllability.Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 44, no 3, 1973, ss. 763-772.

[6] ARONSSON G.: Global controllability and bang-bang steering of certain nonlinear systems. SIAM J. on Control, vol. 11, no 4, 1973, ss. 1-13.

[7] ARTSTEIN Z.: Trajectories and the attainable set of an abstract linear control system. Mathematical Systems Theory, vol. 7, no 3,1973, ss. 265-280.

[8] ATHANS M., FALB P.: Sterowanie optymalne. WNT, Warszawa 1969.

[9] BAJTMAN M.M.: Ob obłastiach uprawliajemosti na płoskosti. Differencjalnyje uprawnienija, tom XIV, no 4, 1978, ss. 579-593.

[10] BALAKRISHNAN A.V.: Introduction to optimization theory in Hilbert space. Springer - Verlag, New York 1971.

[11] BANKS H.T., JACOBS M.Q., LATINA M.R.: The synthesis of optimal controls for linear problems with retarded controls. Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 8, no 2, 1971, ss. 319-366.

[12] BANKS H.T., JACOBS M.Q.: An attainable sets aproach to optimal control of functional differential equations with function space terminal conditions. Journal of Differential Equations, vol. 13,no 1,1973, ss. 127-149.

[13] BANKS H.T., MANITIUS A.: Application of abstract variational theory to hereditary systems-a survey. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-19, no 5, 1974, ss. 524-533.

[14] BANKS H.T., JACOBS M.Q., LANGENHOP C.E.: Charakterization of the controlled states in W_2^1 of linear hereditary systems. SIAM Journal on Control, vol. 13, no 3, 1975, ss. 611-649.

[15] BANKS H.T., MANITIUS A.: Projection series for retarded functional differential equations with applications to optimal control problems. Journal of Differential Equations, vol. 18, no 2, 1975, ss. 296-332.

[16] BARAS J.S., BROCKETT R.W., FUHRMANN P.A.: State-space models for infinite-dimensional systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-19, no 6, 1974, ss. 693-700.

[17] BARAS J.S., BROCKETT R.W.: H^2-functions and infinite-dimensional realization theory. SIAM J. Control, vol. 13, no 1, 1975, ss. 221-241.

[18] BAR-NESS Y., LANGHOLZ G.: Preservation of controllability under sampling, Internationa Journal of Control, vol. 22, no 1, 1975, ss. 39-48.

[19] BASILE G., MARRO G.: A new characterization of some structural properties of linear systems: unknown-input observability,invertibility and functional controllability. International Journal of Control,vol. 17, no 5, 1973, ss. 931-943.

[20] BENCHIMOL C.D.: A note on weak stabilizability of contraction semigroups. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 16,no 3,1978, ss. 373-379.

[21] BENCHIMOL C.D.: Feedback stabilizability in Hilbert spaces. Applied Mathematics and Optimization, vol.4, no 2, 1978, ss. 225-248.

[22] BHAT K.P., KOIVO H.N.: Modal characterization of controllability and observability for time delay systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-21, no 2, 1976, ss. 292-293.

[23] BHATTACHARYYA S., GOMES A.: Output controllability and eigenvalue assignability in single-output linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-18, no 5, 1973, ss. 540-541.

[24] BITTANTI S., GUARDABASSI G., MAFFEZZONI C., SILVERMAN L.: Controllability and the matrix Riccati equation. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 16, no 1, 1978, ss. 37-40.

[25] BRAMMER R.F.: Controllability in linear autonomous systems with positive controllers. SIAM Journal on Control, vol. 10, no 2, 1972,ss. 339-353.

[26] BRAMMER R.F.: Differential controllability and the solution of linear inequalities, part 1, IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-20, no 1, 1975, ss. 128-131.

[27] BRASCH F., HOWZE J.,PEARSON J.: On the controllability of composite systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-16, no 2, 1971, ss. 210-220.

[28] BROGAN L.W.: Optimal control theory applied to systems described by partial differential equations. Advances in Control Systems, vol. 6, 1968, ss. 222-316.

[29] BROCKETT R.W.: On the reachable set for bilinear systems. Theory and Applications of Variable Structure Systems, Academic Press,1972, ss. 54-63.

[30] BROCKETT R.W.: Finite and infinite dimensional bilinear realizations. Journal of the Franklin Institute, vol. 301, no 6, 1976, ss.509-520.

[31] BROCKETT R.W., FUHRMANN P.A.: Normal symmetric dynamical systems.SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 14, no 1, ss. 107-119.

[32] BRUNOWSKI P.: A classification of linear controllable systems.Kybernetika, vol. 6, no 3, 1970, ss. 173-188.

[33] BUBNICKI Z.: Optymalizacja kompleksów operacji w sterowaniu dyskretnymi procesami produkcyjnymi. Materiały VII Krajowej Konferencji Automatyki, tom III, Rzeszów, 1977.

[34] BUŁATOW W.I.: Spektralnaja uprawliajemost sistiem z zapazdywaniem. Differencjalnyje Urawnienija, tom XII, no 10, 1977, ss. 1876-1877.

[35] BUŁATOW W.I.: Ob uprawliajemosti zadannych sostojani sistiem z zapazdywaniami. Differencjalnyje Urawnienija, tom XIV, no 12, 1978,ss. 2252-2256.

[36] BUTKOWSKI A.G.: Metody uprwlienija sistiemami z razpriedieliennymi paramietrami. Nauka, Moskwa 1975.

[37] BUTKOWSKI A.G.: Strukturnaja tieorija razpriedielionnych sistiem.Nauka, Moskwa 1977.

[38] CHANG G,S., TARN T.J., ELLIOT D.L.: Controllability of bilinear systems. Variable Systems with Application to Economic and Biology, Springer-Verlag, New York, 1975, ss. 83-99.

[39] CHEN C.T.: Output controllability of composite systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-12, no 2, 1967, ss. 201-202.

[40] CHEN C.T.: Introduction to linear system theory. Holt, Rinehart and Winston Incerporation, New York 1970.

[41] CHEN C.T., DESOER C.A., NIEDERLIŃSKI A.: Simplified conditions for controllability and observability of linear time-invariant systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-11, no 3, 1966, ss. 613-614.

[42] CHEN C.T., DESOER C.A.: Controllability and observability of composite systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-12,no 4, 1967, ss. 402-409.

[43] CHEN C.T., DESOER C.A.: A proof of controllability of Jordan form state equations. IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-13,no 2, 1968, ss. 195-196.

[44] CHEN G.: Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 17, no 1, 1979, ss. 66-81.

[45] CHEN G.: Energy decay estimations and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain. Journal de Mathse matique Pures et Appliquess, vol. 58, no 3, 1979, ss. 249-273.

[46] CHEWNING W.C.: Controllability of the nonlinear wave equation in several space variables. SIAN Journal on Control and Optimaization,vol. 14, no 1, 1976, ss. 19-25.

[47] CHOUDHURY A.K.: A contribution to the controllability of time-lag systems. International Journal of Control, vol. 17, no 2, 1973,ss.365-373.

[48] CHU H.: Some topological properties of complete controllability. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-11, no 2, 1966,ss.612-613.

[49] CHUKWU E.N.: Finite time controllability of nonlinear control processes. SIAM Journal on Control, vol. 13, no 4, 1975, ss. 807-816.

[50] CHUKWU E.N.: On the controllability to closed sets of nonlinear and related linear systems. Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, vol. 4, no 4, 1976.

[51] CHUKWU E.N.: The controllability of nonlinear neutral systems with limited controls. Report, Department of Mathematics, The Cleveland State University, 1978.

[52] CHUKWU E.N.: Euclidean controllability of nonlinear functional differential systems of neutral type. Report, Department of Mathematics, The Cleveland State University, 1978.

[53] CHUKWU E.N.: Euclidean controllability of linear delay systems with limited controls. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-24, no 5, 1979, ss. 798-800.

[54] CHUKWU E.N., GRONSKI J.M.: Approximate and complete controllability of nonlinear systems to a convex target set. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 61, no 1, 1977, ss. 97-112.

[55] CHUKWU E.N., SILLIMAN S.D.: Complete controllability to a closed target set. Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 21, no 3, 1977, ss. 369-383.

[56] CLAYTON P.R., KUO Y.L.: Controllability and observability of multivariable systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-16, no 2, 1971, ss. 207-209.

[57] CORTMAT J.P., MORSE A.S.: Structural controllable and structurally canonical systems. IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-21, no 1, 1976, ss. 130-131.

[58] DATKO R.: The stabilization of linear functional differential equations. Calculus of Variations and Control Theory, Academic Press,New York, 1976, ss. 353-369.

[59] DAUER J.P.: Perturbations of linear control systems. SIAM Journal on Control, vol. 9, no 3, 1971, ss. 393-400.

[60] DAUER J.P.: Controllability of nonlinear systems using a growth condition". Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 9, no 2, 1972, ss. 90-98.

[61] DAUER J.P.: A controllability technique for nonlinear systems. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 37, no 3, 1972, ss. 442-451.

[62] DAUER J.P.: A note on bounded perturbations of controllable systems. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 42, no 1, 1973, ss. 221-225.

[63] DAUER J.P.: On the controllability of systems of the form $\dot{x} = A\,t\,x + g\,t,u$. Journal Optimization Theory and Applications, vol. 11,no 2, 1973, ss. 132-138.

[64] DAUER J.P.: Controllability of nonlinear systems with restrained controls. Journal Optimization Theory and Applications, vol. 14, no 3, 1974, ss. 251-262.

[65] DAUER J.P.: Approximate controllability of nonlinear systems with restrained controls. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 46, no 1, 1974, ss. 126-131.

[66] DAUER J.P.: Nonlinear perturbations of quasi-linear control systems. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 54, no 3, 1976, ss. 717-725.

[67] DAUER J.P., GAHL R.D.: Controllability of nonlinear delay systems. Journal Optimization Theory and Applications, vol. 21, no 1,1977,ss. 59-70.

[68] DAVISON E.J.: Connectability and structural controllability of composite systems. Automatica, vol. 13, no 2, 1977, ss. 109-124.

[69] DAVISON E.J., KUNZE E.G.: Some sufficient conditions for the global and local controllability of nonlinear time-varying systems. SIAM J. Control, vol. 8, no 4, 1970, ss. 489-498.

[70] DAVISON E.J., WANG S.H.: New result on the controllability and observability of general composite systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-20, no 1, 1975, ss. 123-128.

[71] DELFOUR M.C.: The linear quadratic optimal control problem for hereditary differential systems: theory and numerical solution. Applied Mathematics and Optimization, vol. 3, no 2-3, 1977, ss. 101-162.

[72] DELFOUR M.C., MITTER S.K.: Controllability, observability and optimal feedback control of affine hereditary differential systems. SIAM J. Control, vol. 10, no 2, 1972, ss. 298-328.

[73] DELFOUR M.C., MITTER S.K.: Controllability and observability for infinite-dimensional systems. SIAM Journal on Control, vol. 10, no 2, 1972, ss. 329-333.

[74] DELFOUR M.C., MANITIUS A.: Control systems with delays: areas of applications and present status of the linear theory. New Trends in Systems Analysis, Springer-Verlad New York, vol. 2, 1974, ss.421-437.

[75] DELFOUR M.C., LEE E.B., MANITIUS A.: F-reduction of the operator Riccati equation for hereditary differential systems. Automatica,vol.14, no 4, 1978, ss. 385-395.

[76] DENHAM M.J., YAMASHITA K.: Deat-beat output zeroing by input and output feedback in multivariable delay-differential systems. International Journal of Control, vol. 30, no 5, 1979, ss. 803-812.

[77] DENHAM M.J., YAMASHITA K.: On the controllability of delay-differential systems. International Journal of Control, vol. 30, no 5, 1979, ss. 813-822.

[78] DESOER C.A., CHEN C.T.: Controllability and observability of feedback systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-12, no 4, 1967, ss. 474-475.

[79] DICKINSON B.W.: Matrical indices and controllability of linear differential systems. SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 25, no 4, 1973, ss. 613-617.

[80] DŁOTKO T., KLAMKA J., LIGEZA J.: Controllability and minimum energy control of linear systems. Podstawy sterowania, tom 6, zeszyt 2,1976, ss. 211-218.

[81] DOLECKI S.: A classification of controllability concepts for infinite-dimensional systems. Control and Cybernetics, vol. 5, no 1, 1976, ss. 33-44.

[82] DOLECKI S., RUSSELL D.L.: A general theory of observation and control. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 15, no 2, 1977, ss. 185-220.

[83] DUBOW M.A., MORDUCHOWICZ B.S.: K tieorii uprawliajemosti liniejnych stochasticzeskich sistiem. Differencjalnyje Urawnienija, tom XIV, no 12, 1978, ss. 2265-2268.

[84] EISING R.: Realization and stabilization of 2-D systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-23, no 5, 1978, ss. 793-799.

[85] EISING R.: Controllability and observability of 2-D systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-24, no 1, 1979,ss.132-133.

[86] ELLIOT D.L.: A consequence of controllability. Journal of Differential Equations, vol. 10, no 2, 1971, ss. 364-370.

[87] ELLIOT D.L., TARN T.L., GOKA T.: Controllability of discrete bilinear systems with bounded control. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-18, no 2, 1973, ss. 298-301.

[88] EVANS M.E., MURTHY D.N.: Controllability of a class of discrete-time bilinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-22, no 1, 1977, ss. 78-83.

[89] EVANS M.E., MURTHY D.N.: Controllability of discrete-time systems with positive controls. IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-22, no 6, 1977, ss. 942-945.

[90] EVANS M.E., Murthy D.N.: Controllability of discrete-time inhomogeneous bilinear systems. Automatica, vol. 14, no 2, 1978, ss.147-151.

[91] FATTORINI H.O.: Some remarks on complete controllability.SIAM Journal on Control, vol. 4,no 4, 1966, ss. 686-694.

[92] FATTORINI H.O.: Controllability of higher order linear systems.Functional Analysis and Optimization, Academic Press, New York,1966, ss. 301-311.

[93] FATTORINI H.O.: On complete controllability of linear systems.Journal of Differential Equations, vol. 3, no 3, 1967, ss. 391-402.

[94] FATTORINI H.O.: The time optimal control problem in Banach spaces. Applied Mathematics and Optimization, vol. 1, no 2, 1974,ss.163-188.

[95] FATTORINI H.O.: Boundary control of temperature distributions in a parallelepipedon. SIAM Journal on Control, vol. 13, no 1, 1975, ss. 1-13.

[96] FATTORINI H.O.: Local controllability of a nonlinear wave equation. Mathematical Systems Theory, vol. 9, no 1, 1975, ss. 30-45.

[97] FATTORINI H.O., RUSSELL D.L.: Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 43, no 4, 1971, ss. 272-292.

[98] FATTORINI H.O., RUSSELL D.L.: Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations. Quartely of Applied Mathematics, vol. 2, 1974, ss. 45-69.

[99] FEINTUCH A.: On single input controllability for infinite dimensional linear systems. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 62, no 3, 1978, ss. 538-546.

[100] FORD D.A., JOHNSON C.D.: Invariant subspaces and the controllability and observability of linear dynamical systems. SIAM Journal on Control, vol. 6, no 4, 1968, ss.553-558.

[101] FORNASINI E., MARCHESINI G.: State space realization theory of two-dimensional filters. IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-21, no 4, 1976, ss. 484-491.

[102] FROST M.G., STOREY C.: A note on the controllability of linear constant delay-differential systems. International Journal of Control, vol. 28, no 5, 1978, ss. 673-679.

[103] FROST M.G., STOREY C.: Further remarks on the controllability of linear constant delay differential systems. International Journal of Control, vol. 30, no 5, 1979, ss. 863-870.

[104] FURHMANN P.A.: On weak and strong reachability and controllability of infinite-dimensional linear systems. Journal Optimization Theory and Applications, vol. 9, no 2, 1972, ss. 77-89.

[105] FURHMANN P.A.: On observability and stability in infinite-dimensional linear systems. Journal Optimization Theory and Applications, vol. 12, no 2, 1973, ss. 173-181.

[106] FURHMANN P.A.: On realization of linear systems and applications to some questions of stability. Mathematical Systems Theory, vol. 8, no 2, 1974, ss. 132-141.

[107] FURHMANN P.A.: Some results on controllability. Ricerche di Automatica, vol. 5, no 2-3, 1974, ss. 1-5.

[108] FURHMANN P.A.: Realization theory in Hilbert space for a class of transfer functions. Journal of Fuctional Analysis, vol. 18, no 4, 1975, ss. 338-349.

[109] FURHMANN P.A.: On series and parallel coupling of a class of discrete time infinite dimensional systems. SIAM J. Control and Optimization, vol. 14, no 2, 1976, ss. 339-358.

[110] FURHMANN P.A.: Exact controllability and observability and realization theory in Hilbert space. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 53, no 2, 1976, ss. 377-392.

[111] FUJII N., SAKAWA Y.: Controllability for nonlinear differential equations in Banach space. Automatic Control Theory and Applications, vol. 2, no 2, 1974, ss. 44-46.

[112] GABASOW R., KIRIŁOWA F.M.: Kaczestwiennaja tieorija optimalnych prociessow, Nauka, Moskwa 1971.

[113] GABASOW R., KIRIŁOWA F.M., KRACHOTKO W.W.: Uprawliajemost mnogokonturnych sistiem z sosriedotoczennymi paramietrami. Avtomatika i Telemechanika, tom XXXII, no 11, 1971, ss. 18-26.

[114] GABASOW R., ZABIEŁŁO L.E., KIRIŁOWA F.M.: Uprawliajemost' liniejnych niestacjonarnych sistiem. Dokłady Akademii Nauk ZSRR, seria Matematyczno-Fizyczna, tom 225, no 4, 5,6, 1976, ss. 1035-1037.

[115] GAHL R.D.: Controllability of nonlinear systems of neutral type. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 63, no 1,1978, ss. 33-42.

[116] GERSHWIN S.B., JACOBSON D.H.: A controllability theory for nonlinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-16, no 1, 1971, ss. 37-46.

[117] GESSING R.: Sterowalność wyjścia obiektów liniowych. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XIX, zeszyt 1, 1974, ss. 3-15.

[118] GLOWER K., SILVERMAN L.M.: Charakterization of structural controllability. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-21, no 4, 1976, ss. 534-537.

[119] GRAHAM K.D., RUSSELL D.L.: Boundary value control of the wave equation in a sherical region. SIAM Journal on Control, vol. 13, no 1, 1975, ss. 174-196.

[120] GRANTHAM W.J., VINCENT T.L.: A controllability minimum principle. Journal Optimization Theory and Applications, vol. 17,no 1-2, 1975, ss. 93-114.

[121] GOKA T., TARN T.J., ZABORSZKY J.: On the controllability of a class of discrete bilinear systems. Automatica, vol. 9, no 4, 1979, ss. 615-622.

[122] GÓRECKI H.: Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem. WNT, Warszawa 1970.

[123] HARRIS S.E.: Stochastic controllability of linear discrete systems with multiplicative noise. International Journal of Control,vol.27, no 2, 1978, ss. 213-227.

[124] HAYNES G.W., HERMES H.: Nonlinear controllability via Lie theory. SIAM Journal on Control, vol. 8, no 4, 1970, ss. 450-460.

[125] HELTON J.W.: Systems with infinite-dimensional state space: the Hilbert space approach. Proceedings of the IEEE, vol. 64, no 1, 1976, ss. 145-160.

[126] HELTON J.W.: Discrete time systems, operator models and scattering theory. Journal of Functional Analysis, vol. 16, no 1, 1974, ss. 15-38.

[127] HERMANN R., KRENER A.J.: Nonlinear controllability and observability. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-22, no 5, 1977, ss. 728-740.

[128] HERMES H.: On the structure of attainable sets for generalized differential equations and control systems. Journal of Differential Equations, vol. 9, no 1, 1971, ss. 141-154.

[129] HERMES H.: On local and global controllability. SIAM Journal on Control and Optimaization, vol. 12, no 4, 1974, ss. 252-261.

[130] HERMES H.: On necessary and sufficient conditions for local controllability along a reference trajectory. Geometric Methods in Systems Theory, 1974, ss. 165-173.

[131] HERMES H.: Local controllability and sufficient conditions in singular problems. Journal of Differential Equations, vol. 20,no 1,1976, ss. 213-232.

[132] HERMES H.: Local controllability and sufficient conditions in singular problems, II. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 14, no 6, 1976, ss. 1049-1062.

[133] HEYMANN M.: Controllability subspaces and feedback simulation. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 14, no 4, 1976,ss.769-789.

[134] HEYMANN M., STERN R.J.: Controllability of linear systems with positive controls: geometric considerations. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 52, no 1, 1975, ss. 36-41.

[135] HIRIS V., TOPUZU P.: On complete controllability and the cyclic vectors. Analele Universitati din Timisoara, seria Stiinte Matematice, vol. XII, no 2, 1974, ss. 111-114.

[136] HIRIS V., MEGAN M.: Controllability, observability and invariant subspaces. Analele Universitati din Timisoara, seria Stiinte Matematice, vol. XV, no 2, 1977, ss. 103-112.

[137] HIRIS V., MEGAN M.: Controllability of linear systems and a boundary value problem. Aequationes Matematicae, vol. 16, no 1, 1977, ss. 81-91.

[138] HIRSCHORN R.M.: Controllability in nonlinear systems. Journal of Differential Equations, vol. 19, no 1, 1975, ss. 46-61.

[139] HIRSCHORN R.M.: Global controllability of nonlinear systems. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 14, no 4, 1976, ss. 700-711.

[140] IGNATIENKO W.W., KRACHOTKO W.W.: Uprawliajemost' liniejnoj sistiemy z posliedziejstwijem. Differencjalnyje Urawnienija, tom X,no 2,1974, ss. 241-245.

[141] JACOBS M.Q., LANGENHOP C.E.: Controllable two dimensional neutral systems. Banach Center Publications, Warszawa 1975, vol. 1, ss.107-113.

[142] JACOBS M.Q., LANGENHOP C.E.: Criteria for function space controllability of linear neutral systems. SIAM J. Control and Optimization, vol. 14, no 6, 1976, ss. 1009-1048.

[143] JANISZEWSKI K.: Sterowalność globalna układów nieliniowych.Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XVII, zeszyt 4, 1972, ss. 379-388.

[144] JANISZEWSKI K.: Warunek konieczny sterowalności nieliniowych układów dynamicznych ciągłych. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XX, zeszyt 3, 1975, ss. 321-330.

[145] JOHNSON C.D.: State ever deacription and uncontrollability of dynamical systems. Part II. Linear systems. International Journal of Control, vol. 19, no 6, 1974, ss. 1087-1100.

[146] JURDJEVIC V.: Abatract control systems: Controllability and observability. SIAM Journal on Control, vol. 8, no 3, 1970, ss. 424-439.

[147] JURDJEVIC V.: Certain controllability properties of analytic control systems. SIAM Journal on Control, vol. 10, no 2, 1972, ss, 354-360.

[148] JURDJEVIC V., QUINN J.P.: Controllability and stability.Journal of Differential Equations, vol. 28, no 3, 1978, ss. 381-389.

[149] KACZOREK T.: Controllability of the linear nonstationary systems with stochastic inputs. Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, serie des sciences techniques, vol. 19, no 1, 1971, ss. 44-50.

[150] KACZOREK T.: Sterowalność i obserwowalność liniowych układów stacjonarnych, przy wymuszeniach stochastycznych. Materiały V Krajowej Konferencji Automatyki, Gdańsk 1971, ss. 57-62.

[151] KACZOREK T.: Sterowalność liniowych układów stacjonarnych z opóźnieniem, przy wymuszeniach stochastycznych. Podstawy Sterowania,tom 1, zeszyt 3-4, 1971, ss. 161-167.

[152] KACZOREK T.: Teoria układów regulacji automatycznej. WNT, Warszawa 1974.

[153] KACZOREK T.: Teoria sterowania, tom 1, WNT, Warszawa 1977.

[154] KALITIN B.S.: Połnaja uprawliajemost' liniejnych sistiem z pieriemiennoj strukturoj. Differencjalnyje Urawnienija, tom XIII, no 3, 1977, ss. 556-558.

[155] KAŁUŻNAJA T.S.: Uprawliajemost' obszczich differencjalnych sistiem. Differencjalnyje Urawnienija, tom XIV, no 3, 1978, ss. 451-459.

[156] KALMAN R.E.: On the general theory of control systems.Proceedings I IFAC Congress, Moskwa 1960, ss. 481-493.

[157] KALMAN R.E.: Mathematical description of linear dynamical systems. SIAM Journal on Control, vol. 1, no 2, 1963, ss. 152-192.

[158] KALMAN R.E., FALB P., ARBIB M.: Topics in mathematical system theory. McGraw-Hill, New York 1969.

[159] KAMEN E.W.: On an algebraic theory of systems defined by convolution operators. Mathematical Systems Theory, vol. 9, no 1,1975, ss. 57-74.

[160] KAMEN E.W.: On an operator theory of linear systems with pure and distributed delays. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 1975, ss. 1-4.

[161] KAMEN E.W.: Module structure of infinite-dimensional systems wiht applications to controllability. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 14, no 3, 1976, ss. 389-408.

[162] KARCIANAS N.: On the basis matrix characterization of controllability. International Journal of Control, vol. 29, no 5, 1979, ss. 767-786.

[163] KERIMOW A.K.: Uprawliajemost' w ciełom liniejsnych pieriodiczeskich sistiem pri naliczi ograniczenij na uprawlienija. Differencjalnyje Urawnienija, tom XI, no 9, 1975, ss. 1575-1583.

[164] KERN G.: On the controllability properties of bilinear control systems with delay. International Journal of Control, vol. 28, no 4, 1978, ss. 557-569.

[165] KIRLICA W.P., SASONKIN A.M.: Uprawliajemost' liniejnych sistiem z razpriedielionnym zapazdywaniem po uprawlieniu. Differencjalnyje Urawnienija, tom X, no 6, 1974, ss. 1003-1008.

[166] KISIELEWICZ M.: Controllability of generalized dynamical systems to a closed target set. Materiały Międzynarodowej Konferencji nt. "Functional differential systems and related topics. Poznań 1979, ss. 34-35.

[167] KLAMKA J.: Uncontrollability and unobservability of multivariable systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-17, no 5, 1972, ss. 725-726.

[168] KLAMKA J.: Uncontrollability and unobservability of composite systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-18, no 5, 1973, ss. 539-540.

[169] KLAMKA J.: Uncontrollability of composite systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-19, no 3, 1974, ss. 280-281.

[170] KLAMKA J.: Ocena sterowalności i obserwowalności poprzez kanoniczną formę Jordana. Podstawy Sterowania, tom 4, zeszty 4, 1974, ss. 349-370.

[171] KLAMKA J.: On the global controllability of perturbed nonlinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-20, no 1, 1975, ss. 170-171.

[172] KLAMKA J.: On the local controllability of perturbed nonlinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-20, no 2, 1975, ss. 289-291.

[173] KLAMKA J.: Controllability of nonlinear systems with delay in control. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-20, no 5, 1975, ss. 702-704.

[174] KLAMKA J.: Ocena sterowalności układów złożonych poprzez kanoniczną formę Jordana. Podstawy Sterowania, tom 5, zeszyt 1, 1975, ss. 43-61.

[175] KLAMKA J.: Sterowalność układów z opóźnieniem. Podstawy Sterowania, tom 6, zeszyt 2, 1976, ss. 179-194.

[176] KLAMKA J.: Relative controllability and minimum energy control of linear systems with distributed delays in control. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-21, no 4, 1976, ss. 594-595.

[177] KLAMKA J.: Relative controllability of linear systems with varying delay. Systems Science, vol. 2, no 3, 1976, ss. 17-24.

[178] KLAMKA J.: Sterowalność i sterowanie z minimalną energią układami z rozłożonym opóźnieniem w sterowaniu. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XXI, zeszyt 4, 1976, ss. 437-446.

[179] KLAMKA J.: Relative controllability of nonlinear systems with delays in control. Automatica, vol. 12, no 6, 1976, ss. 633-634.

[180] KLAMKA J.: Controllability of linear systems with time-variable delays in control. International Journal of Control, vol. 24, no 6, 1976, ss. 869-878.

[181] KLAMKA J.: On the controllability of linear systems with delays in the control. International Journal of Control, vol. 25, no 6, 1977, ss. 875-883.

[182] KLAMKA J.: Absolute controllability of linear systems with time-variable delays in control. International Journal of Control, vol. 26, no 1,1977, ss. 57-63.

[183] KLAMKA J.: Relative and absolute controllability of discrete systems with delays in control. International Journal of Control, vol. 26, no 1, 1977, ss. 65-74.

[184] KLAMKA J.: Minimum energy control of discrete systems with delays in control. International Journal of Control, vol. 26, no 5, 1977, ss. 737-744.

[185] KLAMKA J.: Relative controllability of nonlinear systems with distributed delays in control. International Journal of Control,vol.28, no 2, 1978, ss. 307-312.

[186] KLAMKA J.: Relative controllability of infinite-dimensional systems with delays in control. Systems Science, vol. 4, no 1, 1978, ss.43-52.

[187] KLAMKA J.: Controllability of nonlinear systems with delays in control. Materiały Konferencji "Functional-differential systems and related topics", 1979, ss. 36-37.

[188] KLAMKA J.: Controllability of linear infinite-dimensional discrete systems with delays in control. Analele Universitati din Timisoara, seria Stiinte Matematice, vol. XVI, zeszyt 1, 1978, ss. 49-61.

[189] KLAMKA J., SOCHA L.: Some remarks about stochastic controllability. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-22, no 5, 1977, ss. 880-881.

[190] KLAMKA J.: Controllability for distributed parameter systems with delays in control. Systems Science, vol. 6, no 3, 1980.

[191] KLAMKA J., SOCHA L.: Some remarks about stochastic controllability for delayed linear systems. International Journal of Control,vol. 32, no 3, 1980, ss. 561-566.

[192] KLAMKA J.: Sterowalność biliniowych procesów dyskretnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria "Automatyka", 54, 1980, ss.99-107.

[193] KLAMKA J.: Controllability of infinite-dimensional systems with delays in control". Prace Matematyczne, Uniwersytet Śląski, tom XIII, 1981.

[194] KLAMKA J.: Warunki sterowalności dla układów z opóźnieniami w sterowaniu. Materiały VIII Krajowej Konferencji Automatyki. Szczecin 1980, ss. 23-28.

[195] KOROBOW W.I.: Geometriczeskij kriterij lokalnoj uprawliajemosti dinamiczeskich sistiem pri naliczii ograniczenij na uprawlienije.Differencjalnyje Urawnienija, tom XV, no 9, 1979, ss. 1592-1599.

[196] KOROBOW W.I., RABACH R.: Tocznaja uprawliajemost w Banachowom prostranstwie. Differencjalnyje Urawnienija, tom XV, no 12, 1979, ss. 2142-2150.

[197] KORYTOWSKI A.: Sterowalność funkcyjna systemu z opóźnieniem. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XX, zeszyt 1, 1975, ss. 19-28.

[198] KRACHOTKO W.W., MIETIELSKI A.W.: K uprawliajemosti sistiem z razpriedieliennymi zapazdywaniami. Differencjalnyje Urawnienija,tom X, no 3, 1974, ss. 419-423.

[199] KREINDLER A., SARACHIK P.E.: On the concepts of controllability and observability of linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-9, no 2, 1964, ss. 129-136.

[200] KUPERMAN L.M.: K tieorii δ-uprawliajemosti liniejnych sistiem z zapazdywaniem. Differencjalnyje Urawnienija, tom XIV, no 10,1978, ss. 1791-1795.

[201] KURCYUSZ S., OLBROT A.: On the closure in W_2^1 of the attainable subspace of linear time lag systems. Journal of Differential Equations, vol. 24, no 1, 1977, ss. 29-50.

[202] KWON W.H., PEARSON A.E.: A note on feedback stabilization of a differential-difference systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-22, no 3, 1977, ss. 468-470.

[203] LAGNESE J.: Boundary value control of a class of hyperbolic equations in a general region. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 15, no 6, 1977, ss. 973-983.

[204] LAGNESE J.: Exact boundary value controllability of a class of hyperbolic equations. SIAM Journal on Control and Optimization,vol.16, no 6, 1978, ss. 1000-1017.

[205] LAGNESE J.: On the support of solutions of the wave equation with applications to exact boundary value controllability.Journal de Mahematiques Pures et Appliques, vol. 58, no 1, 1979, ss. 121-135.

[206] LANDO J.K.: Princip sopriażennogo sootwietstwia i rangowyje priznaki uprawliajemosti. Differencjalnyje Urawnienija, tom XV,no 11,1979, ss. 2095-2097.

[207] LEE E., MARKUS L.: Foundations of optimal control theory. Academic Press, New York 1968.

[208] LEVITT N., SUSSMANN H.J.: On the controllability by means of two vector fields. SIAM Journal on Control, vol. 13, no 6, 1975,ss.1271-1281.

[209] LEVSEN L.D., NAZAROFF G.J.: A note on the controllability of linear time variable delay systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-18, no 2, 1973, ss. 188-189.

[210] LIN C.T.: Structural controllability. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-19, no 3, 1974, ss. 201-208.

[211] LIN C.T.: System structure and minimal structure controllability. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-22, no 5, 1977, ss. 855-862.

[212] LOBRY C.: Controllability of nonlinear systems on compact manifolds. SIAM Journal on Control, vol. 12, no 1, 1974, ss. 1-4.

[213] LÜCKEL J., MÜLLER P.C.: Analyse von Steuerbarkeits-, Beobachtbarkets-, und Störbarkeitsstrukturen linearer zeitinvarianter systeme. Regelungstechnik, no 5, 1975, ss. 163-171.

[214] LÜCKEL J., MÜLLER P.C.: Minimale Störbarkeitsmage als Entwurfskriterien für Mehrgrösenregelsysteme. Deutsche Luft- und Raumfahrt,Forschungsbericht 75-32, 1975, ss. 192-207.

[215] LUKES D.L.: Global controllability of nonlinear systems. SIAM Journal on Control, vol. 10, no 1, 1972, ss. 112-126.

[216] LUKES D.L.: Global controllability of distributed nonlinear equation. SIAM Journal on Control, vol. 12, no 4, 1974, ss. 695-704.

[217] LUKES D,L.: A class of globally controllable nonlinear differential equations. Proceedings Joint Automatic Control Conference,University of Texas, 1974, ss. 50-56.

[218] MacCAMY R.C., MIZEL V.J., SEIDMAN T.L.: Approximate boundary controllability for the heat equation, I. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 23, no 3, 1968, ss. 699-703.

[219] MacCAMY R.C., MIZEL V.J., SEIDMAN T.I.: Approximate boundary controllability of the heat equation, II. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 28, no 3, 1969, ss. 482-492.

[220] MANITIUS A.: Optymalne sterowanie procesami z opóźnieniami - przegląd problemów i pewne nowe rezultaty. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XV, zeszyt 2, 1970, ss. 205-221.

[221] MANITIUS A., On the controllability conditions for systems with distributed delays in state and control. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XVIII, zeszyt 2, 1972, ss. 119-131.

[222] MANITIUS A.: Optimal control of hereditary systems. Control Theory and Topics in Functional Analysis, vol. III, Wiedeń 1976,ss.43-172.

[223] MANITIUS A.: Controllability, observability and stabilizability of retarded systems. Proceedings of Conference on Decision and Control, 1976, ss. 752-758.

[224] MANITIUS A.: Function space controllability of retarded systems: some new algebraic conditions. Report no 656, Centre de Recherches Mathematiques, University Montreal.

[225] MANITIUS A., OLBROT A.W.: Controllability conditions for systems with delayed state and control. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XVII, zeszyt 2, 1972, ss. 119-131.

[226] MANITIUS A., TRIGGIANI R.: Function space controllability of retarded systems: a derivation from abstract operator conditions. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 16, no 4, 1978,ss.599-645.

[227] MANITIUS A., TRIGGIANI R.: Sufficient conditions for function space controllability and feedback stabilizability of linear retarded systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-23,no 4,1978, ss. 659-665.

[228] MANITIUS A., OLBROT A.W.: Finite spectrum assignment problem for systems with delays. Report no 737, Centre de Recherches Mathematiques, University de Montreal.

[229] MARTIN J.C.: On the controllability of parabolic systems by scanning controls. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-21, no 4, 1976, ss. 616-618.

[230] MARTIN J.C.: Controllability and observability of parabolic systems and addendum to two recent papers of Y. Sakawa. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 15, no 3, 1977, ss. 363-366.

[231] McGLOTHIN G.E.: A modal control model for distributed systems with application to boundary controllability. International Journal of Control, vol. 20, no 3, 1974, ss. 417-432.

[232] McGLOTHIN G.E.: Controllability, observability and duality in a distributed parameter system with continuous and point spectrum. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-23, no 4, 1978, ss. 687-690.

[233] MEGAN M.: Similarity, controllability and spectral mappings.Analele Universitati din Timisoara, seria Stiinte Matematice, vol.XII,no 1, 1974, ss. 71-78.

[234] MEGAN M.: On the stabilizability and controllability of linear dissipative systems in Hilbert spaces. Seminarul de ecuatii functionale, Universitati din Timisoara, no 32, 1975.

[235] MEGAN M.: On exponential stability of linear control systems in Hilbert spaces. Analel Univesitati din Timisoara, seria Stiinte Matematice, vol. XIV, no 2, 1976, ss. 125-130.

[236] MEGAN M.: On controllability, stability and the Lapunov differential equation for linear control systems. Glasnik Matematicki, vol. 13, no 33, 1978, ss. 183-198.

[237] MEGAN M.: On the input-output stability of linear controllable systems. Canadian Mathematical Bulletin, vol. 21, no 2, 1978, ss.187-195.

[238] MEGAN M., HIRIS V.: On the space of linear controllable systems in Hilbert spaces. Glasnik Matematicki, vol. 10, no 30, 1975, ss. 161-167.

[239] MEGAN M., TOPUZU P.: On the density property of controllable systems Seminarul de ecuatii functionale, Universitati din Timisoara,no 43, 1977.

[240] MESAROVIC M.: Controllability of general systems. Mathematical Systems Theory, vol. 5, no 4, 1971, ss. 353-364.

[241] MINIUK S.A., STIEPANIUK N.N.: K tieorii polnoj uprawliajemosti liniejnych sistiem z zapazdywaniem. Differencjalnyje Urawnienija,tom X, no 4, 1974, ss. 629-634.

[242] MIRZA K., WOMACK B.E.: On the controllability of a class of nonlinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-17, no 4, 1972, ss. 531-535.

[243] MIRZA K., WOMACK B.E.: On the controllability of nonlinear time delay systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-17, no 6, 1972, ss. 812-814.

[244] MITTER S.K., FOULKES R.: Controllability and pole assignment for discrete time linear systems defined over arbitrary fields.SIAM Journal on Control, vol. 9, no 1, 1971, ss. 1-7.

[245] MOHLER R.R.: Bilinear control processes. Academic Press, New York, 1973, ss. 21-51.

[246] MOLINARI B.P.: Extended controllability and observability for linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control. vol. AC-21,no 1, 1976, ss. 136-137.

[247] MOLINARI B.P.: A strong controllability and observability in linear multivariable control. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-21, no 5, 1976, ss. 761-764.

[248] MOORE B.C., LAUB A.J.: Computation of supremal (A,B)-invariant and controllability subspaces. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-23, no 5, 1978, ss. 783-792.

[249] MORSE A.S.: Structural invariants of linear multivariable systems. SIAM Journal on Control, vol. 11, no 3, 1973, ss. 446-465.

[250] MORSE A.S.: Output controllability and system synthesis. SIAM Journal on Control, vol. 9, no 2, 1971, ss. 143-148.

[251] MÜLLER P.C., WEBER H.I.: Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical sy stems. Automatica, vol. 8, no 3, 1972, ss. 237-246.

[252] MÜLLER P.C., LÜCKEL J.: Modale Mase für Steuerbarkeit, Beobachtbarkeits und Störbarkeit dynamischer systeme. Zeitschrift für Angewandte Mathematics und Mechanics, vol. 54, 1974, ss. 57-58.

[253] MULLIS C.T.: On the controllability of discrete linear systems with output feedback. IEEE Transaction on Automatic Control, vol. AC-18, no 6, 1973, ss. 608-615.

[254] MUSTAFAJEW M.I.: K zadacze uprawliajemosti dla odnogo klasa liniejnych sistiem z razpriedielionnymi paramietrami. Wopresy matiematiczeskoj kibiernetiki i prikładnoj matiematiki, no 2, 1976, ss.139-148.

[255] NAMBU T.: Feedback stabilization for distributed parameter system of parabolic type. Journal of Differential Equations, vol. 33, no 2, 1979, ss. 167-188.

[256] NAMBU T.: Remarks on approximate boundary controllability for distributed parameter systems of parabolic type: supremum norm problem Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 69, no 1, 1979 ss. 194-204.

[257] NIEFIEDOW S.A., SZOŁOCHOWICZ F.A.: Kriterij ε-uprawliajemosti liniejnoj sistiemy. Differencjalnyje Urawnienija, tom XII, no 4, 1976, ss. 653-657.

[258] NIEDERLIŃSKI A.: Układy wielowymiarowe automatyki.WNT,Warszawa 1974.

[259] O'BRIEN R.E.: Contraction semigroups, stabilization and the mean ergodic theorem. Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 71, no 1, 1978, ss. 89-94.

[260] O'BRIEN R.E.: Perturbation of controllable systems. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 17, no 2, 1979, ss. 175-179.

[261] OLBROT A.W.: On controllability of linear systems with time delays in control. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-17,no 5, 1972, ss. 664-666.

[262] OLBROT A.W.: Warunki istnienia sterowania stabilizującego dla liniowych procesów z opóźnieniami sterowania. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XVII, zeszyt 2, 1972, ss. 133-147.

[263] OLBROT A.W.: Algebraic criteria of controllability to zero function for linear constant time-lag systems. Control and Cybernetics, vol. 2, no 1-2, 1973, ss. 59-77.

[264] OLBROT A.W.: Control of retarded systems with function space constraints. Part II. Approximate controllability. Control and Cybernetics, vol. 6, no 2, 1977, ss. 17-71.

[265] OLBROT A.W.: Stabilizability, detectability and spectrum assignment for linear autonomous systems with general time delays. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-23, no 5, 1978, ss.887-890.

[266] PANDA S.: Controllability of discrete composite systems. Automatica, vol. 6, no 3, 1970, ss. 309-313.

[267] PANDA S., CHEN C.T., Desoer C.A.: Comments on controllability and observability of composite systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-15, no 2, 1970, ss.280-281.

[268] PANDOLFI L.: On feedback stabilization of functional differential equations. Bolletino della Unione Matematic Italiana, vol. 12, no 4, 1975, ss. 1-10.

[269] PANDOLFI L.: Linear control systems: controllability with constrained controls. Journal Optimization Theory and Applications, vol.19, no 4, 1976, ss. 577-585.

[270] PANDOLFI L.: Stabilization of neitral functional differential equations. Journal Optimization Theory and Applications, vol. 20, no 2, 1976, ss. 191-204.

[271] PANDOLFI L.: Stabilization of control processes in Hilbert spaces. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, vol. 81 A, 1978, ss. 247-258.

[272] PANDOLFI L.: Stabilizations and controllability for a class of control systems. Atti Academia Nazionale dei Lincei, vol. LXIV, no 2, 1978, ss. 130-136.

[273] PEARSON A.E., KWON W.H.: A minimum energy feedback regulator for linear systems subject to an average power constraint. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-21, no 5, 1976, ss. 757-761.

[274] PECSVARADI T., NARENDRA K.S.: Reachable sets for linear dynamical systems. Information and Control, vol. 19, no 4, 1971, ss. 319-345.

[275] PIETROW N.N.: O simetriczeskich wpołnie uprawliajemych sistiemach uprawlienija. Differencjalnyje Urawnienija, tom XV, no 11, 1979, ss. 1980-1986.

[276] POPV V.M.: Invariant description of linear time-invariant controllable systems. SIAM Journal on Control, vol. 10, no 2, 1972,ss.252-264.

[277] PORTER B., BRADSHAW A.: Mode-controllability characteristic of multivariable time invariant linear systems with input derivative. International Journal of Control, vol. 16, no 1, 1972, ss. 105-107.

[278] PRABHU S.S., MacCAUSLAND I.: Methods of moments and controllability of certain distributed parameter systems. International Journal of Control, vol. 23, no 1, 1976, ss. 89-95.

[279] PRZYŁUSKI K.M.: Stabilizability of the system $\dot{x} = Fx(t) + Gu(t-h)$ by a discrete feedback control. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-22, no 2, 1977, ss. 269-270.

[280] RADYNO J.W.: K woprosu uprawliajemosti liniejnych sistiem w lokalno wypukłych prostranstwach. Differencjalnyje Urawnienija, tom XII, no 12, 1977, ss. 2199-2206.

[281] REBHUHN D.R.: On the set of attainability of nonlinear nonautonomous control systems. SIAM Journal on Control, vol. 15, no 5, 1977, ss. 803-812.

[282] REGHIS M.: On Kalman's canonical decomposition of linear control systems. Analele Universitati din Timisoara, seria Stiinte Matematice, vol. XIV, no 1, 1976, ss. 65-84.

[283] REGHIS M., MEGAN M.: Riccati equation, exact controllability and stabilizability. Seminarul de ecuatii functionale, Universitatia din Timisoara, no 42, 1977.

[284] REGHIS M., MEGAN M.: On controllability and stabilizability in Hilbert spaces. Analele Universitati din Timisoara, seria Stiinte Matematice, vol. XV, no 1, 1977, ss. 37-54.

[285] RINK R.E., MOHLER R.R.: Completely controllable bilinear systems. SIAM Journal on Control, vol. 6, no 3, 1968, ss. 477-486.

[286] RODAS H.R., LANGENHOP C.E.: A sufficient condition for fuction space controllability of a linear neutral systems. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 16, no 3, 1978, ss. 429-435.

[287] ROESSER R.P.: A discrete state-space model for linear imago processing. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-20,no 1,1975, ss. 1-10.

[288] ROLEWICZ S.: Analiza funkcjonalna i teoria sterowania. PWN,Warszawa 1974.

[289] RUSSELL D.L.: Boundary value control of the higher-dimensional wave equation. SIAM Journal on Control, vol. 9, no 1, 1971, ss. 29-42.

[290] RUSSELL D.L.: A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic differential equations. Studia in Applied Mathematics, vol. LII, no 3, 1973, ss. 189-211.

[291] SAKAWA Y.: Controllability for partial differential equations of parabolic type. SIAM Journal on Control, vol. 12, no 3, 1974, ss.389-400.

[292] SANNUTI P.: On the controllability of some singularly perturbed nonlinear systems. Journal Mathematical Analysis and Applications,vol. 64, no 3, 1978, ss. 579-591.

[293] SANNUTI P.: On the controllability of singularly perturbed systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-22, no 4, 1977, ss. 622-624.

[294] SAPERSTONE S.H.: Global controllability of linear systems with positive controls. SIAM Journal on Control, vol. 11, no 3, 1973, ss. 417-423.

[295] SAPERSTONE S.H., YORKE J.A.: Controllability of linear oscillatory systems using positive controls. SIAM Journal on Control,vol.9,no 2, 1971, ss. 253-262.

[296] SCHWARZKOPF A.B.: Controllability and tenability of nonsingular systems with state equality constraints. SIAM Journal on Control,vol. 13, 1975, ss. 695-705.

[297] SEBAKHY O., BAYOUMI N.M.: A simplified critierion for the controllability of linear systems with delay in control. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-16, no 4, 1971, ss. 364-365.

[298] SEBAKHY O., BAYOUMI N.M.: Controllability of linear time-varying systems with dolay in control. International Journal of Control, vol. 17, no 1, 1973, ss. 127-135.

[299] SEIDMAN T.I.: Observation and predyction for the heat equation. IV. Patch observability and controllability. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 15, no 3, 1977, ss. 412-427.

[300] SEIDMAN T.I.: Exact boundary control for some evolution equations. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 16, no 6, 1978, ss. 979-999.

[301] SEIDMAN T.I.: Time invariance of the reachable set for linear control problems. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 72, no 1, 1979, ss. 17-20.

[302] SHIELDS R.W., PEARSON J.B.: Structural controllability of multiinput linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-21, no 2, 1976, ss. 203-212.

[303] SIEMIENOW W.N.: Ob uprawliajemosti nieliniejnych dinamiczeskich sistiem. Kibiernetika i wyczislennaja mechanika, no 8, 1971, ss.34-40.

[304] SILVERMAN L.M.: Asymptotic controllability. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-14, no 1, 1969, ss. 78-80.

[305] SLEMROD M.: A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in Hilbert space. SIAM Journal on Control, vol. 12, no 3, 1974, ss. 500-508.

[306] SOCHA L., KLAMKA J.: Sterowalność stochastyczna układów dynamicznych. Podstawy Sterowania, tom 8, zeszyt 2, 1978, ss. 191-200.

[307] SONTAG E.D.: Linear systems over commutative rings: a survey. Ricerche di Automatica, vol. 7, no 1, 1976, ss. 1-34.

[308] SONTAG E.D.: On linear systems and noncommutative rings. Mathematical Systems Theory, vol. 9, no 4, 1976, ss. 327-344.

[309] SONTAG E.D.: On finitely accessible and finitely observable rings. Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 8, no 1, 1976, ss.97-104.

[310] SORENSON H.W.: Controllability and observability of linear, stochastic, time-discrete control systems. Advances in Control Systems, vol. 6, 1968, ss. 95-158.

[311] STIEPANIUK N.N.: Niekotoryje zadaczi uprawliajemosti i nabludajemosti dwuparamietriczeskich diskretnych sistiem. Differencjalnyje Urawnienija, tom XIV, no 12, 1978, ss. 2190-2195.

[312] SUNAHARA Y., AIKARA S., KISHINO K.: On the stochastic observability and controllability for nonlinear systems. International Journal of Control, vol. 22, no 1, 1975, ss. 65-82.

[313] SUSSMANN H.J.: On the number of directions needed to achieve controllability. SIAM Journal on Control, vol. 13, no 2, 1975, ss.414-419.

[314] SUSSMANN H.J.: Some properties of vector fields systems that are not altered by small perturbations. Journal of Differential Equations, vol. 20, no 2, 1976, ss. 292-315.

[315] SUSSMANN H.J.: A sufficient conditions for local controllability. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 16, no 5, 1978, ss. 790-802.

[316] SUSSMANN H.J.: JURDJEVIC V.: Controllability of nonlinear systems. Journal of Differential Equations, vol. 12, no 1, 1972, ss.95-116.

[317] SZKLAR B.S.: K problemie otnositielnoj uprawliajemosti sistiem z otkluczajuszczimsja argumentem neutralnogo tipa. Differencjalnyje Urawnienija, tom X, no 8, 1974, ss. 1443-1450.

[318] TARN T.J., ELLIOT D.L., GOKA T.: Controllability of discrete bilinear systems with bounded control. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-18, no 2, 1973. ss. 298-301.

[319] THOWSEN A.: Function space null controllability by augmented delay feedback control. IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-21, no 2, 1976, ss. 298-299.

[320] TOKARZEWSKI J.: Sterowalność nieliniowych stacjonarnych układów dynamicznych - warunki dostateczne. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XXI, zeszyt 2, 1976, ss. 179-191.

[321] TOKARZEWSKI J.: Sterowalność w dowolnym czasie pewnej klasy nieliniowych stacjonarnych układów dynamicznych. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XXI, zeszyt 3, 1976, ss. 277-282.

[322] TOKARZEWSKI J.: Local controllability properties of nonlinear dynamical systems. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XXII,zeszyt 3, 1977, ss. 175-199.

[323] TOKARZEWSKI J.: Controllability of a class of locally symmetrical dynamical nonlinear systems. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XXIV, zeszyt 1, 1979, ss. 29-41.

[324] TONKOW E.L.: Zamieczanie ob uprawliajemosti liniejnoj periodiczeskoj sistiemy. Differencjalnyje Urawnienija, tom XIV, no 9, 1978, ss. 1715-1717.

[325] TONKOW E.L.: Kriterij rawnomiernoj uprawliajemosti i stabilizacija liniejnoj rekurentnoj sistiemy. Differencjalnyje Urawnienija, tom XV, no 9, 1979, ss. 1592-1599.

[326] TRIGGIANI R.: Controllability and observability in Banach space with bounded operators. SIAM Journal on Control, vol. 13, no 2,1975, ss. 462-491.

[327] TRIGGIANI R.: Pathological asymptotic behavior of control systems in Banach space. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 43, no 2, 1975, ss. 411-429.

[328] TRIGGIANI R.: On the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 50, no 2, 1975, ss. 438-446.

[329] TRIGGIANI R.: On the stabilizability problem in Banach space. Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 52, no 3,1975, ss. 383-403.

[330] TRIGGIANI R.: Extensions of rank conditions for controllability and observability to Banach spaces and unbounded operators.SIAM Journal on Control, vol. 14, no 2, 1976, ss. 313-338.

[331] TRIGGIANI R.: A note on the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 15, no 3, 1977, ss. 407-441.

[332] TRIGGIANI R.: On the relationship between first and second order controllable systems in Banach spaces. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 16, no 6, 1978, ss. 847-859.

[333] TRIGGIANI R.: On Nambu's boundary controllability problem for diffusion processes. Journal of Differential Equations, vol. 33, no 2, 1979, ss. 189-200.

[334] TROCH I.: A note on complete controllability. SIAM Journal on Control, vol. 9, no 4, 1971, ss. 543-546.

[335] UNDERWOOD R.G., YOUNG D.F.: Null controllability of nonlinear functional differential equations. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 17, no 6, 1979, ss. 753-772.

[336] WANG P.K.C.: Control of distributed parameter systems. Advancei in Control Systems, vol. 1, 1964, ss. 75-172.

[337] WARGA J.: Optimal control of differential and functional equations. Academic Press, New York 1972.

[338] WARGA J.: Controllability and necessary conditions in unilateral problems without differentiability assumptions. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 14, no 3, 1976, ss. 546-573.

[339] WARGA J.: Controllability and a multiplier rule for nondifferentiable optimization problems. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 16, no 5, 1978, ss. 803-812.

[340] WARGA J.: Controllability of nondifferentiable hereditary processes. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 16, no 5, 1978, ss. 813-831.

[341] WARREN M.E., ECKBERG A.E.: On the dimensions of controllability subspaces: a characterization via polynomial matrices and Kronecker invariants. SIAM Journal on Control, vol. 13, no 2, 1975, ss.434-445.

[342] WEI K.C., PEARSON A.E.: Global controllability for a class of bilinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-23, no 3, 1978, ss. 486-488.

[343] WEI K.C., PEARSON A.E.: On minimum energy control of commutative bilinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-23, no 6, 1978, ss. 1020-1023.

[344] WEI K.C., PEARSON A.E.: Control law for an intercept systems. Journal of Guidance and Control, vol. 1, no 5, 1978, ss. 298-304.

[345] WEISS L.: Controllability, realization and stability of discrete-time systems. SIAM Journal on Control, vol. 10, no 2, 1972, ss. 230-251.

[346] WEISS H.: Use of semigroup for derivation of controllability and observability conditions in time-invariant linear systems.International Journal of Control, vol. 18, no 3, 1973, ss. 475-479.

[347] WILLIAMS N.S., ZAKIAN V.: Algebraic treatment of delay-differential systems. Report no 183, Control Systems Centre, University of Manchester, 1972.

[348] WILLIAMS N.S., ZAKIAN V.: A ring of delay operators with applications to delay differential systems. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 15, no 2, 1977, ss. 247-255.

[349] WOLOVICH W.A.: On the stabilization of controllable systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-13, no 5, 1968, ss. 569-572.

[350] WOLOVICH W.A., HWANG H.L.: Composite system controllability and observability. Automatica, vol. 10, no 2, 1974, ss. 209-212.

[351] YONEMURA Y., YTO M.: Controllability of composite systems of tandem connection. IEEE transactions on Automatic Control, vol. AC-17, no 5, 1972, ss. 722-724.

[352] YORKE J.A.: The maximum principle and controllability of nonlinear equations. SIAM Journal on Control, vol. 10, no 2, 1972, ss.334-338.

[353] ZABIEŁO L.E.: Ob uprawliajemosti liniejnych niestacjonarnych sistiem. Awtomatika i Tielemechanika, tom XXXIV, no 8, 1973, ss. 13-19.

[354] ZABIEŁO L.E., KOPIEJKINA T.B.: Uprawliajemost po naczalnoj funkcji sistiem z zapazdywaniem. Differencjalnyje Urawnienija, tom XII, no 12, 1976, ss. 2267-2284.

[355] ZADEH L.A., DESOER C.A.: Linear system theory, The state space appreach. McGraw-Hill, New York 1963.

[356] ZMOOD R.B.: The euclidean space controllability of control systems with delay. SIAM Journal on Control, vol. 12, no 4, 1974,ss.609-623.

[357] ZUNDE P.: Interaction in linear dynamical systems. Information and Control, vol. 18, no 5, 1971, ss. 447-466.

[358] KLAMKA J.: Sterowalność układów dynamicznych - przegląd problemów. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XXVI, zeszyt 1, 1981.

[359] KLAMKA J.: Warunki sterowalności dla układów parabolicznych z opóźnieniem w sterowaniu. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej,s.Automatyka, z. 50, 1980, ss. 113-120.

[360] DACKA C.: On the controllability of a class of nonlinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-25, no 2, 1980, ss. 263-266.

[361] KLAMKA J.: Controllability of nonlinear systems with distributed delays in control, International Journal of Control, vol. 31, no 5, 1980, ss. 811-819.

STEROWALNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z OPÓŹNIENIAMI

S t r e s z c z e n i e

W pracy sformułowano warunki różnych rodzajów sterowalności dla szerokiej klasy układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu. Rozpatrzono zarówno ciągłe, jak i dyskretne układy dynamiczne, a także skupione oraz rozłożone opóźnienia w sterowaniu. Podano warunki wystarczające sterowalności globalnej oraz lokalnej dla pewnej klasy układów nieliniowych, zarówno z opóźnieniami w sterowaniu, jak i bez opóźnień w sterowaniu. Rozwiązano w sposób analityczny problem sterowania z minimalną energią układami liniowymi z opóźnieniami w sterowaniu.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИАМИ

Р е з ю м е

В статье сформулированы условия разных видов управляемости для широкого класса динамических систем с запаздываниями в управлении. Рассмотрены как непрерывные, так и дискретные динамические системы, а также сосредоточенные и распределенные запаздывания в управлении. Представлены достаточные условия совокупной и местной управляемости для некоторого класса динамических систем равно с запаздываниями и без таковых в управлении. Решена аналитическим способом проблема управляемости с минимальной энергией линейными системами с запаздывании в управлении.

CONTROLLABILITY DYNAMICAL SYSTEMS WITH DELAYS

S u m m a r y

In the paper, conditions for various kinds of controllability for broad class of dynamical systems are formulated. Continuous and discrete dynamical systems, as well as lumped and distributed delays in the control are examined. Sufficient conditions for global and local controllability of certain class of nonlinear systems with delays in the control and without delays in the control are given. Analytical solution of minimum energy problem for linear systems with delays in control is considered.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
3341/81/58

WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:

44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 069, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 220, ul. Wolności 288
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN — Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.