ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

TADEUSZ SZKODNY

MODELE MATEMATYCZNE RUCHU MANIPULATORÓW ROBOTÓW PRZEMYSŁOWYCH NA POTRZEBY STEROWANIA

AUTOMATYKA

Z. 112
GLIWICE
1993

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1203

TADEUSZ SZKODNY

MODELE MATEMATYCZNE RUCHU MANIPULATORÓW ROBOTÓW PRZEMYSŁOWYCH NA POTRZEBY STEROWANIA

GLIWICE 1993

Mojej Żonie

SPIS TREŚCI STR.

CONTENTS

СОДЕРЖАНИЕ

1. WSTĘP

1.1. WPROWADZENIE

W robotach przemysłowych możemy wyodrębnić dwa zasadnicze zespoły-zespół sterowniczy i zespół manipulacyjny. Zespół manipulacyjny stanowią : człony połączone parami kinematycznymi, siłowniki napędu członów, zespoły elementów przekazujących te napędy, układy czujników oraz element wykonawczy (np. chwytak) wraz z oprzyrządowaniem koniecznym do obsługi procesów technologicznych. Zespoły manipulacyjne powszechnie nazywa się manipulatorami.

Do uproszczenia opisu będziemy stosować dalej skrót MRP-manipulator robota przemysłowego.

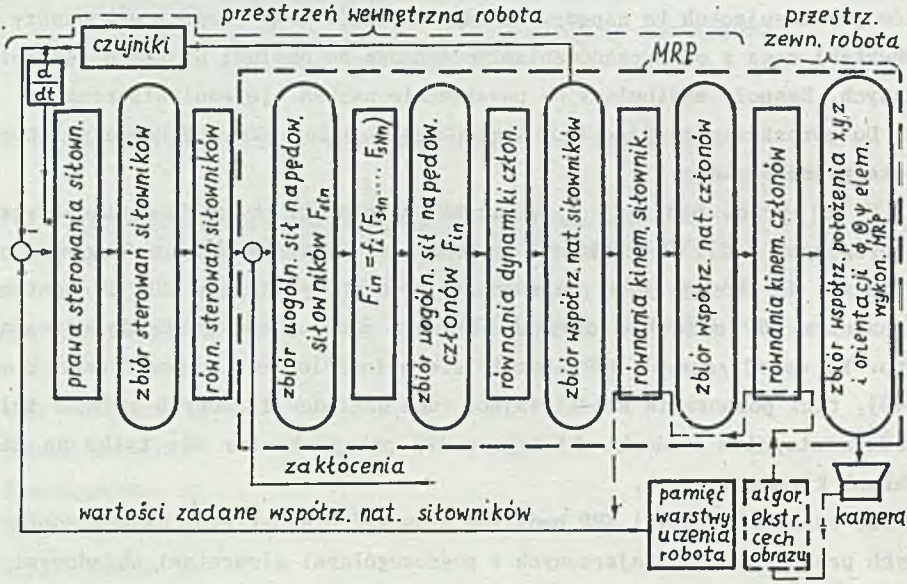
W tej pracy będziemy rozważać MRP w postaci łańcuchów kinematycznych szeregowych [40]. Początkowym członem jest podstawa MRP, a końcowym człon roboczy, do którego jest przymocowany element wykonawczy MRP. Elementem wykonawczym MRP może być chwytak, szczęki obejmujące elektrodę spawalniczą itp. We współczesnych MRP stosuje się wyłącznie pary kinematyczne klasy V [40], tzn. połączenia umożliwiające ruch względny łączonych członów tylko z jednym stopniem swobody. Dlatego w tej pracy skupimy się tylko na takich parach kinematycznych.

Do opisu kinematyki MRP będziemy stosować prawoskrętne układy współrzędnych prostokątnych skojarzonych z poszczególnymi elementami składowymi MRP. Do opisu położenia i orientacji tych układów zastosujemy przekształcenia jednorodne [8,41,42,51]. Przekształcenia te umożliwiają łączny opis położenia i orientacji, co jest nieocenioną zaletą przy opisie kinematyki, a szczególnie dynamiki MRP.

Liczbą stopni swobody MRP względem podstawy lub krótko liczbą stopni swobody MRP będziemy nazywać liczbę par kinematycznych V klasy łączących człony lub liczbę współrzędnych naturalnych członów. Współrzędnymi naturalnymi członów będziemy nazywać współrzędne opisujące ruch względny sąsiednich członów [38,51]. Pominiemy pomocnicze pary kinematyczne elementu wykonawczego MRP umożliwiające jego funkcjonowanie, np. ruch palców chwytaka.

Stan robota przemysłowego możemy opisać za pomocą wielu zbiorów i równań zilustrowanych na rys.1.1. W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że prze-

strzeń zewnętrzną MRP opisują jego współrzędne zewnętrzne położenia x,y,z i orientacji Φ,θ,Ψ (są to kąty Eulera oznaczające kolejne obroty : o kąt Φ wokół osi z, o kąt θ wokół osi y' i obrót wokół osi z" [8], [41], [51]). Współrzędne te opisują element wykonawczy względem wybranego układu odniesienia, niezależnie od struktury kinematycznej MRP. Przestrzeń wewnętrzną MRP opisują jego współrzędne wewnętrzne . Współrzędnymi wewnętrznymi MRP są zbiory współrzędnych naturalnych członów i siłowników [50]. Przestrzeń we-



Rys.1.1. Schematyczna ilustracja zbiorów opisujących stan robota przemysłowego
Fig.1.1. Block diagram description sets of industrial robot

wnętrzną robota opisują jego współrzędne wewnętrzne. Współrzędne wewnętrzne robota to współrzędne wewnętrzne MRP, zbiory uogólnionych sił napędowych członów i siłowników oraz zbiór sterowań siłowników. Wartości zadane współrzędnych naturalnych siłowników są wynikiem uczenia robota [38] bądź wynikiem działania warstwy wyznaczania trajektorii ruchu [38], współpracującej z kamerą, lub innym sensorem sceny.

Wśród podstawowych problemów sterowania w robotach przemysłowych jest projektowanie: algorytmów ekstrakcji cech obrazów pozyskiwanych przez układy wizyjne obserwujące otoczenie robota, algorytmów generujących trajekto-

rie zadane, algorytmów planujących optymalne trajektorie zadane oraz serwomechanizmów spełniających odpowiednie wymagania [38].

W tej pracy skupimy się na modelach matematycznych ruchu typowych manipulatorów robotów przemysłowych [8]. Przeanalizujemy aktualny stan opisu kinematyki i dynamiki ruchu manipulatorów ze szczególnym uwzględnieniem powszechnie stosowanych uproszczeń. Omówimy konsekwencje tych uproszczeń dla projektowania układów sterowania i symulacji ruchu MRP. Zaproponujemy modele ruchu bez tych uproszczeń słuszne nie tylko dla MRP z napędem bezpośrednim (jak w większości dotychczasowej literatury), ale także z napędem pośrednim. Bazując na modelach ruchu zaproponowanych w rozdziałach 2÷4 tej pracy, zilustrujemy skrótowo (w charakterze przykładów) problemy związane z: algorytmami generacji i planowania trajektorii zadanych, doborem nastaw regulatorów serwomechanizmów o danej strukturze, algorytmem umożliwiającym komputerowe badanie ruchu MRP i badaniami wrażliwościowymi serwomechanizmów.

W pracach [15,17,23,36] proponuje się algorytmy generacji trajektorii zadanej, bazujące na arbitralnej dyskretyzacji współrzędnych wewnętrznych MRP. Zdyskretyzowany opis przestrzeni zewnętrznej MRP otrzymuje się ze zdyskretyzowanego opisu przestrzeni wewnętrznej MRP. Trajektorię zadaną w przestrzeni zewnętrznej aproksymuje się wykorzystując tak zdyskretyzowany opis przestrzeni zewnętrznej MRP. Każdemu punktowi dyskretyzacji w przestrzeni zewnętrznej, aproksymującemu trajektorię zadaną, odpowiadają znane zdyskretyzowane współrzędne wewnętrzne MRP. Wadami tych algorytmów jest potrzeba dużej pamięci, konieczność przeszukiwania dużych zbiorów przy aproksymacji trajektorii zadanej oraz brak możliwości zmniejszania błędu aproksymacji, wynikającego z arbitralności dyskretyzacji przestrzeni wewnętrznej MRP.

W pracach [10,24,55] proponuje się metody iteracyjne wyznaczania współrzędnych wewnętrznych odpowiadających współrzędnym zewnętrznym punktu trajektorii zadanej. W tym sposobie wyznaczania współrzędnych wewnętrznych zbliżanie się do punktu trajektorii zadanej odbywa się w kolejnych krokach obliczeń iteracyjnych. Krok dyskretyzacji współrzędnych wewnętrznych w kolejnych krokach obliczeń iteracyjnych zależy od błędu współrzędnych zewnętrznych w poprzednim kroku iteracji. Metody iteracyjne nie wymagają dużych pamięci, gdyż dokonuje się tu obliczeń tylko dla punktów aproksymujących trajektorię zadaną. W tych metodach błąd aproksymacji trajektorii zadanej może być zmniejszany, ale zwiększa to liczbę kroków obliczeń iteracyjnych. W pracy [10] przedstawiono zmodyfikowaną metodę iteracyjną generacji pros-

toliniowego odcinka trajektorii zadanej. Modyfikacja ta polega na arbitralnym przyjęciu rozkładu błędów w przestrzeni zewnętrznej, co redukuje liczbę kroków obliczeń iteracyjnych. Jednak tak przyjęty rozkład błędów jest słuszny tylko na krótkich odcinkach. Nie można wyznaczyć długości granicznych tych odcinków, gwarantujących ograniczenie tych błędów dla dowolnej konfiguracji MRP. Wadą metod iteracyjnych jest konieczność wielokrotnych obliczeń iteracyjnych.

Zaletą metod bazujących na arbitralnej dyskretyzacji przestrzeni wewnętrznych i metod iteracyjnych jest prostota obliczeń, polegająca na stosowaniu tylko równań kinematyki prostej MRP. Jednak zaleta ta może być pułapką dla tych programistów komputerów, którzy nie przewidzieli wcześniej osobliwości kinematycznych MRP [51].

Formuły analityczne stanowiące rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki MRP umożliwiają projektowanie algorytmów generacji trajektorii obliczających współrzędne wewnętrzne punktów dokładnie leżących na trajektorii zadanej, w jednym kroku, z dokładnością wynikającą z długości rejestrów komputera. Formuły te wymuszają na programistach konieczność przewidzenia alternatywnych rozwiązań dla stanów osobliwych MRP. Formuły analityczne stanowiące rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki MRP o 6 stopniach swobody opracowano w pracach [8,28,41,50]. Formuły te dla MRP o N<6 stopniach swobody opracowano w pracach [8,29]. Jednak w pracy [29] nie przytoczono równań więzów członu roboczego [51]. Sugeruje to, że człon ten może realizować trajektorie zadane z 6 stopniami swobody , co jest niemożliwe.

Skuteczność algorytmów planowania trajektorii optymalizujących wskaźniki jakości korespondujące z dynamiką ruchu MRP w dużej mierze zależy od dokładności modelów tej dynamiki. Szczególnie ważna jest dokładność modelów dynamiki ruchu MRP dla algorytmów badających pracę układów sterowania robotem.

Co to oznacza pojęcie dokładnego modelu dynamiki ruchu ? Oznacza to, że model jest rygorystyczny względem podstawowych praw fizyki klasycznej. Prawa te opisują równania Newtona [6,8,40,44,45] bądź równania Lagrange'a [6, 8,41,42,44,45].

Równania Newtona pozwalają wyznaczyć siły i momenty reakcji oddziaływania na siebie elementów MRP. Reakcje te umożliwiają wyznaczanie naprężeń i odkształceń elementów MRP. Jednak równania te nie pozwalają wyznaczyć ogólnej formuły analitycznej dla efektywnej bezwładności siłowników - bardzo ważnego parametru umożliwiającego projektowanie i dobór nastaw regulatorów serwomechanizmów.

Równania Lagrange'a pozwalają wyznaczyć siły lub momenty napędowe, które należy przyłożyć w parach kinematycznych członów. Bardzo ważną zaletą równań Lagrange'a jest możliwość otrzymania z nich ogólnych formuł wiążących bezpośrednio siły napędowe z pierwszymi i drugimi pochodnymi po czasie współrzędnych naturalnych MRP. Jest to zaleta pozwalająca opisać MRP jako obiekt regulacji za pomocą równań stanu, co umożliwia syntezę układów sterowania [13,59]. Inną ważną zaletą tych równań jest łatwość wyprowadzenia ogólnych formuł analitycznych dla efektywnych bezwładności siłowników.

Ogólny model dynamiki ruchu MRP wynikający z równań Newtona opracowano w pracach [8,29,40,62]. Jednak uwzględniono tylko oddziaływanie sąsiednich członów MRP, a w pracach [29,40,62] pominięto nawet wpływ sił grawitacji. Dlatego po uwzględnieniu grawitacji równania te są przydatne tylko dla MRP z napędem w osiach par kinematycznych łączących człony. Ogólny model dynamiki ruchu MRP wynikający z równań Lagrange'a opracowano w podręczniku [41]. Jednak model ten jest słuszny tylko dla MRP z napędem w osiach par kinematycznych członów. Model ten zawiera uproszczenia, które omówiono w 3 rozdziale tej pracy i w pracy [51]. Te same uproszczenia zastosowano w podręczniku [42], gdzie przytacza się model dynamiki z pracy [41]. Model ten pozwala otrzymać poprawne formuły analityczne określające efektywne bezwładności siłowników. Planowanie trajektorii minimalnoczasowych lub minimalnokosztowoczasowych z wykorzystaniem powyższych modeli dynamiki jest obarczone ich błędami. Algorytmy badające pracę serwomechanizmów będą także obarczone błędami powyższych modeli.

Do opisu kinematyki i dynamiki manipulatorów robotów zastosowano w pracy [58] formalizm motorów i skrętników.

Z przeglądu tego wynika, że prezentowane w pracach [10,15,17,23,24,29, 36,55] modele kinematyki nie pozwalają projektować dokładnych i jednocześnie szybkich algorytmów generacji trajektorii zadanej ze zdefiniowaną kinematyką dla MRP z liczbą stopni swobody mniejszą niż 6. Modele dynamiki prezentowane w pracach [8,29,40,41,42,62] są niesłuszne dla MRP z napędami umieszczonymi poza osiami par kinematycznych członów. Jest to równoważne z niemożliwością stosowania tych modeli dynamiki do projektowania algorytmów: planowania trajektorii minimalnoczasowych i minimalnokosztowoczasowych oraz badania pracy serwomechanizmów dla takich MRP. W takie manipulatory wyposażone są roboty produkcji krajowej IRb-6 i IRb-60. Dobór nastaw regulatorów dla manipulatorów umożliwiają efektywne bezwładności siłowników. Opis dynamiki ruchu MRP IRb-6 i IRb-60 stosowany dotychczas w kraju bazuje na uproszczonych modelach, w których pomija się ostatnie dwa człony. Masy

pominiętych członów włącza sie do masy trzeciego członu. Wpływ tych uproszczeń na momenty bezwładności siłowników przedstawia rozdział 10 tej pracy. Autor pracy opracował modele kinematyki i dynamiki [51] takich MRP oraz modele dynamiki MRP z napędami w osiach par członów, nie obarczone wyżej wymienionymi w [8,29,41,42] uproszczeniami.

Przedstawiony stan skłonił autora do napisania prezentowanej rozprawy.

Autor pragnie w tym miejscu wyrazić serdeczne podziękowania prof.zw.dr. inż.Henrykowi Kowalowskiemu za przekonywanie i zachętę do zainteresowania się i rozwoju tej problematyki. Równie serdeczne podziękowania autor wyraża prof.zw.dr. hab.inż.Arkadiuszowi Góralowi za słowa zachęty do napisania tej pracy.

Prof.zw.dr. hab.inż.Anatolowi Gosiewskiemu autor dziękuje za wnikliwą recenzję i życzliwe uwagi, które pozwoliły skorygować pierwotny tekst, oraz za udostępnienie wyników identyfikacji parametrów manipulatorów IRb-6 i IRb-60. Równie miłym obowiązkiem autora jest podziękowanie za zachętę i recenzję swemu nauczycielowi mechaniki prof. zw. dr. hab. inż. Bogdanowi Skalmierskiemu. Prof. dr. hab.inż. Leszkowi Trybusowi autor dziękuje za udostępnienie metody doboru nastaw serwomechanizmów. Za słowa zachęty autor dziękuje też prof.zw.dr. inż.Stefanowi Węgrzynowi i prof.zw.dr. hab. inż. Zdzisławowi Trybalskiemu.

1.2. CEL I ZAKRES PRACY

Celem rozprawy jest przedstawienie opracowanych przez autora poprawnych i rygorystycznych względem podstawowych praw fizyki modeli matematycznych ruchu MRP z liczbą stopni swobody $N \leq 6$ i dowolnym sposobem napędu (z siłownikami zamocowanymi w osi par kinematycznych łączących człony i poza tymi osiami). Innym celem rozprawy jest przedstawienie opracowanych przez autora (na bazie opracowanych przez niego modeli ruchu MRP) algorytmów komputerowych, wspomagających analizę podstawowych problemów automatyki i robotyki. Algorytmy te umożliwiają między innymi badania wrażliwościowe pozwalające na racjonalne uproszczenia modeli ruchu MRP na potrzeby sterowania.

Ze względu na obszerność tematu poczyniono wiele założeń definiujących zakres rozważań w tej pracy. Założenia te są następujące:

1. Człony MRP tworzą łańcuchy kinematyczne szeregowe otwarte.
2. Pary kinematyczne łączące człony MRP są klasy V.
3. Wszystkie pary kinematyczne MRP są doskonałe, tzn. nie posiadają luzów.

4. Liczba stopni swobody MRP jest nie większa niż 6.

5. Wszystkie elementy składowe MRP są doskonale sztywne.

6. Współrzędne naturalne członów q_i i siłowników q_{si} nie zależą explicite od czasu, tzn. $q_i=q_i(q_{s1},q_{s2},\ldots,q_{sN})$ i $q_{si}=q_{si}(q_1,q_2,\ldots q_N)$.

7. W celu uproszczenia opisu serwomechanizmów przyjmujemy, że funkcje przejścia czujników dla współrzędnych naturalnych siłowników i ich prędkości są bezinercyjne i równe jedności.

Rozdziały 2 i 3 przedstawiają modele kinematyki i dynamiki ruchu MRP. W znacznej mierze nawiązują do pracy [51] autora. Rozdział 4 zawiera opis modelów kinematyki i dynamiki manipulatora IRb-6. W rozdziale 5 przedstawiono oryginalny algorytm obliczania efektywnych momentów bezwładności siłowników manipulatora IRb-6 i wyznaczono zakresy ich zmian.

W rozdziale 6 opisano oryginalny algorytm generacji trajektorii zadanych dla manipulatora IRb-6. Algorytm ten wyznacza współrzędne wewnętrzne punktów dokładnie leżących na trajektorii zadanej w jednym kroku. Umożliwia także definiowanie kinematyki zadanej w postaci współrzędnych zewnętrznych punktów dowolnie oddalonych od siebie. W rozdziale 7 wyznaczono nastawy regulatorów przykładowych serwomechanizmów manipulatora IRb-6. Wykorzystano tu metodę doboru nastaw regulatorów opracowaną w Zakładzie Automatyki i Informatyki Politechniki Rzeszowskiej. Metoda ta uwzględnia zmienności efektywnych momentów bezwładności siłowników. W literaturze [8,41] zaniedbuje się fakt zmienności tych bezwładności spowodowanych zmieniającą się konfiguracją MRP. W rozdziale 8 przedstawiono oryginalny algorytm badający pracę serwomechanizmów ciągłych sterujących ruchem manipulatora IRb-6. W rozdziale 9 przedstawiono oryginalny algorytm planowania trajektorii minimalnoczasowych dla manipulatora IRb-6. W pracach [26,43] proponuje się metody planowania trajektorii zadanych wymagające parametryzowania ich długością wzdłuż toru ruchu, obliczenia pseudoprędkości i pseudoprzyśpieszeń. Zaproponowany algorytm planowania w rozdziale 9 nie wymaga parametryzacji ani obliczeń pseudoprędkości i pseudoprzyśpieszeń. W rozdziale 10 omówiono i przebadano wrażliwość odpowiedzi skokowej serwomechanizmów z rozdziału 8 na zmiany efektywnych bezwładności siłowników manipulatora IRb-6. W rodziale 11 sformułowano wnioski i uwagi końcowe.

Ze względu na podobną strukturę kinematyczna manipulatorów IRb-6 i IRb-60 przedstawione algorytmy mogą być pomocą przy projektowaniu odpowiednich algorytmów dla manipulatora IRb-60 oraz innych o podobnej strukturze.

Wszystkie wymienione wyżej algorytmy dla manipulatora IRb-6 zostały napisane w języku FORTRAN 77, zainstalowane i uruchomione na mc. μVAX 3800 w ośrodku ETO przy Politechnice Śląskiej w Gliwicach.

1.3. WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

Wektory oznaczono strzałką np. $\vec{r}$, $\vec{d}$ itp.

Macierze oznaczono tłustym drukiem, np. **A**, **T** itp.

$\vec{a}$ - wektor jednostkowy równoległy do osi x przekształconego układu współrzędnych

a_x, a_y, a_z - składowe $\vec{a}$

A_i - macierz przekształceń jednorodnych i-tego członu względem i-1-szego układu współrzędnych

α - 1) kąt obrotu, 2) wzmocnienie zadajnika prędkości serwomechanizmu

α_i - kąt obrotu wokół osi x_i - parametr Hartenberga-Denavita

$\vec{b}$ - wektor jednostkowy równoległy do osi y przekształconego układu współrzędnych

b_x, b_y, b_z - składowe $\vec{b}$

$\vec{c}$ - wektor jednostkowy równoległy do osi z przekształconego układu współrzędnych

c_x, c_y, c_z - składowe $\vec{c}$

$\vec{d}$ - wektor przemieszczenia początku przekształconego układu współrzędnych

d_x, d_y, d_z - składowe $\vec{d}$

$\vec{\partial}$ - wektor przemieszczenia różniczkowego względem układu odniesienia

$\partial x, \partial y, \partial z$ - składowe $\vec{\partial}$

$\vec{\partial}_{Tj}$ - wektor przemieszczenia różniczkowego względem układu współrzędnych $x_j y_j z_j$

$\partial x_{Tj}, \partial y_{Tj}, \partial z_{Tj}$ - składowe $\vec{\partial}_{Tj}$

$\partial x_{i,Tj}, \partial y_{i,Tj}, \partial z_{i,Tj}$ - składowe $\vec{\partial}_{Tj}$ wynikające z różniczkowego przyrostu dq_i

$\vec{\delta}_{Tj}$ - wektor obrotu różniczkowego względem układu współrzędnych $x_j y_j z_j$

$\delta_{x,Tj}, \delta_{y,Tj}, \delta_{z,Tj}$ - składowe $\vec{\delta}_{Tj}$

$\delta_{xi,Tj}, \delta_{yi,Tj}, \delta_{zi,Tj}$ - składowe $\vec{\delta}_{Tj}$ wynikające z różniczkowego przyrostu dq_i

$\Delta_{i,Tj}$ - macierz jednorodna przekształceń różniczkowych układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ wynikająca z różniczkowego przyrostu dq_i

δ_{ij} - funkcja Kroneckera

$\Delta_{i,i-1}$ - macierz jednorodnych przekształceń różniczkowych i-tego układu współrzędnych względem i-1-szego układu współrzędnych

Δ_T - macierz jednorodnych przekształceń różniczkowych względem przekształconego układu współrzędnych

dT - różniczka macierzy przekształceń T

D_j - macierz jakobianu j-tego członu

D_{sll} - efektywny moment bezwładności l-tego siłownika

E - macierz przekształceń jednorodnych opisująca element wykonawczy MRP względem członu roboczego

E_μ - macierz przekształceń jednorodnych opisująca obiekt manipulacji względem elementu wykonawczego MRP

E_k - energia kinetyczna

E_p - energia potencjalna

ε_{sl} - błąd q_{sl} (współrzędnej naturalnej l-tego siłownika)

ε_{vsl} - błąd v_{sl} (prędkości zmian q_{sl})

F_i - siła uogólniona działająca na i-ty człon

F_{si} - siła uogólniona działająca na i-ty siłownik

F_{sin} - siła uogólniona wytwarzana przez i-ty siłownik

F_{sits} - startowa siła tarcia suchego i-tego siłownika

F_{sitr} - ruchowa siła tarcia suchego i-tego siłownika

Φ - kąt Eulera

g - przyśpieszenie grawitacyjne Ziemi

$\vec{g}$ - wektor g

g - postać jednorodna $\vec{g}$

h_i - skok i-tej przekładni śrubowej

$\vec{i}$ - wektor jednostkowy równoległy do osi x_0

$\vec{i}_{Tj}$ - wektor jednostkowy równoległy do osi x_j

i_{rl} - prąd regulatorów l-tego serwomechanizmu

i_{kl} - prąd kompensacji l-tego serwomechanizmu

i_{sl} - prąd siłownika l-tego serwomechanizmu

i_m - prąd maksymalny siłownika

I_{iuv} - elementy macierzy pseudobezwładności i-tego członu

$\mathbb{I}_i$ - macierz tensora bezwładności i-tego członu

$\vec{j}$ - wektor jednostkowy równoległy do osi y_0

$\vec{j}_{Tj}$ - wektor jednostkowy równoległy do osi y_j

$\mathbb{J}_i$ - macierz pseudobezwładności i-tego członu

$\mathbb{J}_{si}$ - macierz pseudobezwładności elementu wykonawczego i-tego siłownika

$\vec{k}$ - wektor jednostkowy równoległy do osi z_0

$\vec{k}_{Tj}$ - wektor jednostkowy równoległy do osi z_j

k_i - 1) przełożenie i-tej przekładni, 2) wzmocnienie regulatorów całkujacych serwomechanizmu

k_p - wzmocnienie regulatorów proporcjonalnych serwomechanizmu

k_{sl} - wzmocnienie l-tego siłownika

k_z - wzmocnienie zadajnika prędkości serwomechanizmu

$\vec{K}_i$ - wektor krętu i-tego członu

l_i - przemieszczenie wzdłuż osi x_i - parametr Hartenberga-Denavita

L - potencjał kinetyczny Lagrange'a

λ_i - 1) przemieszczenie wzdłuż osi z_i - parametr Hartenberga-Denavita
2) mnożnik Lagrange'a

m - liczba współrzędnych zewnętrznych niezależnych opisujących X_{zad}

m_i - masa i-tego członu z elementami przymocowanymi do niego

m_{ij} - masa j-tego elementu zespołu przekazującego napęd na i-ty człon

m_{si} - masa elementu wykonawczego i-tego siłownika

$\vec{M}$ - wektor momentu

N - liczba stopni swobody MRP

ω_{0i} - wektor prędkości kątowej układu współrzędnych $x_i y_i z_i$

ω_{sl} - szybkość zmian θ_{sl}

$\vec{P}_i$ - wektor siły działającej na i-ty człon

$\vec{p}_i$ - wektor pędu i-tego członu

Ψ - kąt Eulera

q_i - współrzędna naturalna i-tego członu

q_{si} - współrzędna naturalna i-tego siłownika

$Q(q_1, q_2, .. q_N)$ - zbiór rozwiązań $q_1, ... q_N$ dla punktu na zadanej trajektorii członu roboczego MRP

$\vec{r}$ - wektor położenia

r_x, r_y, r_z - składowe $\vec{r}$

$\bar{r}_i$ - postać jednorodna wektora opisującego środek ciężkości i-tego członu

$\vec{R}$ - wektor sił reakcji

t - czas

T_i - postać jednorodna układu współrzędnych $x_i y_i z_i$

T_{ij} - macierz przekształceń jednorodnych j-tego elementu względem układu współrzędnych $x_i y_i z_i$

T_N - macierz przekształceń jednorodnych członu roboczego względem układu współrzędnych bazowego

$T_{N,i}$ - macierz przekształceń jednorodnych członu roboczego względem układu współrzędnych $x_i y_i z_i$

T_{Nzad} - macierz przekształceń jednorodnych opisująca zadaną trajektorię członu roboczego

T_{si} - macierz przekształceń jednorodnych elementu wykonawczego i-tego siłownika względem układu $x_i y_i z_i$

θ - kąt Eulera

θ_i - 1) kąt obrotu, 2) kąt obrotu wokół osi z_{i-1} - parametr Hartenberga-Denavita

θ' - kąt obrotu i-tego członu względem członu sąsiedniego

θ_{si} - kąty obrotu elementu wykonawczego siłownika względem jego korpusu

u_l, u_l' - sterowania l-tego serwomechanizmu

$\vec{v}_{0i}$ - wektor prędkości początku układu współrzędnych $x_i y_i z_i$

v_{sl} - prędkość zmian q_{sl}

v_{slz} - wartość zadana v_{sl}

$x_0 y_0 z_0$ - układ współrzędnych bazowy

X - macierz przekształceń jednorodnych opisująca człon roboczy w układzie współrzędnych bazowym

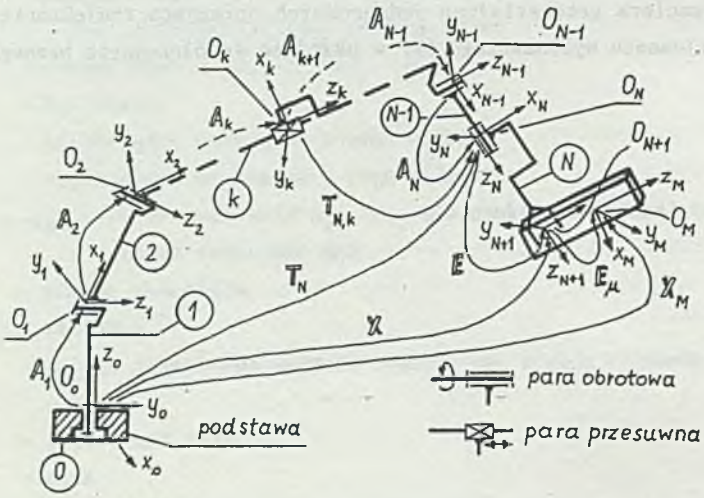
X_M - macierz przekształceń jednorodnych opisująca obiekt manipulacji w układzie współrzędnych bazowym

X_{zad} - macierz przekształceń jednorodnych opisująca trajektorię zadaną elementu wykonawczego MRP w układzie współrzędnych bazowym.

2. KINEMATYKA RUCHU MRP

2.1. RÓWNANIA RUCHU W POSTACI CIĄGŁEJ

Do opisu ruchu MRP zastosujemy schemat kinematyczny przedstawiony na rys.2.1. Obok schematu przedstawiono oznaczenia par kinematycznych, które będziemy stosować. Każdemu członowi przyporządkujemy układ współrzędnych. Do opisu wzajemnego położenia i orientacji tych układów (a tym samym członów) zastosujemy macierze przekształceń jednorodnych A_i [41,51]. Niech A_1 opisuje położenie i orientację pierwszego członu względem układu bazowego



Rys.2.1. Ilustracja opisu położenia i orientacji MRP
Fig.2.1. Description of position and orientation MRP

(skojarzonego z zerowym członem, tj. z podstawą MRP), A_2- drugiego względem pierwszego itp. Wtedy położenie i orientację i-tego członu we współrzędnych bazowych przedstawia iloczyn

$$T_i = A_1 A_2 \ldots A_i . \tag{2.1}$$

Opis członu roboczego o N stopniach swobody [51] względem i-tego układu współrzędnych przedstawia wyrażenie

$$\mathbf{T}_{N,i}=\mathbf{A}_{i+1}\mathbf{A}_{i+2}\ldots\mathbf{A}_N. \tag{2.2}$$

Opis członu roboczego względem układu bazowego przedstawia wyrażenie

$$\mathbf{T}_N=\mathbf{T}_{N,0}=\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_N. \tag{2.3}$$

W celu ułatwienia opisu obiektu manipulacji zastosujemy układ współrzędnych określający położenie i orientację elementu wykonawczego MRP np.chwytaka. Jeśli układ ten opisuje względem członu roboczego macierz przekształceń **E** (patrz. rys.2.1), wtedy położenie i orientację elementu wykonawczego względem układu bazowego opisuje równanie

$$\mathbf{X}=\mathbf{T}_N\mathbf{E}. \tag{2.4}$$

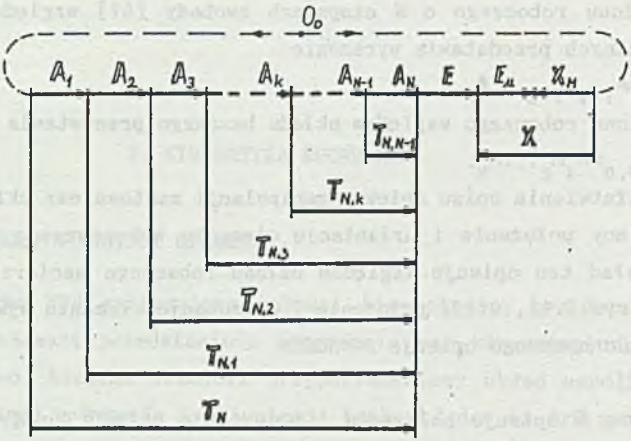
Macierz **E** opisuje położenie i orientację układu współrzędnych $x_{N+1}y_{N+1}z_{N+1}$ skojarzonego z punktem charakterystycznym elementu wykonawczego, względem układu $x_Ny_Nz_N$ skojarzonego z członem roboczym. Na rys. 2.1 elementem wykonawczym jest chwytak i jego punktem charakterystycznym jest środek szczeliny między palcami. Orientacja i położenie układu $x_{N+1}y_{N+1}z_{N+1}$ względem układu $x_Ny_Nz_N$ są stałe i zależą tylko od parametrów konstrukcyjnych elementu wykonawczego. Dlatego elementy macierzy **E** są stałe i zależą tylko od parametrów konstrukcyjnych elementu wykonawczego. Z obiektem manipulacji skojarzymy także układ współrzędnych, a macierz przekształceń opisującą jego orientację względem elementu wykonawczego MRP oznaczymy przez $\mathbf{E}_\mu$. Opis położenia i orientacji obiektu manipulacji wzgledem układu bazowego przedstawia równanie

$$\mathbf{X}_M=\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_N\mathbf{E}\mathbf{E}_\mu. \tag{2.5}$$

$\mathbf{A}_1\div\mathbf{A}_N$ zależą od współrzędnych naturalnych członów $q_1\div q_N$ [51], $\mathbf{X}_M$ zależy od współrzędnych położenia i orientacji obiektu manipulacji względem układu bazowego. Równanie (2.5) wiąże przestrzeń współrzędnych wewnętrznych (współrzędnych naturalnych) z przestrzenią współrzędnych zewnętrznych (współrzędnych położenia i orientacji względem układu bazowego).

Równania (2.1)÷(2.5) są równaniami kinematyki MRP. Można je zilustrować za pomocą grafu przekształceń [41,51] jak na rys.2.2.

Układy współrzędnych opisujące człony kojarzymy zgodnie z zapisem Hartenberga-Denavita [20,41,51]. Macierz $\mathbf{A}_i$ opisują cztery parametry Hartenberga-Denavita - $\alpha_i, l_i, \lambda_i, \theta_i$. Zaletą takiego usytuowania układów współrzędnych jest to, że tylko jeden z tych parametrów jest zmienny i odpowiada i-tej współrzędnej naturalnej, a pozostałe są stałe. Jeśli człon i-1-szy łączy z członem i-tym para obrotowa, to zmienny jest kąt obrotu θ_i, jeśli para jest przesuwna, to zmienne jest przesunięcie λ_i.



Rys.2.2. Graf przekształceń MRP o N stopniach swobody
Fig.2.2. MRP transform graph having N degrees of freedom

Znając zakresy zmian współrzędnych naturalnych członów, można z równań kinematyki wyznaczyć przestrzeń roboczą właściwą i rozszerzoną MRP z równań kinematyki. Przestrzeń robocza właściwa MRP to zbiór punktów, w których może zostać ustawiony środek osi obrotu członu roboczego opisany macierzą $\mathbf{T}_N$. Przestrzeń robocza rozszerzona MRP to przestrzeń, w której każdy punkt opisany macierzą $\mathbf{X}$ może być obsłużony [38,51].

2.2. ZADANIE PROSTE I ODWROTNE KINEMATYKI W POSTACI CIĄGŁEJ

Macierz $\mathbf{E}$ opisują stałe znane parametry konstrukcyjne elementu wykonawczego MRP. Macierz $\mathbf{E}_\mu$ opisują współrzędne położenia i orientacji obiektu manipulacji względem elementu wykonawczego MRP. Współrzędne te mogą być stałe bądź zmieniać się. Zmiana tych współrzędnych może być pożądana (wynikająca z procesu technologicznego) bądź niepożądana (np. przemieszczenie się obiektu manipulacji wynikające z oddziaływań dynamicznych ruchu i niewystarczającej siły obejmowania palców chwytaka). W naszych dalszych rozważaniach przyjmiemy, że macierz $\mathbf{E}_\mu$ jest znana.

2.2.1. Zadanie proste

Zadanie proste kinematyki MRP polega na wyznaczaniu współrzędnych zewnętrznych elementu wykonawczego (opisujących macierz $\mathbf{X}$) dla znanych współrzędnych wewnętrznych, np. współrzędnych naturalnych członów $q_1 \div q_N$.

Po wyznaczeniu $\mathbf{A}_1 \div \mathbf{A}_N$, skorzystaniu z równań (2.3) i (2.4) możemy wyznaczyć macierz $\mathbf{X}$. Niech tak wyznaczona macierz ma ogólną postać [34,41,51]:

$$X=\begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{2.6}$$

Do opisu położenia i orientacji elementu wykonawczego w przestrzeni zewnętrznej będziemy stosować współrzędne kartezjańskie x,y,z oraz kąty Eulera Φ,Θ,Ψ [34,41,51].

$X=\mathrm{Trans}(x,y,z)\mathrm{Euler}(\Phi,\Theta,\Psi)$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Phi\cos\Theta\cos\Psi-\sin\Phi\sin\Psi & -\cos\Phi\cos\Theta\sin\Psi-\sin\Phi\cos\Psi & \cos\Phi\sin\Theta & x \\ \sin\Phi\cos\Theta\cos\Psi+\cos\Phi\sin\Psi & -\sin\Phi\cos\Theta\sin\Psi+\cos\Phi\cos\Psi & \sin\Phi\sin\Theta & y \\ -\sin\Theta\cos\Psi & \sin\Theta\sin\Psi & \cos\Theta & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{2.7}$$

Po porównaniu postaci (2.6) i (2.7) macierzy X oraz po pewnych przekształceniach otrzymujemy następujące formuły dla szukanych współrzędnych zewnętrznych:

$$x=d_x\ ,\ y=d_y\ ,\ z=d_z\ ; \tag{2.8a}$$

dla $c_x^2+c_y^2>0$

$$\Phi=\begin{cases} \Phi^* & \text{dla } c_x \geq 0 \text{ i } c_y \geq 0\ , \\ \Phi^*+180^\circ & \text{dla } c_x < 0 \\ \Phi^*+360^\circ & \text{dla } c_x \geq 0 \text{ i } c_y \leq 0\ , \end{cases}$$

$$\Phi^*=\mathrm{arc\ tg}\frac{c_y}{c_x}\ ; \tag{2.8b}$$

$$\Theta=\begin{cases} \Theta^* & \text{dla } c_z \geq 0\ , \\ \Theta^*+180^\circ & \text{dla } c_z < 0\ , \end{cases}$$

$$\Theta^*=\mathrm{arc\ tg}\frac{c_x\cos\Phi+c_y\sin\Phi}{c_z}\ ; \tag{2.8c}$$

$$\Psi=\begin{cases} \Psi^* & \text{dla } L \geq 0 \text{ i } M \geq 0\ , \\ \Psi^*+180^\circ & \text{dla } M < 0\ , \\ \Psi^*+360^\circ & \text{dla } L \leq 0 \text{ i } M \geq 0\ , \end{cases}$$

$$\Psi^*=\mathrm{arc\ tg}\frac{L}{M}\ ,$$

$$L=-a_x\sin\Phi+a_y\cos\Phi\ ,\ M=-b_x\sin\Phi+b_y\cos\Phi\ ; \tag{2.8d}$$

dla $c_x^2+c_y^2 = 0$

$$\theta=\begin{cases} 0^\circ & \text{dla } c_z > 0 , \\ 180^\circ & \text{dla } c_z < 0 , \end{cases} \tag{2.8e}$$

$$\Phi+\Psi=\begin{cases} \delta^* & \text{dla } b_x \le 0 \text{ i } b_y \ge 0 , \\ \delta^*+180^\circ & \text{dla } b_y < 0 , \\ \delta^*+360^\circ & \text{dla } b_x \ge 0 \text{ i } b_y \ge 0 , \end{cases}$$

$$\delta^*=\text{arc tg}\frac{-b_x}{b_y} . \tag{2.8f}$$

Z wyrażenia $c_x^2+c_y^2= 0$ wynika $c_x=0=c_y=0$, skąd z kolei z (2.8b) otrzymujemy niejednoznaczność na Ψ. Formuły (2.8f) pozwalają wyznaczyć sumę kątów Φ i Ψ przy $c_x^2+c_y^2=0$.

Formuły (2.8a)÷(2.8f) są rozwiązaniem zadania prostego kinematyki MRP.

2.2.2. Zadanie odwrotne

Zadanie odwrotne kinematyki MRP polega na wyznaczaniu współrzędnych wewnętrznych $q_1 \div q_N$ dla znanych współrzędnych zewnętrznych elementu wykonawczego (opisujących macierz X_{zad}, odpowiadającą trajektorii zadanej ruchu obiektu manipulacji).

Z rozważań zamieszczonych w pracach [1,7,9,10,14,24,25,27÷31,40], dotyczących rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki MRP wynika, że najdokładniejsze i najpewniejsze są metody wykorzystujące zależności geometryczne wynikające z analizy konfiguracji MRP. Zależności te możemy otrzymać za pomocą metod wektorowych [27÷30,40] lub metody macierzowej [29,40,41,42,51]. Metoda macierzowa wykorzystująca równania kinematyki (2.1)÷(2.4) pozwala w sposób formalny otrzymać formuły analityczne mające interpretację geometryczną.

Macierz X_{zad} odpowiadającą trajektorii zadanej ruchu obiektu manipulacji będziemy nazywać trajektorią zadaną elementu wykonawczego MRP. Macierz E nie zależy od współrzędnych naturalnych członów i dlatego w dalszych rozważaniach będziemy posługiwać się macierzą $T_{Nzad}=X_{zad}E^{-1}$, opisującą człon roboczy.

Z równań (2.3) i (2.4) wynika N następujących równań macierzowych:

$$A_1A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots A_i \ldots A_N=T_{Nzad} , \tag{2.9-1}$$

$$A_2A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots A_i \ldots A_N=A_1^{-1}T_{Nzad} , \tag{2.9-2}$$

.....

$$A_k \ldots A_i \ldots A_N = A_{k-1}^{-1} A_{k-2}^{-1} A_1^{-1} T_{Nzad} , \qquad (2.9\text{-}k)$$

.....

$$A_N = A_{N-1}^{-1} A_{N-2}^{-1} \ldots A_1^{-1} T_{Nzad} . \qquad (2.9\text{-}N)$$

Prawe strony tych równań zawierają trajektorię zadaną członu roboczego w postaci macierzy T_{Nzad}. Lewe strony tych równań zależą od poszukiwanych współrzędnych naturalnych członów. Porównując odpowiednie elementy macierzy tych równań po obu stronach, znajdujemy szukane współrzędne. Jeśli szukaną współrzędną jest kąt θ, należy dążyć do obliczania go z funkcji $tg\theta$ a nie z $\sin\theta$, gdyż ta ostatnia może w pewnych przypadkach dawać bardzo duże błędy [41,51].

MRP o N=6 stopniach swobody umożliwia niezależne przemieszczanie i orientację obiektu manipulowanego, w granicach wynikających z jego struktury kinematycznej. W MRP o $N < 6$ stopni swobody, ruch członu roboczego wiąże 6-N stopni swobody. Dlatego elementy macierzy T_{Nzad} muszą spełniać 6-N równań więzów członu roboczego [51], będących analitycznym zapisem związania tylu jego stopni swobody.

W ogólnym przypadku dla MRP o $N \leq 6$ stopniach swobody rozwiązaniem będzie zbiór $Q(q_1, q_2, \ldots q_N)$. Mogą pojawić się także stany MPR, w których jednoznacznie określonej macierzy T_{Nzad} odpowiada więcej niż jeden zbiór rozwiązań $Q(q_1, \ldots q_N)$, przy $N \leq 6$. Stany te będziemy nazywać osobliwościami kinematycznymi MRP [51]. Osobliwości te możemy podzielić na dwa rodzaje [51]:

a) osobliwości kinematyczne pierwszego rodzaju, przy których liczba rozwiązań $Q(q_1, \ldots q_N)$ jest skończona;

b) osobliwości kinematyczne drugiego rodzaju, przy których liczba rozwiązań $Q(q_1, \ldots q_N)$ jest nieskończona.

Osobliwości kinematyczne drugiego rodzaju będziemy nazywać krótko degeneracją [41,51].

Sposób wyznaczania współrzędnych naturalnych członów zależy od sposobu opisu trajektorii zadanej członu roboczego. Obrót i przemieszczenie obiektu manipulacji możemy opisać za pomocą $m \leq 6$ [38,51] niezależnych współrzędnych zewnętrznych MRP. Przykładowo przemieszczenie obiektu manipulacji z jednego punktu do innego z dowolną orientacją można opisać za pomocą 3 niezależnych współrzędnych zewnętrznych MRP. Wtedy elementy pierwszych trzech kolumn macierzy X_{zad}, opisujące orientację członu roboczego, są niejedno-

znaczne i mogą zmieniać się w pewnych granicach. To może implikować nieskończenie wiele rozwiązań dla współrzędnych naturalnych członów [51].

Przy badaniu możliwości realizacji X_{zad} (opisanej za pomocą m niezależnych współrzędnych zewnętrznych) przez MPR o N stopniach swobody wygodnie jest stosować pojęcie zapasu ruchliwości MRP lub stopnia redundancji MRP względem trajektorii zadanej W_w=N-m [38,51].

Jeśli $W_w > 0$, to MRP nazywamy redundantnym względem trajektorii zadanej. Jeśli W_w=0, to MRP nazywamy nieredundantnym dla tej trajektorii. Jeśli W_w<0, to na pewno MRP nie będzie mógł zrealizować trajektorii zadanej. Jednak nieujemność stopnia redundancji MRP względem trajektorii zadanej nie gwarantuje jej realizacji. Realizację kinematyki trajektorii zadanej zapewnia spełnienie w każdym jej punkcie następujących warunków kinematycznych realizacji trajektorii zadanej [51]:

a) zadane położenie członu roboczego, wynikające z $X_{zad}E^{-1}$ jest zanurzone w przestrzeni roboczej właściwej MRP;

b) zapas ruchliwości $W_w \geq 0$;

c) elementy macierzy $X_{zad}E^{-1}$ spełniają równania więzów członu roboczego;

d) takie wartości elementów macierzy X_{zad} opisujących zadaną trajektorię, którym odpowiadają wartości współrzędnych wewnętrznych z zakresu ich zmienności.

Warunki a),b),c) są konieczne, a warunek d) jest konieczny i wystarczający do realizacji kinematyki trajektorii zadanej.

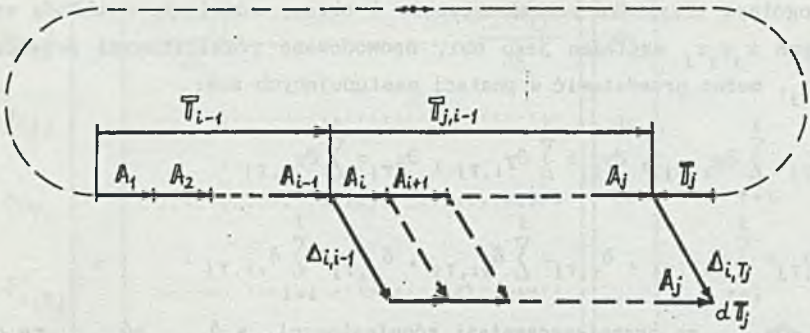
2.3. RÓWNANIA RUCHU W POSTACI RÓŻNICZKOWEJ

Małe zmiany położenia i orientacji członów MRP można opisać stosując macierze przekształceń różniczkowych [41,51]. Różniczkę $d\mathbf{T}$ możemy potraktować jako zmianę położenia i orientacji układu współrzędnych xyz, spowodowaną jego przemieszczeniem różniczkowym o ∂x wzdłuż osi x, o ∂y wzdłuż osi y, o ∂z wzdłuż osi z oraz obrotami różniczkowymi o kąt δ_x wokół osi x, o kąt δ_y wokół osi y, o kąt δ_z wokół osi z. Rozważmy teraz zmiany różniczkowe położenia i orientacji j-tego członu (opisanego macierzą $\mathbf{T}_j=A_1A_2...A_j$), spowodowane zmianą różniczkową dq_i i-tej współrzędnej naturalnej członu. Spowoduje to przyrost różniczkowy $d\mathbf{T}_j$. Różniczkę tę możemy wyrazić za pomocą macierzy przekształceń różniczkowych $\Delta_{i,i-1}$ układu $x_iy_iz_i$ opisującego i-ty człon względem i-1-szego członu [41,51].

Z rys.2.3 ilustrującego tę różniczkę wynika:

$$d\mathbf{T}_j=\mathbf{T}_j\Delta_{i,Tj}=\mathbf{T}_{i-1}\Delta_{i,i-1}\mathbf{T}_{j,i-1}, \tag{2.10}$$

gdzie: $i \leq j$, $\Delta_{i,Tj}$ - macierz przekształceń różniczkowych, względem układu



Rys.2.3. Graf zmian różniczkowych MRP, spowodowanych zmianą różniczkową dq_i współrzędnej naturalnej i-tego członu

Fig.2.3. Graph of differential displacements of MRP, caused differential changes dq_i of i-th link natural coordinate

$x_j y_j z_j$, spowodowanych zmianą dq_i. Jeśli pojawią się zmiany różniczkowe współrzędnych naturalnych $dq_1 \div dq_j$, wtedy zmiany dT_j będą sumą zmian różniczkowych

$$dT_j = T_j \Delta_{Tj} = \sum_{i=1}^{j} T_j \Delta_{i,Tj} = \sum_{i=1}^{j} T_{i-1} \Delta_{i,i-1} T_{j,i-1}, \tag{2.11a}$$

$$\Delta_{Tj} = \sum_{i=1}^{j} T_j^{-1} T_{i-1} \Delta_{i,i-1} T_{j,i-1} = \sum_{i=1}^{j} T_{j,i-1}^{-1} \Delta_{i,i-1} T_{j,i-1}. \tag{2.11b}$$

Δ_{Tj} jest macierzą przekształceń różniczkowych, względem układu współrzędnych $x_j y_j z_j$, spowodowanych zmianami różniczkowymi $dq_1 \div dq_j$. Macierz ta ma postać [41,51]

$$\Delta_{Tj} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{z,Tj} & \delta_{y,Tj} & \partial x_{Tj} \\ \delta_{z,Tj} & 0 & -\delta_{x,Tj} & \partial y_{Tj} \\ -\delta_{y,Tj} & \delta_{x,Tj} & 0 & \partial z_{Tj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

$\delta_{x,Tj} \div \delta_{z,Tj}$ są kątami obrotów różniczkowych, a $\partial x_{Tj} \div \partial z_{Tj}$ są przemieszczeniami różniczkowymi układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ względem jego osi. Macierz Δ_{Tj} można zatem opisać za pomocą wektorów

$$\vec{\partial}_{Tj} = \vec{i}_{Tj} \partial x_{Tj} + \vec{j}_{Tj} \partial y_{Tj} + \vec{k}_{Tj} \partial z_{Tj}, \tag{2.13}$$

$$\vec{\delta}_{Tj} = \vec{i}_{Tj} \delta_{x,Tj} + \vec{j}_{Tj} \delta_{y,Tj} + \vec{k}_{Tj} \delta_{z,Tj}. \tag{2.14}$$

$\vec{i}_{Tj}, \vec{j}_{Tj}, \vec{k}_{Tj}$ są wersorami układu współrzędnych $x_j y_j z_j$.

W ogólnym przypadku przemieszczenia i obroty różniczkowe układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ względem jego osi, spowodowane różniczkowymi przyrostami $dq_1 \div dq_j$, można przedstawić w postaci następujących sum:

$$\partial x_{Tj} = \sum_{i=1}^{j} \partial x_{i,Tj}, \quad \partial y_{Tj} = \sum_{i=1}^{j} \partial y_{i,Tj}, \quad \partial z_{Tj} = \sum_{i=1}^{j} \partial z_{i,Tj},$$

$$\delta_{x,Tj} = \sum_{i=1}^{j} \delta_{xi,Tj}, \quad \delta_{y,Tj} = \sum_{i=1}^{j} \delta_{yi,Tj}, \quad \delta_{z,Tj} = \sum_{i=1}^{j} \delta_{zi,Tj}.$$

$\partial x_{i,Tj} \div \partial z_{i,Tj}$ są przemieszczeniami różniczkowymi, a $\delta_{xi,Tj} \div \delta_{zi,Tj}$ są obrotami różniczkowymi układu współrzędnych $x_j y_j z_j$, spowodowanymi różniczkową zmianą dq_i i-tej współrzędnej naturalnej członu. Stosując formuły wyprowadzone w uzupełnieniu A, możemy powyższe przemieszczenia i obroty różniczkowe wyrazić poprzez wektory $\vec{\partial}_{i,i-1}$ i $\vec{\delta}_{i,i-1}$. Wektory te są odpowiednio: przemieszczeniem i obrotem różniczkowym układu współrzędnych $x_i y_i z_i$ względem układu $x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$.

$$\partial x_{i,Tj} = \vec{a}_i \cdot ((\vec{\delta}_{i,i-1} \times \vec{d}_i) + \vec{\partial}_{i,i-1}), \tag{2.15a}$$

$$\partial y_{i,Tj} = \vec{b}_i \cdot ((\vec{\delta}_{i,i-1} \times \vec{d}_i) + \vec{\partial}_{i,i-1}), \tag{2.15b}$$

$$\partial z_{i,Tj} = \vec{c}_i \cdot ((\vec{\delta}_{i,i-1} \times \vec{d}_i) + \vec{\partial}_{i,i-1}), \tag{2.15c}$$

$$\delta_{xi,Tj} = \vec{a}_i \cdot \vec{\delta}_{i,i-1}, \tag{2.15d}$$

$$\delta_{yi,Tj} = \vec{b}_i \cdot \vec{\delta}_{i,i-1}, \tag{2.15e}$$

$$\delta_{zi,Tj} = \vec{c}_i \cdot \vec{\delta}_{i,i-1}. \tag{2.15f}$$

Układy współrzędnych $x_i y_i z_i$ opisujące człony MRP skojarzone są zgodnie z zapisem Hartenberga-Denavita i dlatego w przypadku, gdy człony i-ty z i-1-szym łączy para obrotowa, to $\vec{\partial}_{i,i-1}=0$, $\vec{\delta}_{i,i-1}=\vec{k}_{i-1}dq_i$, gdy para przesuwna, to $\vec{\partial}_{i,i-1}=\vec{k}_{i-1}dq_i$, $\vec{\delta}_{i,i-1}=0$. $\vec{k}_{i-1}$ jest wersorem osi z_{i-1}.

Ogólnie możemy zapisać

$$\begin{bmatrix} \partial x_{Tj} \\ \partial y_{Tj} \\ \partial z_{Tj} \\ \delta_{x,Tj} \\ \delta_{y,Tj} \\ \delta_{z,Tj} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial(\partial x_{Tj})}{dq_1} & \cdots & \frac{\partial(\partial x_{Tj})}{dq_j} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial(\delta_{z,Tj})}{dq_1} & \cdots & \frac{\partial(\delta_{z,Tj})}{dq_j} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_j} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ dq_j \end{bmatrix} . \qquad (2.16)$$

Macierz $\mathbf{D}_j$ będziemy nazywać jakobianem j-tego członu. Dla j=N równanie (2.16) opisuje zmiany różniczkowe układu współrzędnych $x_N y_N z_N$, czyli członu roboczego. Zmiany różniczkowe układu współrzędnych $x_N y_N z_N$ implikują zmiany różniczkowe ruchu elementu wykonawczego opisane równaniem (2.17).

$$d\mathbf{X}=\mathbf{T}_N \Delta_{TN} \mathbf{E} \quad . \qquad (2.17)$$

Równania (2.16) i (2.17) są równaniami kinematyki w postaci różniczkowej.

2.4. ZADANIE PROSTE I ODWROTNE KINEMATYKI W POSTACI RÓŻNICZKOWEJ

Zadanie proste kinematyki w postaci różniczkowej polega na wyznaczeniu przyrostów różniczkowych współrzędnych zewnętrznych elementu wykonawczego MRP (opisujących macierz $\mathbf{X}$) dla znanych przyrostów różniczkowych współrzędnych wewnętrznych $dq_1 \div dq_N$. Z równań kinematyki (2.1) i formuł (2.15) wyznaczamy jakobian członu roboczego $\mathbf{D}_N$. Nastepnie z równania (2.16) wyznaczamy przyrosty różniczkowe układu współrzędnych $x_N y_N z_N$, tworzymy macierz przekształceń różniczkowych Δ_{TN} (opisaną formułą (2.12)) i obliczamy macierz $d\mathbf{X}$ z równania (2.17). Po zróżniczkowaniu formuł (2.8) i wykorzystaniu wyznaczonej już macierzy $d\mathbf{X}$ - wyznaczamy szukane różniczki współrzędnych zewnętrznych dx, dy, dz, $d\Phi$, $d\Theta$, $d\Psi$.

Zadanie odwrotne kinematyki w postaci różniczkowej polega na wyznaczaniu przyrostów różniczkowych współrzędnych wewnętrznych $dq_1 \div dq_N$ dla znanych przyrostów różniczkowych współrzędnych zewnętrznych elementu wykonawczego

(opisujących macierz dX_{zad} odpowiadającą zadanemu przyrostowi ruchu obiektu manipulacji). Po zróżniczkowaniu równania (2.7) i podstawieniu znanych różniczek dx, dy, dz, $d\Phi$, $d\Theta$ i $d\Psi$ otrzymamy macierz dX_{zad}. Z tego samego powodu co w punkcie 2.2.2 będziemy dalej korzystać z macierzy dT_N, a dokładniej, z elementów macierzy Δ_{TN}, którą otrzymamy z równania (2.17).

$$\Delta_{TN}=T_N^{-1}dX_{zad}E^{-1} \quad . \tag{2.18}$$

Elementy macierzy Δ_{TN} odpowiadające macierzy dX_{zad} muszą spełniać 6-N zróżniczkowanych równań więzów członu roboczego. W przeciwnym przypadku dX_{zad} nie będzie mogło być zrealizowane przez MRP o N < 6 stopniach swobody.

Po wyznaczeniu jakobianu członu roboczego D_N rozwiązujemy układ równań liniowych (2.16) dla szukanych $dq_1 \div dq_N$. Znany wektor kolumnowy z lewej strony równania (2.16) zawiera 6 następujących składowych: 3 składowe wektora przemieszczenia różniczkowego $\vec{\delta}_{TN}$ i 3 składowe wektora obrotu różniczkowego $\vec{\delta}_{TN}$. Dla MRP o N ≤ 6 stopniach swobody, N składowych jest niezależnych i 6-N składowych zależnych [51]. Składowe zależne można wyznaczyć z 6-N zróżniczkowanych równań więzów członu roboczego [51]. Zatem po odrzuceniu z równania macierzowego (2.16) 6-N wierszy odpowiadających składowym zależnym otrzymujemy układ N równań o N nieznanych $dq_1 \div dq_N$.

Realizację kinematyki zadanego przyrostu różniczkowego trajektorii dX_{zad} warunkuje spełnienie przez elementy macierzy $T_N^{-1}dX_{zad}E^{-1}$ N zróżniczkowanych równań więzów członu roboczego oraz warunków kinematycznych a÷d realizacji trajektorii zadanej wymienionych w punkcie 2.2.2.

Rozwiązania odwrotnych zadań kinematyki w postaci ciągłej i różniczkowej dla MRP produkcji krajowej przedstawiają prace [49÷51].

3. DYNAMIKA RUCHU MRP

Podstawowym zadaniem stawianym siłownikom [51] MRP jest wytwarzanie takich sił bądź momentów w parach kinematycznych, które zapewnią ruch obiektu manipulacji po zadanej trajektorii X_M, z zadaną kinematyką i dynamiką. W dalszych rozważaniach siły bądź momenty obrotowe wytwarzane przez siłowniki będziemy nazywać siłami napędowymi siłowników. Odpowiadające im siły działające na człony nazywać będziemy siłami napędowymi członów.

Przedstawimy formuły dla sił napędowych jako funkcji współrzędnych naturalnych członów q_i oraz ich pochodnych $\dot{q}_i$ i $\ddot{q}_i$.

Do wyznaczenia sił napędowych członów zastosujemy metody mechaniki analitycznej wykorzystujące:

a) równania Lagrange'a,

b) równania Newtona.

Metody te są równoważne [44,45]. Rozważymy tu MRP z:

a) siłownikami zamocowanymi poza parami członów,

b) siłownikami zamocowanymi w parach członów.

3.1. RÓWNANIA LAGRANGE'A

Siły reakcji członów wyznaczamy z równań Lagrange'a [6,44,45]:

$$F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} . \tag{3.1}$$

F_i są momentami obrotowymi (dla par obrotowych) lub siłami (dla par przesuwnych), skierowanymi wzdłuż osi z_{i-1}. W uzupełnieniu B wyznaczono formuły dla F_i.

$$F_i = \sum_{j=1}^{N} D_{ij}\,\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} D_{ijk}\,\dot{q}_j\dot{q}_k + D_i . \tag{3.2}$$

gdzie:

$$D_{ij} = \sum_{p=\max(i,j)}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i}\,\mathbf{J}_p\,\frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j}\right) + \sum_{p=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i}\,\mathbf{J}_{sp}\,\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j}\right) . \tag{3.3}$$

$$D_{ijk} = \sum_{p=\max(i,j,k)}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_j \partial q_k} \mathbb{J}_p \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_i}\right) +$$

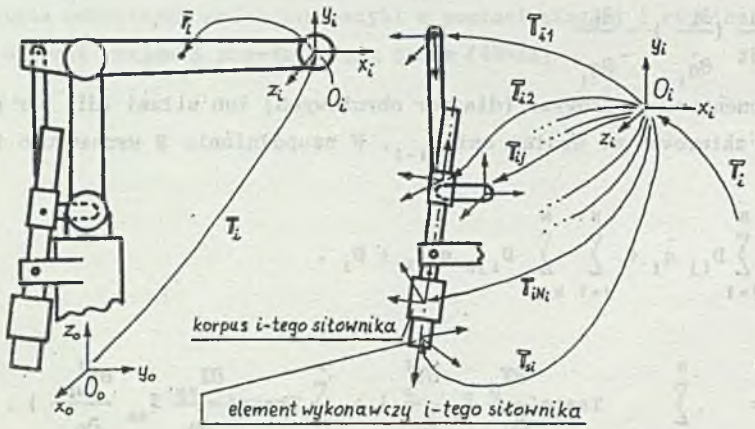
$$+ \sum_{p=i}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j} \mathbf{T}_p^T\right) +$$

$$+ \sum_{p=j}^{N} \left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \mathbf{T}_p^T\right) + \right.$$

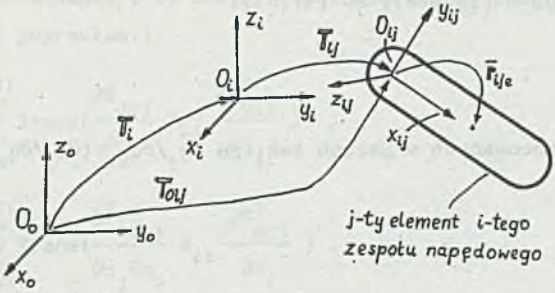
$$\left. - \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_p^T\right) \right], \tag{3.4}$$

$$D_i = -\sum_{p=i}^{N} m_p \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \bar{\mathbf{r}}_p . \tag{3.5}$$

Macierze $\mathbf{T}_p$ i $\mathbf{T}_{sp}$ opisujące wzajemne położenie i orientację układów współrzędnych, skojarzonych z członami i siłownikami oraz postacie jednorodne $\bar{\mathbf{r}}_p$ wektorów opisujących środki ciężkości członów MRP ilustrują rysunki 3.1 i 3.2.



Rys.3.1. Zespół napędowy i-tego członu MRP
Fig.3.1. Driving unit of MRP i-th link



Rys.3.2. Opis i-tego członu i siłownika
Fig.3.2. Description of the i-th link and i-th actuator

Formuły (3.3÷3.5) upraszczają się dla siłowników zamocowanych w parach kinematycznych tak, że $\partial T_{sp}/\partial q_k=(\partial T_{sp}/\partial q_k)\delta_{pk}$. Wtedy współczynniki D_{ij} i D_{ijk} mają następujące postacie:

$$D_{ij}=\sum_{p=\max(i,j)}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial T_p}{\partial q_i}\,\mathbb{J}_p\,\frac{\partial T_p^T}{\partial q_j}\right)+\delta_{ij}\,\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial T_{si}}{\partial q_i}\,\mathbb{J}_{si}\,\frac{\partial T_{si}^T}{\partial q_i}\right) \tag{3.6}$$

$$D_{ijk}=\sum_{p=\max(i,j,k)}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 T_p}{\partial q_j\partial q_k}\,\mathbb{J}_p\,\frac{\partial T_p^T}{\partial q_i}\right)$$

$$+\,\delta_{jk}\,\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial T_j}{\partial q_i}\,\frac{\partial T_{sj}}{\partial q_j}\,\mathbb{J}_{sj}\,\frac{\partial T_{sj}^T}{\partial q_j}\,T_j^T\right), \tag{3.7}$$

gdzie: δ_{ij}, δ_{jk} - delty Kroneckera [6].Współczynniki D_i nadal opisuje formuła (3.5). Drugi składnik sumy w formule (3.6), mnożony przez δ_{ij}, jest stały dla danego siłownika i niezależny od współrzędnych naturalnych [41].

Współczynniki D_{ij} reprezentują oddziaływanie sił bezwładności j-tego członu na i-ty człon. Współczynniki D_{ijk} reprezentują oddziaływanie sił Coriolisa [44], wynikających z ruchu względnego między j-tym i k-tym członem oraz sił odśrodkowych (dla j=k) na i-ty człon. Współczynniki D_i reprezentują oddziaływanie sił grawitacji na i-ty człon.

Siłom reakcji członów F_i odpowiadają siły reakcji siłowników F_{si}. Jeśli przez q_{si} oznaczymy współrzędną naturalną siłownika, która opisuje zmiany układu współrzędnych $x_{si}y_{si}z_{si}$ (skojarzonego z elementem wykonawczym siłownika) względem układu współrzędnych $x_{Ni}y_{Ni}z_{Ni}$ (skojarzonego z korpusem si-

łownika - patrz uzup.B rys.B.1), to [47,51]:

$$F_{si} = \sum_{j=1}^{N} F_j \frac{\partial q_j}{\partial q_{si}} \quad . \tag{3.8}$$

Dla siłowników zamocowanych w parach tak, że $\partial q_j/\partial q_{si} = (\partial q_j/\partial q_{si})\delta_{ij}$

$$F_{si} = F_i \frac{\partial q_i}{\partial q_{si}} \quad . \tag{3.9}$$

$\partial q_{si}/\partial q_j$ odpowiadają przełożeniom przekładni, które mają duże wartości. Z formuły (3.8) wynika, że siły F_{si} są odwrotnie proporcjonalne do $\partial q_{si}/\partial q_j$ i wprost proporcjonalne do sił F_j. W formule (3.2) opisującej F_j występują wyrazy z $\mathbb{J}_i$ - reprezentujące siły wynikające z ruchu członów oraz wyrazy z $\mathbb{J}_{si}$ - reprezentujące siły wynikające z ruchu elementów wykonawczych siłowników. Wyrazy z $\mathbb{J}_{si}$ zawierają pochodne $\partial T_{si}/\partial q_j$ proporcjonalne do przełożeń przekładni. Zatem przy wzrastającym przełożeniu oddziaływanie sił od ruchu członów i grawitacji na siłę F_{si} maleje. W miarę wzrostu przełożenia przekładni oddziaływanie sił od ruchu elementów wykonawczych siłowników na siłę F_{si} może być niezależne od przełożenia (dla wyrazów z $\mathbb{J}_{si}$, które mają tylko jedną pochodną $\partial T_{si}/\partial q_j$) bądź wzrastać (dla wyrazów z $\mathbb{J}_{si}$, które mają dwie pochodne $\partial T_{si}/\partial q_j$).

Rozważania te dzięki dużym przełożeniom przekładni w MRP potwierdzają słuszność naszych uproszczeń formuły (B.1) w uzupełnieniu B. Duże wartości przełożeń przekładni minimalizują wpływ sił bezwładności ruchu członów wraz z obiektem manipulacji na obciążenie siłowników. Przy dużych wartościach przełożeń dominujące znaczenie we współczynnikach D_{ij} i D_{ijk} (opisanych formułami (3.3)-(3.7)) mają wyrazy z $\mathbb{J}_{si}$.

W podręczniku [41] Paul R. wyznaczył równania sił F_i dla przypadku, kiedy wszystkie siłowniki są zamocowane w parach łączących odpowiednie człony. Jednak w formule opisującej współczynniki D_{ijk} pominięto wyraz z $\mathbb{J}_{si}$, co jest błędem w świetle naszych rozważań. W tym samym podręczniku na stronie 180 w tablicach 6.5 i 6.6 przytoczono momenty bezwładności dla robota Stanford. Z tabeli 6.6 wynika, że w większości stopni swobody momenty bezwładności elementów wykonawczych siłowników są o rząd większe od momentów bezwładności członów. Dla czwartego stopnia moment bezwładności elementu wykonawczego siłownika jest nawet 100 razy większy niż moment bezwładności czwartego członu. Z [51] wynika, że uproszczenie to może prowadzić do 1000% błędów sił F_{si}. Te same błędy popełniono w podręcznikach [8] i [42].

Jeśli chcemy uwzględnić dynamiczne oddziaływanie elementów zespołów

przekazujących napędy, to musimy współczynniki D_{ij}, D_{ijk} i D_i uzupełnić następującymi poprawkami:

$$\Delta D_{ij} = \sum_{l=1}^{Nl} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial T_{0il}}{\partial q_i} J_{il} \frac{\partial T_{0il}^T}{\partial q_j}\right) , \tag{3.10a}$$

$$\Delta D_{ijk} = \sum_{l=1}^{Nl} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 T_{0il}}{\partial q_j \partial q_k} J_{il} \frac{\partial T_{0il}^T}{\partial q_i}\right) , \tag{3.10b}$$

$$\Delta D_i = -\sum_{l=1}^{Nl} g^T \frac{\partial T_{0il}}{\partial q_i} m_{il} \bar{r}_{ile} . \tag{3.10c}$$

Macierz T_{0il} opisuje układ współrzędnych skojarzony z l-tym elementem zespołu napędowego i-tego członu względem układu współrzędnych bazowego (patrz rys.B.2 w uzupełnieniu B).

Zmiany współczynników równań dynamiki (3.2) powoduje także uchwycenie obiektu manipulacji. Powoduje to zmianę macierzy pseudobezwładności członu roboczego o ΔJ_N [51]. Implikuje to następujące zmiany współczynników równań sił [51]:

$$\Delta D_{ij} = \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial T_N}{\partial q_i} \Delta J_N \frac{\partial T_N^T}{\partial q_j}\right) , \tag{3.11a}$$

$$\Delta D_{ijk} = \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 T_N}{\partial q_j \partial q_k} \Delta J_N \frac{\partial T_N^T}{\partial q_i}\right) , \tag{3.11b}$$

$$\Delta D_i = -m_P g^T \frac{\partial T_N}{\partial q_i} \bar{r}_P . \tag{3.11c}$$

m_P i $\bar{r}_P$ są odpowiednio masą i postacią jednorodną wektora opisującego środek ciężkości obiektu manipulacji względem układu współrzędnych $x_N y_N z_N$.

W dotychczasowych rozważaniach pominęliśmy tarcie. Opis analityczny energii rozproszonej na pokonanie tarcia jest trudny. Oddziaływanie sił tarcia suchego sprowadzimy więc na elementy wykonawcze siłowników MRP. Wypadkowa siła napędowa i-tego siłownika F_{siw} jest różnicą wytwarzanej przez niego siły napędowej F_{sin} i siły tarcia suchego

$$F_{siw}=\begin{cases} 0 & \text{dla } \dot{q}_{si}=0 \text{ i } |F_{sin}| \le F_{sits}, \\ F_{sin}-F_{sits}\,\mathrm{sgn}(F_{sin}) & \text{dla } \dot{q}_{si}=0 \text{ i } |F_{sin}| > F_{sits}, \\ F_{sin}-F_{sitr}\,\mathrm{sgn}(\dot{q}_{si}) & \text{dla } \dot{q}_{si}\neq 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

F_{sits} i F_{sitr} są odpowiednio tarciem suchym startowym i tarciem suchym ruchowym i-tego siłownika. Parametry te można oszacować eksperymentalnie [41, 51]. W przypadku gdy $\dot{q}_{si}=0$, start ruchu ($\dot{q}_{si}\neq 0$) zależy od relacji między siłą napędową F_{sin} i siłą tarcia startowego F_{sits}. Siły F_{siw} są równe siłom reakcji F_{si} opisanym formułami (3.8). Oprócz już uwzględnionych sił tarcia suchego w MRP występuje tarcie lepkie. Straty energii spowodowane tym tarciem występują przede wszystkim przy współpracy elementów poruszających się z dużymi szybkościami względnymi, np. w przekładniach falowych. Ten rodzaj tarcia sprowadzimy także na elementy wykonawcze siłowników. Zatem wypadkowa F_{siw} opisana formułą (3.13) jest równa F_{siw} opisanej formułą (3.12) zmniejszonej o siłę tarcia lepkiego.

$$F_{siw}=F_{siw}-k_{vsi}\dot{q}_{si}. \tag{3.13}$$

k_{vsi} jest współczynnikiem tarcia lepkiego przekładni.

W dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy milcząco, że układ bazowy $x_0y_0z_0$ skojarzony z podstawą MRP jest nieruchomy, a ściślej - inercjalny [18] lub galileuszowy [12]. Tylko w takim układzie współrzędnych słuszne są formuły opisujące potencjał kinetyczny L. Dla MRP z ruchomą podstawą dynamikę jego ruchu musimy opisać względem innego inercjalnego (lub galileuszowego) układu odniesienia. Jeśli układ bazowy można opisać względem inercjalnego układu odniesienia za pomocą jednej współrzędnej q_0, wtedy tworzymy dodatkową macierz $\mathbf{T}_0=\mathbf{A}_0$, wyznaczamy $\mathbf{T}_{s0}$ i $\mathbf{J}_{s0}$ siłownika napędzającego podstawę, modyfikujemy kinematykę MRP ($\mathbf{T}_i=\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1\ldots\mathbf{A}_i$) i możemy stosować dotychczasowe formuły. W podobny sposób modyfikujemy macierze $\mathbf{T}_{0i1}$ w formułach (3.10a+c). Oczywiście wskaźniki sumowania będą się zmieniać od zera, a nie od jedynki.

3.2. RÓWNANIA NEWTONA

Stosując prawo zmienności pędu i prawo zmienności krętu [44,45], wynikające z praw Newtona, wyznaczymy w tym punkcie siły i momenty reakcji oddziałujące na dowolny element składowy MRP. Wyznaczymy tu także równania wiążące te reakcje ze współrzędnymi naturalnymi oraz ich pierwszymi i dru-

gimi pochodnymi po czasie. Przyjmiemy, że układ bazowy $x_0y_0z_0$ jest inercjalny.

Równaniami tymi należy opisać wszystkie elementy MRP, tzn. części składowe elementu wykonawczego MRP, elementy wykonawcze siłowników, człony i elementy zespołów napędowych. Sposób tworzenia równań dynamiki pokażemy dla i-tego członu.

Ruch i-tego członu opisują: wektor jego prędkości kątowej $\vec{\omega}_{0i}$ oraz wektor prędkości postępowej $\vec{v}_{0i}$ początku układu współrzędnych $x_iy_iz_i$, związanego z tym członem. Wektory te wyrazimy poprzez wersory układu współrzędnych $x_iy_iz_i$.

$$\vec{v}_{0i} = \vec{i}_{Ti}v_{0ix} + \vec{j}_{Ti}v_{0iy} + \vec{k}_{Ti}v_{0iz} , \tag{3.14a}$$

$$\vec{\omega}_{0i} = \vec{i}_{Ti}\dot{\delta}_{x,Ti} + \vec{j}_{Ti}\dot{\delta}_{y,Ti} + \vec{k}_{Ti}\dot{\delta}_{z,Ti} , \tag{3.14b}$$

$$v_{0ix} = \frac{d(\partial x_{Ti})}{dt} , \text{ podobnie dla } v_{0iy} \text{ oraz } v_{0iz}.$$

Składowe tych wektorów możemy wyrazić poprzez pochodne współrzędnych naturalnych członów za pomocą równania (2.16)

$$\begin{bmatrix} v_{0ix} \\ v_{0iy} \\ v_{0iz} \\ \dot{\delta}_{x,Ti} \\ \dot{\delta}_{y,Ti} \\ \dot{\delta}_{z,Ti} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_i \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} . \tag{3.15}$$

Pochodne współrzędnych naturalnych członów z pochodnymi współrzędnych naturalnych siłownikow wiąże następująca formuła:

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial q_i}{\partial q_{sj}} \dot{q}_{sj} . \tag{3.16}$$

Wektory pędu członu $\vec{p}_i$ i krętu $\vec{K}_i$ względem punktu O_i możemy wyrazić za pomocą następujących formuł wyprowadzonych w uzupełnieniu C:

$$\vec{p}_i = m_i(\vec{v}_{0i} + \vec{\omega}_{0i} \times \vec{r}_{Si}) , \tag{3.17}$$

$$\vec{K}_i = m_i \vec{r}_{Si} \times \vec{v}_{0i} + \mathbf{I}_i \underline{\omega}_{0i} . \tag{3.18}$$

m_i jest masą i-tego członu, $\vec{r}_{Si}$- wektorem opisującym środek masy i-tego członu w układzie $x_iy_iz_i$, $\mathbf{I}_i$- macierz tensora bezwładności, $\underline{\omega}_{0i}$- macierzą

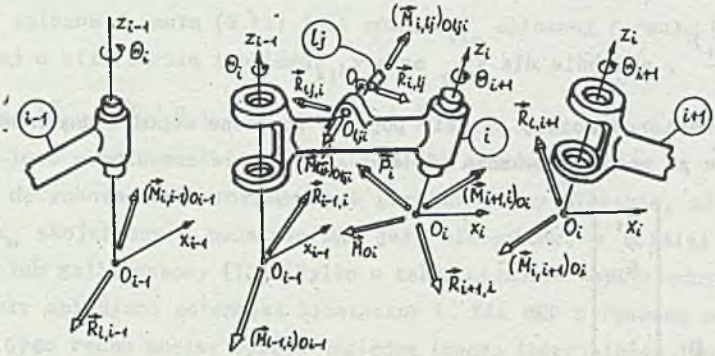
wektora $\vec{\omega}_{0i}$ zdefiniowaną w uzupełnieniu C.

Z praw zmienności pędu i krętu [3,40,44,45] wynika

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \overset{\vee}{\frac{d\vec{p}_i}{dt}} + \vec{\omega}_{0i} \times \vec{p}_i = \vec{P}_i \,, \tag{3.19}$$

$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \overset{\vee}{\frac{d\vec{K}_i}{dt}} + \vec{\omega}_{0i} \times \vec{K}_i = \vec{M}_{0i} \,. \tag{3.20}$$

Odwróconym daszkiem zaznaczono różniczkowanie względem ruchomego układu współrzędnych $x_i y_i z_i$ [44]. $\vec{P}_i$ jest sumaryczną siłą zewnętrzną działającą na i-ty człon. $\vec{M}_{0i}$ jest sumarycznym momentem zewnętrznym względem początku O_i układu współrzędnych $x_i y_i z_i$ działającym na i-ty człon.



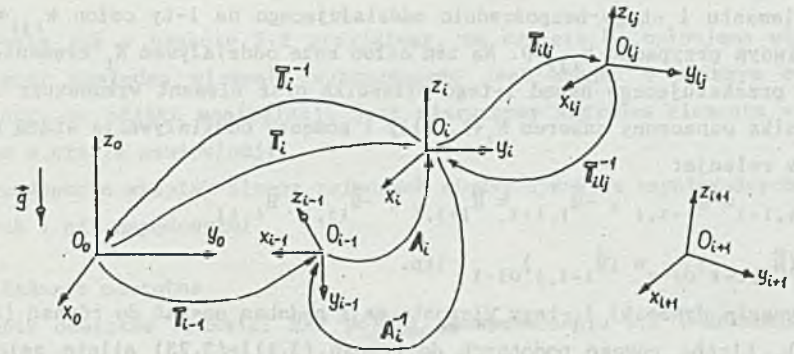
Rys.3.3. Schemat rozkładu sił i momentów działających na i-ty człon
Fig.3.3. Diagram of resolve forces and torques acting on the i-th link

Rys.3.3 ilustruje rozkład sił i momentów działających na i-ty człon. Przyjęto następujące oznaczenia $\vec{R}_{i-1,i}$ - siła oddziaływania i-1-szego członu na i-ty człon, $(\vec{M}_{i-1,i})_{Oi-1}$ - moment oddziaływania i-1-szego członu na i-ty człon względem punktu O_{i-1}, $(\vec{M}_{i,i-1})_{Oi-1}$ - moment oddziaływania i-tego członu na i-1-szy człon względem punktu O_{i-1}, $\vec{R}_{i,i-1}$ siła oddziaływania i-tego członu na i-1-szy człon, $\vec{R}_{l_j,i}$ - siła oddziaływania l_j-tego elementu na i-ty człon, $\vec{R}_{i,l_j}$ - siła oddziaływania i-tego członu na l_j-ty element, $(\vec{M}_{l_j,i})_{Olji}$ - moment oddziaływania l_j-tego elementu na i-ty człon względem punktu O_{lji}, $\vec{R}_{i+1,i}$ - siła oddziaływania i+1-szego członu na i-ty człon, $\vec{R}_{i,i+1}$ - siła oddziaływania i-tego członu na i+1-szy człon, $(\vec{M}_{i+1,i})_{Oi}$ - moment oddziaływania i+1-szego członu na i-ty człon względem punktu O_i i $(\vec{M}_{i,i+1})_{Oi}$ - moment oddziaływania i-tego członu na i+1-szy człon wzgledem punktu O_i.

Wektor $\vec{r}_{ljl}$ opisujący punkt O_{ljl} oraz $\vec{R}_{i+1,i}$, $(\vec{M}_{i+1,i})_{Oi}$, $\vec{R}_{i,i+1}$, $(\vec{M}_{i,i+1})_{Oi}$ są wyrażone za pomocą składowych układu $x_i y_i z_i$.

$\vec{R}_{i-1,i}$, $\vec{R}_{i,i-1}$, $(\vec{M}_{i,i-1})_{Oi-1}$, $(\vec{M}_{i-1,i})_{Oi-1}$ i wektor $\vec{r}_{Oi}$ opisujący punkt O_i względem układu $x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ wyrażone są przez składowe tego układu współrzędnych.

$\vec{R}_{lj,i}$, $\vec{R}_{i,lj}$ i $(\vec{M}_{lj,i})_{Oljl}$ wyrażone są przez składowe układu $x_{lj}y_{lj}z_{lj}$. Układ współrzędnych $x_{lj}y_{lj}z_{lj}$, skojarzony z l_j-tym elementem, opisuje względem układu $x_i y_i z_i$ macierz T_{ilj} (patrz rys.3.4).



Rys.3.4. Opis układów współrzędnych skojarzonych z elementami oddziałującymi bezpośrednio na i-ty człon
Fig.3.4. Description of coordinate systems associated with elements acting direct on i-th link

Dla l=i $T_{ilj}=T_{iij}\equiv T_{ij}$, macierz ta opisuje układ współrzędnych skojarzony z j-tym elementem zespołu napędowego i-tego członu (patrz rys.3.2). Wektor grawitacji $\vec{g}$ opisany jest przez składowe układu bazowego. Przy tak opisanych wektorach sumaryczną siłę zewnętrzną działającą na i-ty człon opisuje zależność:

$$\vec{P}_i = A_i^{-1}R_{i-1,i} + m_i T_i^{-1} g + \vec{R}_{i+1,i} + \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{Nl+1} k_{ljl} T_{ilj}^{-1} R_{lj,i} \quad . \tag{3.21}$$

Sumaryczny moment zewnętrzny działający na i-ty człon opisuje zależność:

$$\vec{M}_{Oi} = (A_i^{-1} r_{Oi}) \times (A_i^{-1} R_{i-1,i}) + A_i^{-1} (M_{i-1,i})_{Oi-1} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{Nl+1} k_{ljl} \left[\vec{r}_{ljl} \times (T_{ilj}^{-1} R_{lj,i}) + T_{ilj}^{-1} (M_{lj,i})_{Oljl} \right] +$$

$$+m_i \vec{r}_{Si} \times (T_i^{-1} g) + (\vec{M}_{i+1,i})_{0i} \quad . \tag{3.22}$$

We wzorach (3.21) i (3.22) zastosowano macierze $R_{i-1,i}$, g, $R_{lj,i}$, r_{0i}, $M_{i-1,i}$, $M_{lj,i}$ odpowiednich wektorów. Macierze te są jednokolumnowe, czterowierszowe. Pierwsze trzy wiersze to składowe danego wektora, a czwartym wierszem jest zero. Po przemnożeniu odpowiednich macierzy przekształceń i tych macierzy wektorowych pomijamy czwarty wiersz i otrzymujemy wynik w postaci macierzy jednokolumnowej, trzywierszowej. W dalszych operacjach macierz tę traktujemy jako wektor o składowych równych jej kolejnym wierszom. Dla elementu l_j-tego bezpośrednio oddziałującego na i-ty człon $k_{ljl}=1$, w przeciwnym przypadku $k_{ljl}=0$. Na ten człon może oddziaływać N_l elementów zespołu przekazującego napęd l-tego siłownika oraz element wykonawczy l-tego siłownika oznaczony numerem N_l+1. Siły i momenty oddziaływania wiążą następujące relacje:

$$-\vec{R}_{i,i-1} = \vec{R}_{i-1,i} \ , \ -\vec{R}_{i,i+1} = \vec{R}_{i+1,i} \ , \ -\vec{R}_{lj,i} = \vec{R}_{i,lj}$$

$$-(\vec{M}_{i,i-1})_{0i-1} = (\vec{M}_{i-1,i})_{0i-1} \quad \text{itp.} \tag{3.23}$$

Równania dynamiki l_j-tego elementu mają podobną postać do równań (3.19)÷(3.23). Liczba równań podobnych do równań (3.21)÷(3.23) silnie zależy od struktury kinematycznej MRP i jest równa liczbie sił i momentów wzajemnego oddziaływania. Uwzględniając tarcie modyfikujemy równania (3.23) następująco:

$$-\vec{R}_{i,i-1} - \vec{T}_{i-1,i}(\vec{R}_{i,i-1}) = \vec{R}_{i-1,i} \ ,$$

$$-(\vec{M}_{i,i-1})_{0i-1} - (\vec{M}_{Ti-1,i}((\vec{M}_{i,i-1})_{0i-1}))_{0i-1} = (\vec{M}_{i-1,i})_{0i-1} \quad \text{itp.} \tag{3.24}$$

$\vec{T}_{i-1,i}$ i $\vec{M}_{Ti-1,i}$ są wektorami siły i momentu tarcia oddziałującymi na i-ty człon. Opory tarcia spowodowane są tarciem suchym i lepkim. Można je opisać formułami podobnymi do (3.12) i (3.13). Jeśli para łącząca człony i-1-szy z i-tym jest obrotowa, wtedy składowa momentu $(\vec{M}_{i-1,i})_z$ skierowana wzdłuż osi pary jest równa reakcji F_i (opisanej formułami (3.2)÷(3.7)). Dla pary przesuwnej składowa reakcji $\vec{R}_{i-1,i,z}$ skierowana wzdłuż osi przesuwu jest równa też reakcji F_i (opisanej formułami (3.2)÷(3.7)). Siły lub momenty napędowe F_{sin} są tymi samymi składowymi sił lub momentów reakcji w parze łączącej elementy wykonawcze siłowników z ich korpusami. Siły te są równe siłom napędowym F_{sin} pomniejszonym o opory ruchu (formuły (3.12)÷(3.13)).

Jeśli układ bazowy $x_0y_0z_0$ jest ruchomy, to musimy wektory pędu i krętu elementów MRP wyznaczać w nieruchomym inercjalnym układzie odniesienia.

W pracy [29] i [40] przedstawiono uproszczone równania dynamiki MRP. Uw-

zględniono tylko oddziaływanie sąsiednich członów pomijając oddziaływanie elementów przekazujących napęd na dany człon. Przypomnijmy, że zespoły takie występują w MRP z siłownikami umieszczonymi poza osiami par kinematycznych członów (MRP IRb-6 i IRb-60). W pracach tych pominięto także oddziaływanie sił grawitacji. Tak uproszczone równania mogą być przydatne dla MRP z siłownikami umocowanymi w parach kinematycznych członów, tam gdzie brak grawitacji.

3.3. ZADANIE ODWROTNE I PROSTE DYNAMIKI

Podobnie jak w punkcie 2.2 przyjmiemy, że macierz E_μ opisująca obiekt manipulacji względem elementu wykonawczego jest znana. W dalszym ciągu przyjmiemy, że obiekt manipulacji jest nieruchomy względem elementu wykonawczego w czasie manipulacji.

W tym punkcie skupimy się na relacjach między dynamiką współrzędnych naturalnych i sił napędowych.

3.3.1. Zadanie odwrotne

Zadanie odwrotne dynamiki MRP polega na wyznaczeniu sił i momentów, z jakimi oddziałują na siebie elementy dla znanych przebiegów czasowych współrzędnych naturalnych siłowników. Zadanie odwrotne dynamiki napędów MRP to zadanie odwrotne dynamiki MRP dotyczące tylko sił napędowych siłowników F_{sin}.

Współrzędne naturalne siłowników i członów wiążą następujące formuły [51]:

$$q_{si} = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots q_N) \quad , \tag{3.25a}$$

$$q_i = \psi_i(q_{s1}, \ldots q_{sN}) \quad . \tag{3.25b}$$

Stosując formułę (3.25b), wyznaczamy przebiegi czasowe współrzędnych naturalnych członów i ich pierwsze i drugie pochodne po czasie.

Zadanie odwrotne dynamiki napędów MRP rozwiązujemy stosując formuły (3.2)÷(3.8). Zadanie odwrotne dynamiki MRP rozwiązujemy stosując formuły (3.19)÷ (3.23), opisujące jego elementy. Najpierw obliczamy wektory pędów i krętów w układach współrzędnych skojarzonych z poszczególnymi elementami MRP, a następnie obliczamy ich pochodne i rozwiązujemy układ równań sił i momentów. Jeśli chcemy uwzględnić tarcie, to musimy stosować formuły (3.12), (3.13) i (3.24).

3.3.2. Zadanie proste

Zadanie proste dynamiki MRP polega na wyznaczaniu przebiegów czasowych współrzędnych naturalnych siłowników dla znanych przebiegów czasowych sił i momentów, z jakimi oddziałują na siebie elementy. Zadanie proste dynamiki napędów MRP to zadanie proste dynamiki tylko dla sił napędowych siłowników F_{sin}.

Zadanie proste dynamiki napędów MRP rozwiązujemy następująco:

a) wyznaczamy siły napędowe członów z formuły

$$F_{in} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial q_{si}}{\partial q_j} F_{siw} \quad ; \tag{3.26}$$

b) dla zadanych wartości początkowych współrzędnych naturalnych i ich pierwszych pochodnych wyznaczamy z równań (3.2) przebiegi czasowe współrzędnych naturalnych członów;

c) wyznaczamy współrzędne naturalne siłowników stosując formułę (3.25a).

Układ równań (3.2) przekształcamy do postaci

$$\sum_{j=1}^{N} D_{ij}\ddot{q}_j = C_i \quad , \tag{3.27a}$$

$$C_i = F_{in} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} D_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k - D_i \quad ,i=1,2...N \ . \tag{3.27b}$$

Dla znanych współrzędnych naturalnych i ich pierwszych pochodnych w chwili początkowej możemy wyznaczyć współczynniki D_{ijk} i D_i występujące w równaniach (3.27b), a następnie współczynniki D_{ij} i C_i występujące w układzie równań (3.27a). Rozwiązując układ równań (3.27a) ze względu na drugie pochodne współrzędnych naturalnych członów, otrzymujemy:

$$\ddot{q}_j = \ddot{q}_j(q_1,..,q_N,\dot{q}_1,..,\dot{q}_N,F_{1n},..,F_{Nn}) \quad ,j=1,....N \ , \tag{3.28}$$

Po dyskretyzacji układu równań (3.27a) możemy wyznaczyć współrzędne naturalne i ich pierwsze pochodne po czasie w następnym kroku dyskretyzacji, stosując formuły

$$\Delta q_j = \dot{q}_j \Delta t \ , \ \Delta\dot{q}_j = \ddot{q}_j \Delta t \ . \tag{3.29}$$

Δt jest krokiem dyskretyzacji czasu.

Zadanie proste dynamiki MRP rozwiązujemy następująco:

a) dla zadanych sił napędowych F_{sin} i wartości początkowych współrzędnych naturalnych siłowników i ich pierwszych pochodnych po czasie

wyznaczamy z równań kinematyki i (3.21)÷(3.22) sumaryczne zewnętrzne siły $\vec{P}_i$ i momenty $\vec{M}_{0i}$;

b) całkując po czasie $\vec{P}_i$ i $\vec{M}_{0i}$ otrzymujemy wektory pędu $\vec{p}_i$ i krętu $\vec{K}_i$ członów;

c) wyznaczamy wektory prędkości $\vec{v}_{0i}$ i $\vec{\omega}_{0i}$ z formuł (3.17) i (3.18);

d) wyznaczamy pochodne współrzędnych naturalnych członów z formuły (3.15);

e) wyznaczamy pochodne współrzędnych naturalnych siłowników z formuły

$$\dot{q}_{si} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial q_{si}}{\partial q_j} \dot{q}_j \; ; \tag{3.30}$$

f) wyznaczamy współrzędne naturalne siłowników.

Dla znanych sił napędowych F_{sin}, współrzędnych naturalnych członów i ich pierwszych pochodnych w chwili początkowej t_0 możemy wyznaczyć: prędkości $\vec{v}_{0i}$ i $\vec{\omega}_{0i}$, odpowiadające im wektory pędów $\vec{p}_i$ i krętów $\vec{K}_i$ oraz siły $\vec{P}_i$ i momenty $\vec{M}_{0i}$ występujące w równaniach (3.21)÷(3.22). Po dyskretyzacji tych równań możemy wyznaczyć wektory pędu i krętu w następnym kroku dyskretyzacji, stosując formuły

$$\Delta\vec{p}_i = \vec{P}_i \Delta t \quad , \quad \Delta\vec{K}_i = \vec{M}_{0i} \Delta t \quad . \tag{3.31}$$

Następnie wyznaczamy wektory $\vec{v}_{0i}$ i $\vec{\omega}_{0i}$ odpowiadające pędowi $\vec{p}_i + \vec{P}_i \Delta t$ i krętowi $\vec{K}_i + \vec{M}_{0i} \Delta t$. Stosując formułę (3.15) wyznaczamy pochodne współrzędnych naturalnych członów, a następnie siłowników w chwili $t_0 + \Delta t$.

Uwzględnienie sił tarcia w postaciach opisanych przez formuły (3.12) i (3.24) czyni rozwiązania zadań prostych dynamiki MRP i dynamiki ich napędów rozwiązaniami niejednoznacznymi.

W rozważaniach tego rozdziału nie uwzględnialiśmy oddziaływania otoczenia na obiekt manipulacji, np. przedmiotu obrabianego na tarczę szlifierską, która jest obiektem manipulacji. Znane siły oddziaływania otoczenia należy zdekomponować na poszczególne stopnie swobody i dodać je do odpowiednich reakcji.

W zakończeniu punktu 2.2.2 sformułowaliśmy warunki kinematyczne realizacji trajektorii zadanej, które muszą być spełnione w każdym jej punkcie. Warunki te dotyczą tylko jej kinematyki. Oprócz kinematyki trajektoria zadana ma na ogół także dynamikę zadaną, opisaną zależnością elementów macierzy X_{zad} od czasu. Macierz ta odpowiada macierzy X_{Mzad} opisującej trajektorię obiektu manipulacji. Po rozwiązaniu zadania odwrotnego kinematyki otrzymujemy przebiegi współrzędnych naturalnych siłowników. Z przebiegów

tych możemy wyznaczyć także zadane prędkości i przyśpieszenia współrzędnych naturalnych siłowników. Każdy siłownik ma zakres prędkości swej współrzędnej naturalnej, możliwy do osiągniecia. Innym ważnym parametrem dynamicznym siłownika jest jego zakres siły napędowej, którą może wytwarzać. Dla konkretnej struktury kinematycznej MRP możemy oszacować zakresy możliwych do osiągnięcia przyśpieszeń współrzędnych naturalnych siłowników. Dla realizacji zadanej dynamiki trajektorii obiektu manipulacji muszą być spełnione warunki dynamiczne realizacji trajektorii zadanej [51]. Przyjmując, że obiekt manipulacji w czasie ruchu po trajektorii zadanej nie porusza się względem elementu wykonawczego w sposób niepożądany (spowodowany np. niewystarczającą siłą obejmowania palców chwytaka), warunki te są następujące:

a) zadane prędkości współrzędnych naturalnych siłowników są z zakresów możliwych do osiągnięcia;

b) zadane przyśpieszenia współrzędnych naturalnych siłowników są z zakresów możliwych do osiągnięcia;

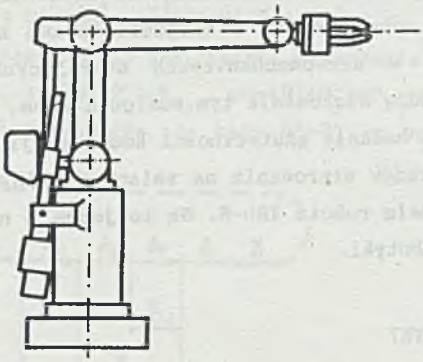
c) zadanym prędkościom i przyśpieszeniom współrzędnych naturalnych siłowników odpowiadają siły napędowe F_{sin} z zakresów możliwych do osiągnięcia.

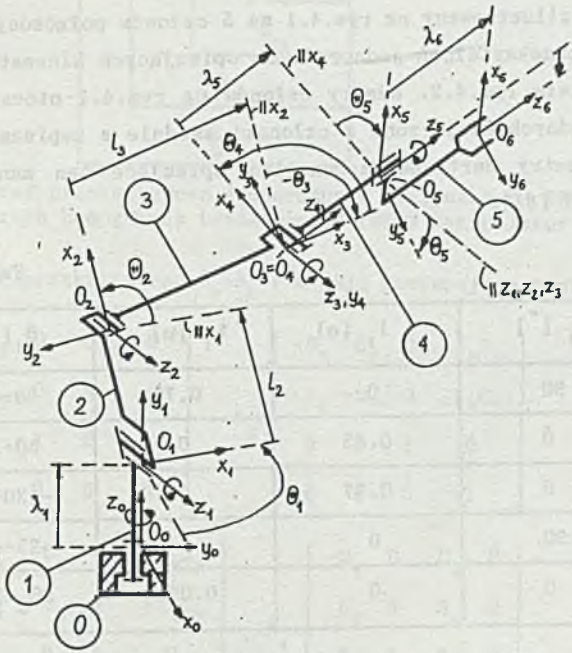
Warunki a) i b) są konieczne, a warunek c) konieczny i wystarczający do realizacji zadanej dynamiki trajektorii [51].

Jednoczesne spełnienie wszystkich warunków kinematycznych i dynamicznych realizacji trajektorii zadanej jest ogólnym warunkiem jej realizacji [51].

4.MODELE MATEMATYCZNE RUCHU NA PRZYKŁADZIE MRP IRb-6

Rozdział ten i następne ilustrują wykorzystanie niektórych fragmentów





Rys.4.1. Manipulator robota IRb-6
Fig.4.1. Robot IRb-6 manipulator

poprzednich dwóch rozdziałów dotyczących kinematyki i dynamiki MRP. Rozważania będziemy prowadzić na przykładowym manipulatorze IRb-6, który przedstawia rys.4.1.

Przedstawiony w tym rozdziale opis manipulatora IRb-6 posłużył autorowi pracy do napisania programów komputerowych umożliwiających: badanie zakresów zmian efektywnych momentów bezwładności siłowników, generowanie trajektorii zadanych ze zdefiniowaną i niezdefiniowaną kinematyką, wyznaczanie nastaw regulatorów w serwomechanizmach sterujących ruchem manipulatora IRb-6, badanie układów sterowania tym manipulatorem, planowanie trajektorii minimalnoczasowych, badanie skuteczności kompensacji obciążeń ruchu i badanie wrażliwości układów sterowania na zmiany dowolnych parametrów występujących w opisie modelu robota IRb-6. Są to jedne z najważniejszych problemów automatyki i robotyki.

4.1. MODELE KINEMATYKI

Manipulator IRb-6 zilustrowany na rys.4.1 ma 5 członów połączonych parami obrotowymi. Graf przekształceń jednorodnych opisujących kinematykę tego manipulatora przedstawia rys.4.2. Numery członów na rys.4.1 otoczono kółkami. Układy współrzędnych skojarzono z członami zgodnie z zapisem Hartenberga-Denavita. Parametry Hartenberga-Denavita opisujące ten manipulator przedstawia tabela 4.1 [51].

Tabela 4.1

Nr członu	α_i [°]	l_i [m]	λ_i [m]	θ_i [°]
1	90	0	0.70	90÷430
2	0	0.45	0	50÷130
3	0	0.67	0	-130÷-50
4	90	0	0	-25÷-220
5	0	0	0.095	$\Delta\theta_5$=360

W celu ułatwienia rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki wprowadzimy następującą modyfikację kątów [51]:

$$\theta'_1=\theta_1-90^\circ\ ,\ \theta'_2=\theta_2-90^\circ\ ,\ \theta'_3=\theta_3+90^\circ\ ,\ \theta'_4=\theta_4-90^\circ\ ,\ \theta'_5=\theta_5\ . \tag{4.1}$$

Zakresy zmian tych kątów są następujące [51]:

$0^\circ \le \theta'_1 \le 340^\circ$,

$$-40^\circ \le \theta_2' \le 40^\circ ,$$

$$-40^\circ - \theta_2' \le \theta_3' \le 40^\circ \qquad \text{dla } -40^\circ \le \theta_2' \le -15^\circ ,$$

$$-40^\circ - \theta_2' \le \theta_3' \le 25^\circ - \theta_2' \qquad \text{dla } -15^\circ \le \theta_2' \le 0^\circ ,$$

$$-40^\circ \le \theta_3' \le 25^\circ - \theta_2' \qquad \text{dla } 0^\circ \le \theta_2' \le 40^\circ ,$$

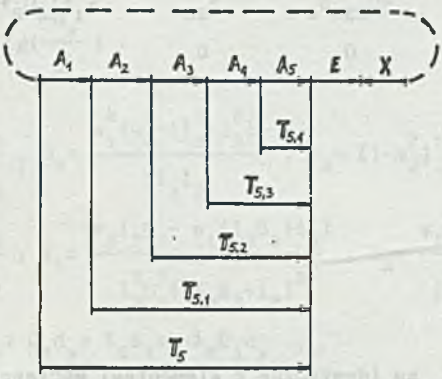
$$-90^\circ - \theta_2' - \theta_3' \le \theta_4' \le 90^\circ - \theta_2' - \theta_3' ,$$

$$-270^\circ + k_5^{-1}(\theta_2'+\theta_3'+\theta_4') \le \theta_5' \le 90^\circ + k_5^{-1}(\theta_2'+\theta_3'+\theta_4') . \tag{4.2}$$

Do uproszczenia zapisu zastosujemy następujące oznaczenia:

$\sin\theta_i' = S_i$, $\cos\theta_i' = C_i$, $\sin(\theta_i'+\theta_j') = S_{ij}$, $\cos(\theta_i'+\theta_j') = C_{ij}$ itp.

W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że kąty $\theta_1'+\theta_5'$ są współrzędnymi naturalnymi członów.



Rys.4.2. Graf przekształceń jednorodnych manipulatora IRb-6
Fig.4.2. Graph homogenous transform of IRb-6 manipulator

Macierze przekształceń $A_1 \div A_5$ i E mają następujące postacie [51]:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad A_2 = \begin{bmatrix} -S_2 & -C_2 & 0 & -l_2 S_2 \\ C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} S_3 & C_3 & 0 & l_3 S_3 \\ -C_3 & S_3 & 0 & -l_3 C_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad A_4 = \begin{bmatrix} -S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

$$A_5=\begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Macierze T_5 i X opisujące człon roboczy i chwytak zilustrowany na rys.4.1 mają postać [51]:

$$T_5=\begin{bmatrix} S_1S_{234}C_5+C_1S_5 & -S_1S_{234}S_5+C_1C_5 & -S_1C_{234} & l_2S_1S_2-l_3S_1C_{23}-\lambda_5S_1C_{234} \\ -C_1S_{234}C_5+S_1S_5 & C_1S_{234}S_5+S_1C_5 & C_1C_{234} & -l_2C_1S_2+l_3C_1C_{23}+\lambda_5C_1C_{234} \\ C_{234}C_5 & -C_{234}S_5 & S_{234} & \lambda_1+l_2C_2+l_3S_{23}+\lambda_5S_{234} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.4a}$$

$$X=\begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.4b}$$

gdzie: a_x+a_z, b_x+b_z, c_x+c_z są identyczne z elementami macierzy T_5. Elementy ostatniej kolumny są następujące:

$$d_x=l_2S_1S_2-l_3S_1C_{23}-\lambda_5S_1C_{234}+l_6(S_1S_{234}C_5+C_1S_5)-\lambda_6S_1C_{234},$$

$$d_y=-l_2C_1S_2+l_3C_1C_{23}+\lambda_5C_1C_{234}+l_6(-C_1S_{234}C_5+S_1S_5)+\lambda_6C_1C_{234},$$

$$d_z=\lambda_1+l_2C_2+l_3S_{23}+\lambda_5S_{234}+l_6C_{234}C_5+\lambda_6S_{234}.$$

Macierze T_5 i X umożliwiają rozwiązanie zadania prostego kinematyki tego manipulatora oraz wyznaczenie przestrzeni roboczej właściwej [35].

Rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki tego manipulatora wyrazimy za pomocą elementów macierzy $T_{5zad}=X_{zad}E^{-1}$, która ma postać:

$$T_{5zad}=\begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Manipulator IRb-6 ma 5 stopni swobody, co implikuje jedno równanie więzów członu roboczego. Struktura kinematyczna tego manipulatora krępuje niezależny od położenia obrót członu roboczego wokół osi z_0 układu bazowego [51].

Zapis tego przedstawia równanie:

$$c_x d_y - c_y d_x = 0 \ . \tag{4.6}$$

Równanie to musi być spełnione przez elementy macierzy T_{5zad} we wszystkich punktach trajektorii zadanej, jest to jeden z warunków koniecznych realizacji trajektorii zadanej. Formuły będące rozwiązaniem zadania odwrotnego kinematyki, dla macierzy T_{5zad} w postaci (4.5), są następujące [51]:

$$\theta_1' = \begin{cases} \theta_1^* & \text{dla } d_x \le 0 \text{ i } d_y \ge 0 \ , \\ \theta_1^* + 180^\circ & \text{dla } d_y < 0 \ , \\ \theta_1^* + 360^\circ & \text{dla } d_x > 0 \text{ i } d_y \ge 0 \ , \end{cases}$$

$$\theta_1^* = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-d_x}{d_y}\right) \ . \tag{4.7a}$$

$$\theta_3' = \operatorname{arc\,tg} \frac{S_3}{C_3} \ , \quad S_3 = \frac{w_1^2 + w_2^2 - (l_2^2 + l_3^2)}{2 l_2 l_3} \ , \quad C_3 = (1 - S_3^2)^{1/2} \ . \tag{4.7b}$$

$$\theta_2' = \operatorname{arc\,tg} \frac{S_2}{C_2} \ , \quad S_2 = \frac{w_2 l_3 C_3 - w_1 (l_3 S_3 + l_2)}{l_3^2 C_3^2 + (l_3 S_3 + l_2)^2} \ , \quad C_2 = \frac{w_1 l_3 C_3 + w_2 (l_3 S_3 + l_2)}{l_3^2 C_3^2 + (l_3 S_3 + l_2)^2} \ ,$$

$$w_1 = -S_1 d_x + C_1 d_y + \lambda_5 S_1 c_x - \lambda_5 C_1 c_y \ ,$$

$$w_2 = d_z - \lambda_1 - \lambda_5 c_z \ . \tag{4.7c}$$

$$\theta_{34}' = \begin{cases} \theta_{34}^* & \text{dla } \lambda_5 C_{34} \ge 0 \ , \\ \theta_{34}^* + 180^\circ & \text{dla } \lambda_5 S_{34} > 0 \text{ i } \lambda_5 C_{34} < 0 \ , \\ \theta_{34}^* - 180^\circ & \text{dla } \lambda_5 S_{34} < 0 \text{ i } \lambda_5 C_{34} < 0 \ , \end{cases}$$

$$\lambda_5 S_{34} = S_1 S_2 d_x - C_1 S_2 d_y + C_2 d_z - \lambda_1 C_2 - l_2 - l_3 S_3 \ ,$$

$$\lambda_5 C_{34} = -S_1 C_2 d_x + C_1 C_2 d_y + S_2 d_z - \lambda_1 S_2 - l_3 C_3 \ ,$$

$$\theta_{34}^* = \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_5 S_{34}}{\lambda_5 C_{34}} \ . \tag{4.7d}$$

$$\theta_4' = \theta_{34}' - \theta_3' \tag{4.7e}$$

$$S_5 = C_1 a_x + S_1 a_y \ , \quad C_5 = C_1 b_x + S_1 b_y \ ,$$

$$\theta_5^* = \operatorname{arc\,tg} \frac{S_5}{C_5} \ . \tag{4.7f}$$

Graniczne kąty θ'_{5min} i θ'_{5max} zależą od kątów $\theta'_2+\theta'_4$ oraz $\theta'_{5max}-\theta'_{5min}=360^\circ$ (patrz (4.2)) i dlatego do określenia kąta θ'_5 musimy badać znaki S_5 i C_5. Z analizy powyższych formuł w [51] wynika, że dla jednoznacznie określonych elementów macierzy $\mathbf{T}_{5zad}$, θ'_5 może mieć podwójne rozwiązanie $\theta'_5=\theta'_{5min}$ lub $\theta'_5=\theta'_{5max}$. Jest to osobliwość kinematyczna pierwszego rodzaju. Manipulator IRb-6 nie ma osobliwości drugiego rodzaju [51] .

Formuły wiążące współrzędne naturalne członów $\theta'_1+\theta'_5$ ze współrzędnymi naturalnymi siłowników $\theta_{s1}+\theta_{s5}$ opisują formuły [35,51]:

$$\theta'_1= k_1^{-1}\theta_{s1} \quad ,$$

$$\theta'_2= - \arccos \frac{AB^2+BC^2-[A_0C-(h_2/2\pi)\theta_{s2}]^2}{2\cdot AB\cdot BC} + \alpha \quad ,$$

$$\theta'_3= - \arccos \frac{DE^2+EF^2-[D_0F-(h_3/2\pi)\theta_{s3}]^2}{2\cdot DE\cdot EF} + \beta - \theta'_2 \quad ,$$

$$\theta'_4= k_4^{-1}\theta_{s4}-(\theta'_2+\theta'_3) \quad ,$$

$$\theta'_5= k_4^{-1}k_5^{-1}(\theta_{s4}-\theta_{s5}) \quad . \tag{4.8}$$

Formułom tym odpowiadają następujące związki:

$$\theta_{s1}= k_1\theta'_1 \quad ,$$

$$\theta_{s2}= (2\pi/h_2)\{-[AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos(\alpha-\theta'_2)]^{1/2}+A_0C\} \quad ,$$

$$\theta_{s3}= (2\pi/h_3)\{-[DE^2+EF^2-2\cdot DE\cdot EF\cdot\cos(\beta-\theta'_2-\theta'_3)]^{1/2}+D_0F\} \quad ,$$

$$\theta_{s4}= k_4(\theta'_2+\theta'_3+\theta'_4) \quad ,$$

$$\theta_{s5}= k_4(\theta'_2+\theta'_3+\theta'_4)-k_4k_5\theta'_5 \quad . \tag{4.9}$$

$$\alpha= \arccos \frac{AB^2+BC^2-A_0C^2}{2\cdot AB\cdot BC} \quad ,$$

$$\beta= \arccos \frac{DE^2+EF^2-D_0F^2}{2\cdot DE\cdot EF} \quad ,$$

Kinematykę napędów ilustruje uzupełnienie D.

Macierze $\mathbf{T}_{s1}\div\mathbf{T}_{s5}$ opisujące kinematykę napędów manipulatora mają postać [35]:

$$T_{s1}=\begin{bmatrix} -S_\varphi & C_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda_{11} \\ C_\varphi & S_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.10a}$$

gdzie $S_\varphi=\sin\varphi$, $C_\varphi=\cos\varphi$, $\varphi=\theta_1'-\theta_{s1}$,

$$T_{s2}=\begin{bmatrix} C_sC_\varphi & -S_sC_\varphi & S_\varphi & -l_{22}-\lambda_{s2}S_\varphi \\ C_sS_\varphi & -S_sS_\varphi & -C_\varphi & l_{21}+\lambda_{s2}C_\varphi \\ S_s & C_s & 0 & -\lambda_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.10b}$$

gdzie $S_s=\sin\theta_{s2}$, $C_s=\cos\theta_{s2}$, $S_\varphi=\sin\varphi$, $C_\varphi=\cos\varphi$, $\varphi=\varphi_2-\theta_2'$,

$$\varphi_2=\operatorname{arc\,tg}\frac{b_2+a_2C_2-l_{21}S_2}{d_2-l_{21}C_2-a_2S_2},$$

$$\lambda_{s2}=[(b_2+a_2C_2-l_{21}S_2)^2+(d_2-l_{21}C_2-a_2S_2)^2]^{1/2},$$

$$T_{s3}=\begin{bmatrix} C_sS_\varphi & -S_sS_\varphi & C_\varphi & -l_{32}-l_{31}S_3-\lambda_{s3}C_\varphi \\ C_sC_\varphi & -S_sC_\varphi & -S_\varphi & -l_{31}C_3+\lambda_{s3}S_\varphi \\ S_s & C_s & 0 & -(\lambda_{31}+\lambda_{32}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.10c}$$

gdzie $S_s=\sin\theta_{s3}$, $C_s=\cos\theta_{s3}$, $S_\varphi=\sin\varphi$, $C_\varphi=\cos\varphi$, $\varphi=\theta_2'+\theta_3'-\varphi_3$,

$$\varphi_3=\operatorname{arc\,tg}\frac{b_3-a_3S_{23}}{d_3-a_3C_{23}},$$

$$\lambda_{s3}=[(d_3-a_3C_{23})^2+(b_3-a_3S_{23})^2]^{1/2},$$

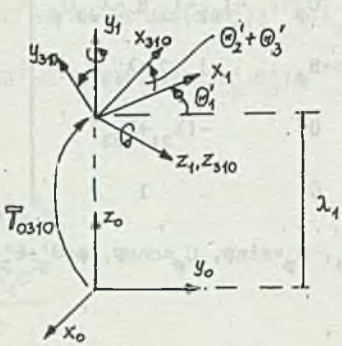
$$T_{s4}=\begin{bmatrix} -S_\varphi & C_\varphi & 0 & l_{43}S_4-l_{42}C_{34} \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda_{41}+\lambda_{42}) \\ C_\varphi & S_\varphi & 0 & -l_{43}C_4-l_{42}S_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.10d}$$

gdzie $S_\varphi=\sin\varphi$, $C_\varphi=\cos\varphi$, $\varphi=\theta_2+\theta_3+\theta'_4-\theta_{s4}$,

$$T_{s5}=\begin{bmatrix} -C_5S_\varphi & C_5C_\varphi & S_5 & l_{53}S_4C_5-l_{52}C_{34}C_5-(\lambda_{51}+\lambda_{52})S_5 \\ S_5S_\varphi & -S_5C_\varphi & C_5 & -l_{53}S_4S_5+l_{52}C_{34}S_5-(\lambda_{51}+\lambda_{52})C_5 \\ C_\varphi & S_\varphi & 0 & -l_{53}C_4-l_{52}S_{34}-\lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.10e}$$

gdzie $S_s=\sin\theta_{s5}$, $C_s=\cos\theta_{s5}$, $S_\varphi=\sin\varphi$, $C_\varphi=\cos\varphi$, $\varphi=\theta'_2+\theta'_3+\theta'_4-\theta_{s5}$.

W uzupełnieniu D zilustrowano układ współrzędnych $x_{310}y_{310}z_{310}$, opisujący element odciążający trzeci człon. Rys 4.3 ilustruje opis kinematyki tego elementu. Macierz T_{0310} opisująca ten układ współrzędnych względem układu bazowego ma postać:



Rys.4.3. Opis elementu odciążającego trzeci człon
Fig.4.3. Description of equilibrating the third link

$$T_{0310}=\begin{bmatrix} -S_1C_{23} & S_1S_{23} & C_1 & 0 \\ C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 & 0 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{4.11}$$

Wartości liczbowe parametrów kinematycznych występujących w formułach (4.2) ÷(4.11) przedstawia praca [48].

4.2. MODELE DYNAMIKI

Dynamikę MRP IRb-6 będziemy opisywać za pomocą formuł (3.2)÷(3.9). Uwzględnimy oddziaływanie elementu odciążającego trzeci człon (jego kinematykę opisuje macierz T_{0310}), stosując formuły (3.10). W równaniach dynamiki uwzględnimy także zmiany współczynników spowodowane obiektem manipulacji (powodującym przyrost macierzy J_5 o ΔJ_5), opisane formułami (3.11). Uwzględnimy także tarcie suche opisane formułami (3.12). Z uzupełnienia E wynika, że $F_{s1ts}=F_{s1tr}=0.07$ Nm, $F_{s2ts}=F_{s3ts}=0.33$ Nm, $F_{s2tr}=F_{s3tr}=0.28$ Nm , $F_{s4ts}=F_{s4tr}=F_{s5ts}=F_{s5tr}=0.06$ Nm. Uwzględnimy także tarcie lepkie opisane w formule (3.13). Tarcie lepkie występuje w przekładniach falowych zamocowanych w pierwszym, czwartym i piątym stopniu swobody MRP IRb-6. Na podstawie danych katalogowych firmy ASEA wyznaczono następujące wartości współczynników tego tarcia [33]: $k_{vs1}=1.51\cdot10^{-4}$Nm·sek·rad^{-1}, $k_{vs4}=k_{vs5}=3.23\cdot10^{-5}$ Nm·sek·rad^{-1}.

Modele kinematyki z poprzedniego punktu tego rozdziału pozwoliły wyznaczyć wszystkie pochodne macierzy T_i, T_{si} i $\partial q_i/\partial q_{sj}$ występujące w równaniach dynamiki.

Macierze pseudobezwładności wyznaczono w pracach [11] i [48]. W macierzy pseudobezwładności pierwszego członu uwzględniono korpusy siłowników napędowych 2÷5-tego członu. W macierzy pseudobezwładności piątego członu uwzględniono przykładowy chwytak [48] o następujących parametrach kinematycznych: $l_6=0$, $\lambda_6=0.16$ m.

Wartości liczbowe w jednostkach układu SI macierzy pseudobezwładności $J_1 \div J_5$, $J_{s1} \div J_{s5}$ oraz macierz pseudobezwładności J_{310} elementu odciążającego trzeci człon przedstawia praca [48].

5. EFEKTYWNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI SIŁOWNIKÓW

Efektywne momenty bezwładności siłowników, a szczególnie zakresy ich zmian, są podstawowymi parametrami warunkującymi projektowanie algorytmów wyznaczania trajektorii zadanej z niezdefiniowaną kinematyką w przestrzeni zewnętrznej robota oraz wyznaczanie nastaw regulatorów serwomechanizmów PID.

Z równań (3.2) i (3.8) wynikają następujące równania dynamiki:

$$F_{sl}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}\frac{\partial q_i}{\partial q_{sl}}\ddot{q}_j+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} D_{ijk}\frac{\partial q_i}{\partial q_{sl}}\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{i=1}^{N} D_i\frac{\partial q_i}{\partial q_{sl}} . \tag{5.1}$$

Po przekształceniach otrzymujemy [2,51,52]:

$$F_{sl}=\sum_{j=1}^{N} D_{slj}\ddot{q}_{sj}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} D_{sljk}\dot{q}_{sj}\dot{q}_{sk}+D_{sl} , \tag{5.2}$$

gdzie: D_{slj} - współczynnik oddziaływania sił bezwładności pochodzących od $\ddot{q}_{sl}$, D_{sljk} - współczynnik oddziaływania sił Coriolisa wynikający z ruchu względnego j-tego i k-tego siłownika, D_{sl} - współczynnik oddziaływania grawitacji.

Efektywnym momentem bezwładności l-tego siłownika jest współczynnik D_{sll}. Po przekształceniach otrzymujemy formułę [51]:

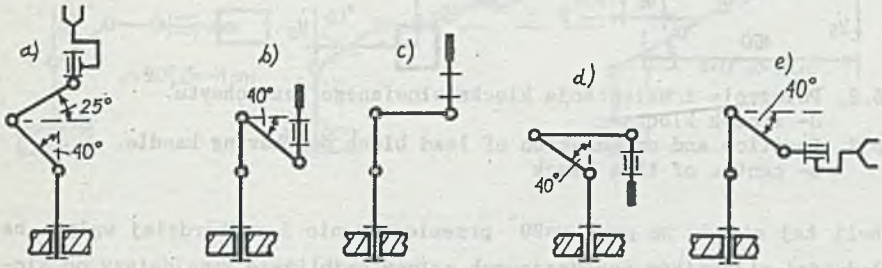
$$D_{sll}=\sum_{p=1}^{N}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial T_p}{\partial q_{sl}} J_p \frac{\partial T_p^T}{\partial q_{sl}}\right)+\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial T_{sp}}{\partial q_{sl}} J_{sp} \frac{\partial T_{sp}^T}{\partial q_{sl}}\right)\right] \tag{5.3}$$

Z formuły tej wynika, że D_{sll} zależy tylko od współrzędnych naturalnych członów lub siłowników oraz masy, kształtu, położenia i orientacji obiektu manipulacji względem elementu wykonawczego manipulatora.

5.1. MINIMALNE EFEKTYWNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI SIŁOWNIKÓW NA PRZYKŁADZIE MRP IRb-6

Autor pracy opracował algorytm obliczeń komputerowych SZAC umożliwiający wyznaczanie D_{e11} dla manipulatora IRb-6. W obliczeniach uwzględniono chwytak przykładowy, który włączono do opisu macierzy pseudobezwładności $\mathbb{J}_5$ oraz obiekt manipulacji o masie około 6 kg. Masa ta jest dopuszczalna dla tego manipulatora. Uwzględniono także element odciążający trzeci człon, opisany macierzami $\mathbb{T}_{0310}$ i $\mathbb{J}_{310}$.

Minimalne efektywne momenty bezwładności wyznaczono dla chwytaka pustego. Rys.5.1 ilustruje konfiguracje manipulatora, przy których efektywne momenty bezwładności siłowników są najmniejsze.



Rys.5.1. Konfiguracje manipulatora IRb-6, którym odpowiadają minimalne momenty bezwładności siłowników: a) pierwszego, b) drugiego, c) trzeciego, d) czwartego , e) piątego

Fig.5.1. Configuration of IRb-6 manipulators corresponding to minimal effective inertia of following actuators: a) first, b) second c) third, d) forth, d) fifth

Tabela 5.1 przedstawia współrzędne naturalne członów opisujące konfiguracje przedstawione na rys 5.1 i odpowiadające im minimalne D_{e11}.

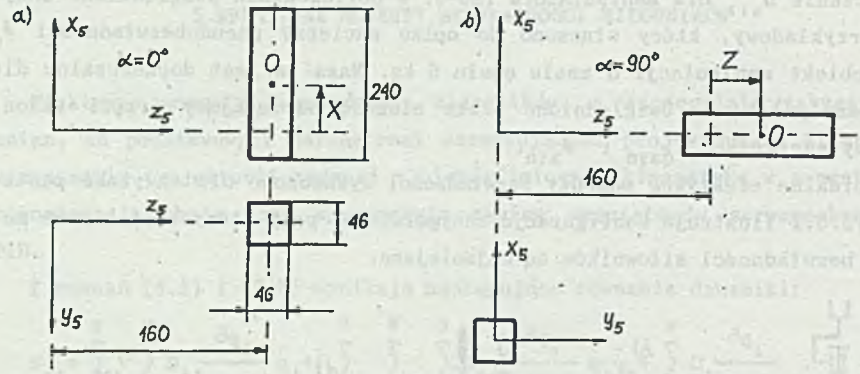
5.2. MAKSYMALNE EFEKTYWNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI SIŁOWNIKÓW NA PRZYKŁADZIE MRP IRb-6

Maksymalne efektywne momenty bezwładności siłowników wyznaczono dla klocków ołowianych bez i z uchwytem. Przebadano wpływ położenia i orientacji klocka bez uchwytu na D_{e11}. Rys.5.2 ilustruje usytuowanie klocka bez uchwytu względem układu współrzędnych $x_5y_5z_5$, opisującego człon roboczy.

Tabela 5.2 przedstawia maksymalne D_{e11} przy klocku zorientowanym jak na rys.5.2a. Z tabeli tej widać, że przy $\alpha=0^\circ$ przemieszczenie X klocka najbar-

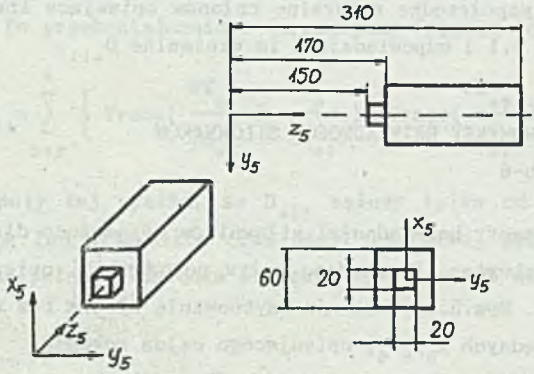
dziej wpływa na bezwładności siłowników napędzających człony najbliższe chwytaka, czyli na D_{s44} i D_{s55}. Największe D_{s44} i D_{s55} pojawiają się dla klocka najbardziej oddalonego od osi z_5.

Tabela 5.3. przedstawia maksymalne D_{s11} przy klocku zorientowanym jak na rys.5.2b.



Rys.5.2. Położenie i orientacja klocka ołowianego bez uchwytu.
0- środek klocka
Fig.5.2. Position and orientation of lead block not having handle.
0- centre of this block

Z tabeli tej widać, że przy $\alpha=90°$ przemieszczenie Z najbardziej wpływa na bezwładności siłowników napędzających człony najbliższe i najdalszy od klocka, czyli na D_{s44}, D_{s33}, D_{s11}. Największe D_{s11}, D_{s33}, D_{s44} pojawiają się

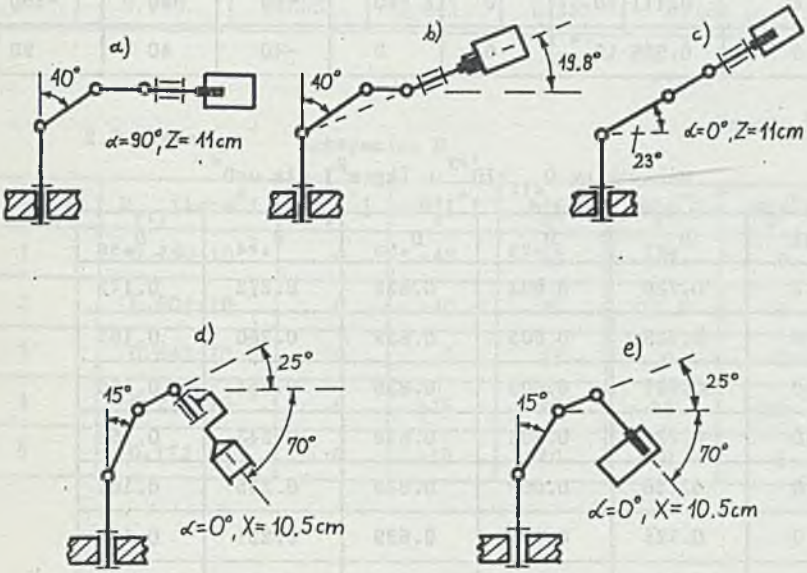


Rys.5.3. Położenie i orientacja klocka ołowianego z uchwytem
Fig.5.3. Position and orientation of lead block with handle

dla klocka najbardziej oddalonego od osi x_5.

Rys.5.3 ilustruje klocek z uchwytem.

Po przeliczeniu D_{s11} dla chwytaka z klockiem jak na rys.5.3 i porównaniu wyników obliczeń w tabelach 5.2 i 5.3 otrzymamy największe efektywne bezwładności siłowników. Konfiguracje odpowiadające tym bezwładnościom przedstawia rys.5.4. W tabeli 5.4 zamieszczono współrzędne naturalne członów, opisujące konfiguracje przedstawione na rys.5.4 i odpowiadające im maksymalne D_{s11}.



Rys.5.4. Konfiguracje manipulatora IRb-6, którym odpowiadają maksymalne efektywne bezwładności siłowników; a) pierwszego, b) drugiego, c) trzeciego, d) czwartego, e) piątego. X, Z, α - parametry opisujące klocek bez uchwytu

Fig.5.4. Configuration of IRb-6 manipulator corresponding to maximal effective inertia of following actuators: a) first, b) second, c) third, d) forth, e) fifth. X, Z, α - parameters describing the block not having handle

Z rys.5.1 widać, że minimalne D_{s11} pojawiają się dla konfiguracji manipulatora, przy których środki masy odpowiednich zespołów członów są najbliższe lub bliskie osi obrotu tych zespołów. Z rys.5.4 wynika, że maksymalne D_{s11} pojawiają się dla konfiguracji manipulatora, przy których środki masy

odpowiednich zespołów członów (wraz z klockiem ołowianym) są najdalsze lub dalekie od osi obrotu tych zespołów.

Tabela 5.1

Minimalne D_{s11}

Nr siłown.	D_{s11} [kg·m^2]	θ'_1[°]	θ'_2[°]	θ'_3[°]	θ'_4[°]	θ'_5[°]
1	$0.253\cdot10^{-3}$	0	40	-15	65	-118
2	$0.338\cdot10^{-3}$	0	0	-40	130	0
3	$0.407\cdot10^{-3}$	0	0	0	90	0
4	$0.111\cdot10^{-3}$	0	40	-40	90	-180
5	$0.926\cdot10^{-4}$	0	0	-40	40	90

Tabela 5.2

Maksymalne $D_{s11}\cdot10^{-3}$ w [kg·m^2] dla $\alpha=0°$

X [cm]	D_{s11}	D_{s22}	D_{s33}	D_{s44}	D_{s55}
-10.5	0.729	0.603	0.839	0.272	0.172
-8.0	0.728	0.603	0.839	0.260	0.167
-6.0	0.727	0.603	0.839	0.251	0.165
-4.0	0.726	0.603	0.839	0.243	0.163
-2.0	0.726	0.603	0.839	0.235	0.161
0	0.725	0.603	0.839	0.231	0.153
2.0	0.726	0.603	0.839	0.236	0.154
4.0	0.726	0.603	0.839	0.246	0.163
6.0	0.727	0.603	0.839	0.254	0.164
8.0	0.727	0.603	0.839	0.262	0.167
10.5	0.729	0.603	0.839	0.274	0.172

Tabela 5.3

Maksymalne $D_{s11} \cdot 10^{-3}$ w $[kg \cdot m^2]$ dla $\alpha=90^\circ$

Z [cm]	D_{s11}	D_{s22}	D_{s33}	D_{s44}	D_{s55}
1.5	0.732	0.603	0.839	0.232	0.156
3.0	0.743	0.603	0.839	0.235	0.156
5.0	0.755	0.603	0.839	0.239	0.156
7.0	0.766	0.603	0.839	0.236	0.156
9.0	0.778	0.603	0.843	0.248	0.156
11.0	0.790	0.603	0.843	0.253	0.156

Tabela 5.4

Maksymalne D_{s11}

Nr siłown.	$D_{s11}[kg \cdot m^2]$	$\theta'_1[^\circ]$	$\theta'_2[^\circ]$	$\theta'_3[^\circ]$	$\theta'_4[^\circ]$	$\theta'_5[^\circ]$
1	$0.790 \cdot 10^{-3}$	0	-40	40	0	0
2	$0.604 \cdot 10^{-3}$	0	-40	40	19.8	0
3	$0.843 \cdot 10^{-3}$	0	0	23	0	0
4	$0.274 \cdot 10^{-3}$	0	-15	40	-70	-90
5	$0.172 \cdot 10^{-3}$	0	-15	40	-70	0

6.GENERACJA TRAJEKTORII ZADANYCH

Formuły stanowiące rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki MRP są podstawą do projektowania algorytmów generujących przebiegi współrzędnych naturalnych siłowników. Przebiegi te odpowiadają trajektorii zadanej obiektu manipulacji opisanej w przestrzeni zewnętrznej robota. Algorytmy generujące przebiegi współrzędnych naturalnych siłowników tworzą warstwę wyznaczania trajektorii ruchu będącą elementem struktury funkcjonalnej układu sterowania robotami adaptacyjnymi. Algorytmy te są niezbędnymi środkami programowymi sprzęgającymi pracę warstwy rozpoznawania z warstwą sterowania napędów [38].

Autor pracy opracował komputerowy algorytm PLAN2 generujący trajektorie chwytaka manipulatora IRb-6. Do generacji potrzebny jest opis wstępny trajektorii w postaci wartości współrzędnych zewnętrznych co najmniej dwóch głównych punktów podporowych dowolnie oddalonych od siebie. Zadane współrzędne zewnętrzne punktów, przez które ma przechodzić generowana trajektoria, będziemy nazywać krótko głównymi punktami podporowymi. Algorytm PLAN2 generuje dodatkowe punkty podporowe dla zdefiniowanej lub niezdefiniowanej kinematyki między kolejnymi głównymi punktami podporowymi. Algorytm ten dla zdefiniowanej kinematyki opisano w pracy [53], a dla niezdefiniowanej kinematyki w pracy [2].

6.1.GENERACJA TRAJEKTORII ZADANEJ ZE ZDEFINIOWANĄ KINEMATYKĄ NA PRZYKŁADZIE MRP IRb-6

Algorytm PLAN2 zawiera cztery podstawowe segmenty, z których obliczenia przekazywane są do 21 segmentów pomocniczych. Segmenty podstawowe to: a) segment główny, b) segment ROZ1, c) segment ROZ2 i d) segment ROZ3.

W celu uproszczenia opisu będziemy dalej stosować następujące skróty: GPP - główny punkt podporowy i DPP - dodatkowy punkt podporowy.

Po uruchomieniu algorytm PLAN2 pyta o parametry l_6 i λ_6 opisujące chwytak. Następnie pyta: o liczbę GPP≤50, o współrzędne zewnętrzne i czas t kolejnego GPP, czy orientacja kolejnego GPP jest zdefiniowana. Jeśli orienta-

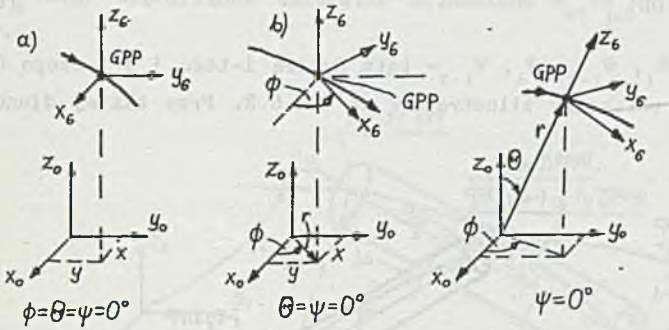
cja jest zdefiniowana, to algorytm pyta, czy ma ją obliczyć. Jeśli tak , to pojawia się pytanie, w jakim układzie współrzędnych ma być obliczona: kartezjańskim, cylindrycznym czy sferycznym. Orientację można opisać za pomocą kątów Eulera następująco:

a) $\Phi = \Theta = \Psi = 0^\circ$ dla układu współrzędnych kartezjańskiego;

b) $\Phi \neq 0^\circ$, $\Theta = \Psi = 0^\circ$ dla układu współrzędnych sferycznego;

c) $\Phi \neq 0^\circ$, $\Theta \neq 0^\circ$, $\Psi = 0^\circ$ dla układu współrzędnych cylindrycznego.

Kąty te ilustruje rys.6.1. Po zadeklarowaniu odpowiedniego układu współrzędnych wyznaczone są kąty Eulera opisujące orientację danego GPP. Jeśli orientacja zdefiniowana nie ma być obliczana, pojawia się pytanie o kąty Eulera GPP. Dla niezdefiniowanej orientacji GPP ustalany jest arbitralnie kąt Ψ. Kąty Φ i Θ są obliczane ze współrzędnych zewnętrznych x,y,z (opisujących położenie aktualnego GPP).



Rys.6.1. Kąty Eulera w układzie współrzędnych: a) kartezjańskim, b) cylindrycznym, c) sferycznym

Fig.6.1. Euler angles in following coordinate system: a) Cartesian b) cylindrical, c) spherical

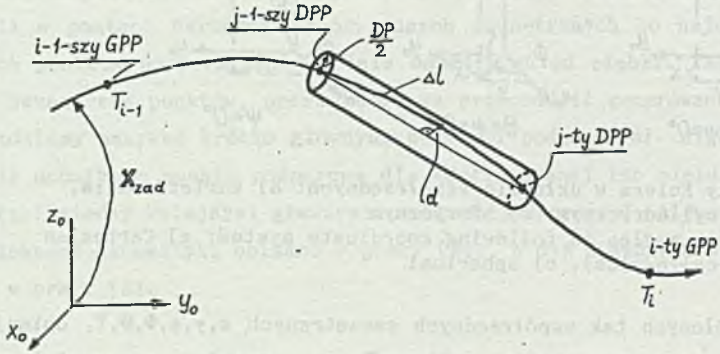
Dla określonych tak współrzędnych zewnętrznych x,y,z,Φ,Θ,Ψ, opisujących kolejny GPP, algorytm wyznacza macierz T_{5zad}, sprawdza, czy spełnione jest równanie więzów (4.6) i oblicza współrzędne naturalne $\Theta'_1 \div \Theta'_5$ z formuł (4.7). Następnie algorytm pyta o układ współrzędnych opisujący kształt odcinka trajektorii między kolejnymi GPP. Dla odcinka w kształcie linii prostej należy wybrać układ współrzędnych kartezjański, dla odcinka krzywoliniowego - układ cylindryczny lub sferyczny. Dalej algorytm pyta o czas dyskretyzacji ΔT na aktualnym odcinku trajektorii zadanej. Po zdefiniowaniu kształtów i czasów dyskretyzacji na wszystkich odcinkach między kolejnymi GPP algorytm pyta o dopuszczalny błąd położenia DP i orientacji DF chwytaka. Jeśli wcześniej zadeklarowano dowolną orientację chwytaka, wtedy algorytm arbitralnie przyjmuje DF=360°. Dalej algorytm pyta o rodzaj generacji trajektorii, któ-

rą można zadeklarować jako: swobodną, zgrubną i dokładną. Po zadeklarowaniu zgrubnej lub dokładnej generacji pojawia się pytanie o dopuszczalny błąd orientacji DFW.

Dla swobodnej generacji algorytm wyznacza współrzędne zewnętrzne DPP wynikające z zadeklarowanych wcześniej parametrów DP, DF i ΔT zapewniających deklarowany kształt odcinka trajektorii w przestrzeni zewnętrznej. Tak wyznaczone DPP ilustruje rys.6.2. Jeśli przez l oznaczymy długość odcinka trajektorii między i-1-szym i i-tym GPP, to długość l_j odcinka trajektorii między kolejnymi DPP można wyrazić następujaco:

$$l_j = \min\left[\frac{2\cdot DF}{|\Phi_i - \Phi_{i-1}|} l, \frac{2\cdot DF}{|\Theta_i - \Theta_{i-1}|} l, \frac{2\cdot DF}{|\Psi_i - \Psi_{i-1}|} l, \frac{2\cdot \Delta T}{|T_i - T_{i-1}|} l, \Delta l(d \le 0.5\cdot DP) \right], \tag{6.1}$$

gdzie: Φ_i, Φ_{i-1}, Θ_i, Θ_{i-1}, Ψ_i, Ψ_{i-1} - kąty Eulera i-tego i i-1-szego GPP; Δl, d, T_{i-1}, T_i - parametry zilustrowane na rys.6.2. Przy takiej długości

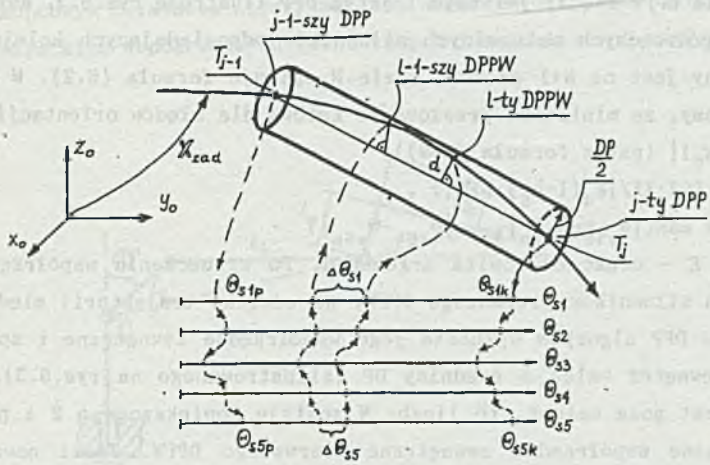


Rys.6.2. Odcinek trajektorii między i-1-szym i i-tym GPP. Δl-długość odcinka między j-1-szym i j-tym DPP. d-odległość środka odcinka o długości Δl od prostej łączącej j-1-szy i j-ty DPP. T_{i-1} i T_i - czasy odpowiadające zilustrowanym GPP

Fig.6.2. Trajectory segment between the i-1-st and i-th GPP. Δl-lenght of a trajectory segment between the j-1-st and j-th DPP. d-distance between the centre of a trajectory segment of Δl lenght and a straight line connecting the j-1-st and j-th DPP. T_{i-1} and T_i - times corresponding to the above illustrated GPP

odcinków trajektorii można przypuszczać, że wszystkie punkty trajektorii opisane przez współrzędne z zakresów odpowiadających sąsiednim DPP nie wyj-

dą poza "trąbę" o średnicy DP, utworzoną przez kolejne cylindry zilustrowane na rys.6.2. Do wyznaczenia orientacji DPP algorytm przyjmuje liniową zmianę z długością l wzdłuż trajektorii dwóch kątów Eulera, a trzeci oblicza z równania więzów (4.6). Do obliczania czasu DPP algorytm także przyjmuje jego liniową zależność od długości l. W przypadku gdy kolejne GPP różnią się tylko orientacją, rolę długości l przejmuje $\max[|\Phi_{i-1}-\Phi_i|, |\theta_{i-1}-\theta_i|, |\Psi_{i-1}-\Psi_i|]$. Wtedy d jest odległością środka odcinka trajektorii między kolejnymi DPP od środka kuli o średnicy DP, pokrywającego się z GPP. Formuła (6.1) jest nadal słuszna. Po obliczeniu współrzędnych zewnętrznych DPP algorytm sprawdza jego zanurzenie w przestrzeni roboczej. Jeśli sprawdzany DPP wychodzi poza przestrzeń roboczą, następuje korekcja jego położenia, orientacji i czasu. Następnie obliczane są współrzędne naturalne członów $\theta'_i \div \theta'_5$ oraz współrzędne naturalne siłowników $\theta_{si} \div \theta_{s5}$, odpowiadające temu DPP.



Rys.6.3. Odcinek trajektorii między j-1-szym i j-tym DPP. d-odległość DPPW od prostej łączącej sąsiednie DPP. $\theta_{s1p} \div \theta_{s5p}$-współrzędne naturalne siłowników odpowiadające j-1-szemu DPP. $\theta_{s1k} \div \theta_{s5k}$- współrzędne naturalne siłowników odpowiadające j-temu DPP. T_{j-1} , T_j-czasy j-1-szego i j-tego DPP

Fig.6.3. Trajectory segment between j-1-st and j-th DPP. d- distance between DPP and a straight line connecting neighbouring DPP. $\theta_{s1p} \div \theta_{s5p}$- actuator natural coordinates corresponding to j-1-st DPP. $\theta_{s1k} \div \theta_{s5k}$- actuator natural coordinates corresponding to j-th DPP. T_{j-1} and T_j times corresponding to j-1-st and j-th DPP

Dla niezbyt dużych wymagań dotyczących generacji trajektorii parametry DP, DF, ΔT mają stosunkowo duże wartości. Takim wartościom tych parametrów odpowiadają stosunkowo długie odcinki trajektorii między sąsiednimi DPP. Wtedy, przy zadeklarowanej swobodnej generacji trajektorii, przypuszczenia o lokalizacji jej wszystkich punktów we wspomnianej "trąbie" mogą być niesłuszne. Wynika to stąd, że trajektoria realizowana jest we współrzędnych wewnętrznych. Dla zapobieżenia wyjściu trajektorii poza "trąbę", przy stosunkowo dużych wartościach DP, DF i ΔT, użytkownik może zadeklarować zgrubną generację trajektorii oraz parametr DFW. Wtedy algorytm wyznacza dwie grupy punktów podporowych: dodatkowe punkty podporowe zewnętrzne i dodatkowe punkty podporowe wewnętrzne. Dodatkowe punkty podporowe zewnętrzne są wyznaczane tak samo jak przy swobodnej generacji trajektorii i będziemy je oznaczać jak dotychczas skrótem DPP. Dodatkowe punkty podporowe wewnętrzne wynikają z podziału współrzędnych naturalnych siłowników (z przedziałów odpowiadających kolejnym DPP) i będziemy je oznaczać skrótem DPPW. Sposób obliczania DPPW między j-1-szym i j-tym DPP ilustruje rys.6.3. Każdy z zakresów współrzędnych naturalnych siłowników odpowiadających kolejnym DPP podzielony jest na N+1 części, gdzie N opisuje formuła (6.2). W formule tej zakładamy, że minimalne przełożenie kątowe dla błędów orientacji jest równe $|k_4(1-k_5)|$ (patrz formuła (4.9)).

$$N = E(2\cdot XX/|k_4(1-k_5)\cdot DFW|) ,$$

$$XX = \max(|\theta_{s1k}-\theta_{s1p}|,..,|\theta_{s5k}-\theta_{s5p}|) \qquad (6.2)$$

gdzie: E - część całkowita argumentu. Po wyznaczeniu współrzędnych naturalnych siłowników pierwszego DPPW, na odcinku trajektorii między j-1-szym i j-tym DPP algorytm wyznacza jego współrzędne zewnętrzne i sprawdza, czy jest wewnątrz walca o średnicy DP (zilustrowanego na rys.6.3). Jeśli ten DPPW jest poza walcem, to liczba N zostaje powiększona o 2 i powtórnie są wyznaczane współrzędne zewnętrzne pierwszego DPPW. Jeśli nowo obliczony pierwszy DPPW jest dalej poza wspomnianym walcem, to algorytm zwiększa liczbę N o 2 i czyni to aż do chwili, kiedy ten DPPW znajdzie się wewnątrz walca. Następnie dla tak zmodyfikowanej liczby N wyznacza współrzędne zewnętrzne kolejnego DPPW. Jeśli sąsiednie DPP różnią się tylko orientacją, wtedy rolę walca (zilustrowanego na rys.6.3) przejmuje kula o średnicy DP i środku pokrywającym się z DPP. Algorytm sprawdza zanurzenie każdego DPPW w przestrzeni roboczej. Jeśli sprawdzany DPPW wychodzi poza przestrzeń roboczą, to następuje korekcja jego położenia, orientacji i współrzędnych naturalnych siłowników. Do obliczania czasu DPPW algorytm przyjmuje jego liniową zależność od współrzędnych naturalnych członów.

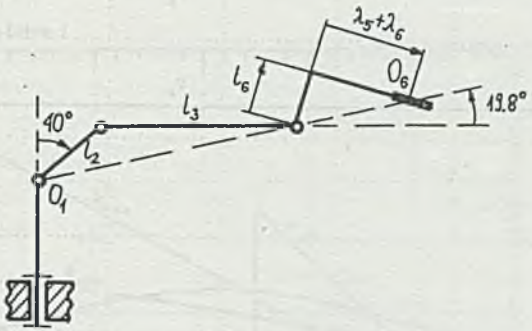
Przy zgrubnej generacji trajektorii algorytm uwzględnia w obliczaniu współrzędnych naturalnych siłowników tylko parametr DFW (patrz formuła (6.2)). Po zadeklarowaniu dokładnej generacji trajektorii każdy z zakresów współrzędnych naturalnych siłowników (zilustrowanych na rys.6.3) podzielony jest podobnie jak przy zgrubnej generacji. Jedyną różnicą jest sposób obliczania początkowej liczby podziału N. Przy dokładnej generacji trajektorii liczba ta wynika z parametrów DP i DFW w następujący sposób:

$$N = E(XX/XY) \ , \ XY = \min[|k_4(1-k_5)\cdot DFW|/2, DP/(2\cdot R_2)] \ ,$$

$$R_2 = [(l_2\cos 40^\circ)^2+(l_2\sin 40^\circ+l_3)^2]^{1/2} + [(\lambda_5+\lambda_6)^2+l_6^2]^{1/2} \ , \qquad (6.3)$$

gdzie: E - część całkowita argumentu. R_2 jest największym efektywnym promieniem obrotu chwytaka przemieszczającego się w przestrzeni zewnętrznej o DP/2. Jest to długość łuku, jaki zakreśla chwytak dla $d\theta'_1=d\theta'_3=d\theta'_4=d\theta'_5=0$ i $d\theta'_2 \cong DP/(2R_2)$ (przy konfiguracji manipulatora jak na rys 6.4). Dalsza korekta liczby N oraz generacja DPPW przebiega tak samo jak dla opisanej już zgrubnej generacji trajektorii.

Efektem końcowym działania algorytmu jest utworzenie zbiorów opisujących przebiegi wszystkich współrzędnych wewnętrznych i zewnętrznych manipulatora IRb-6

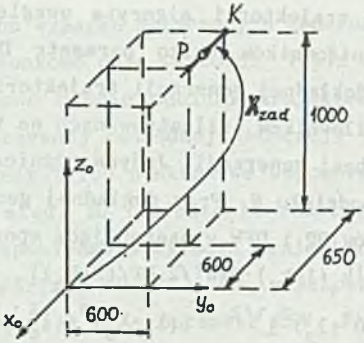


Rys.6.4. Konfiguracja manipulatora IRb-6, przy której efektywny promień obrotu chwytaka $R_2=0_10_6$ jest największy

Fig.6.4. Configuration of IRb-6 manipulator , with which the task effective turning radius $R_2=0_10_6$ is the langest

Rys.6.5 ilustruje prostoliniową trajektorię zadaną chwytaka, ograniczoną punktem początkowym P i końcowym K.

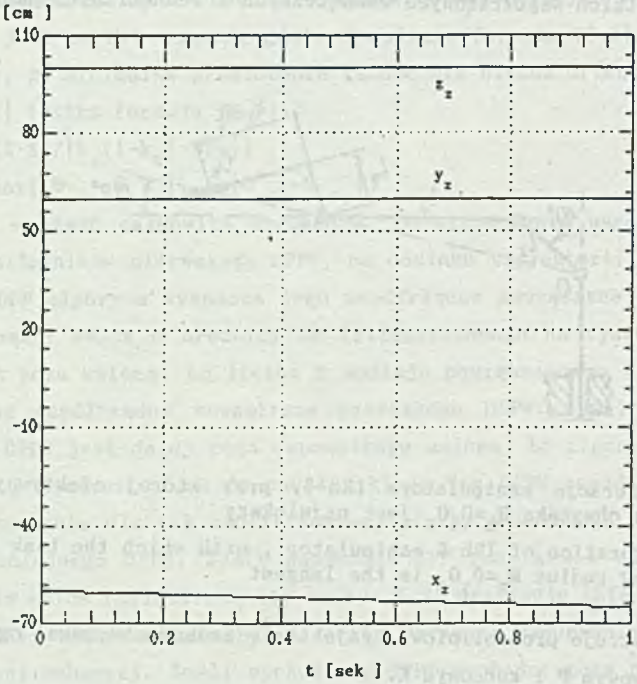
Współrzędne tych punktów są następujące: $x_P=-0.60$ m , $y_P=0.60$ m , $z_P=1.0$ m, $\Phi_P=135^\circ$, $\Theta_P=179^\circ$, $\Psi_P=359^\circ$, $x_K=-0.65$ m , $y_K=0.60$ m , $z_K=1.0$ m , $\Phi_K=137.29^\circ$, $\Theta_K=1^\circ$, $\Psi_K=180^\circ$. Przyjmiemy następujące parametry wejściowe



Rys.6.5. Trajektoria zadana X_{zad}

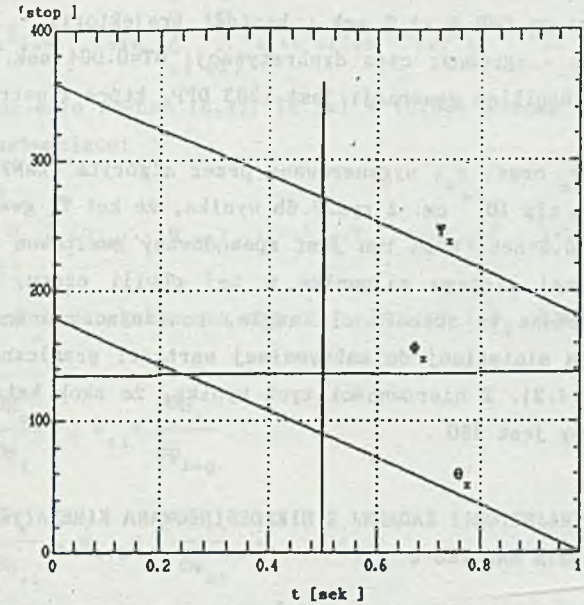
Fig.6.5. X_{zad} reference trajectory of task

algorytmu PLAN2, definiujące kinematykę trajektorii z rys 6.5: parametry chwytaka l_6=0 i λ_6=0.16 m; liczba GPP=2 (punkty P i K); współrzędne zewnętrzne GPP równe odpowiednim współrzędnym punktu P i K; czas pierwszego GPP



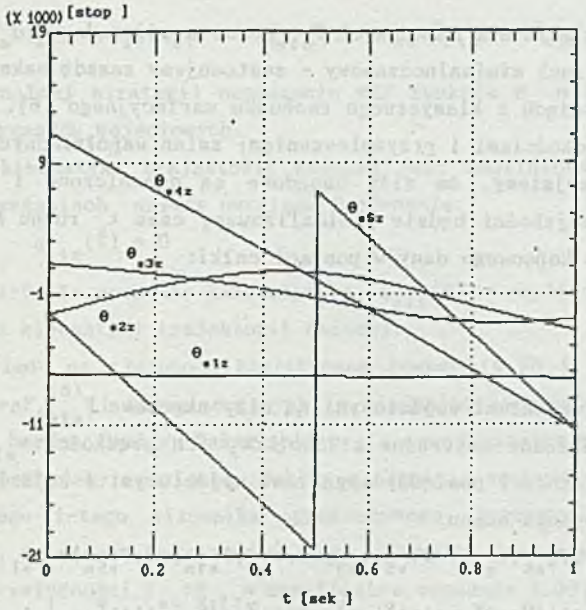
Rys.6.6a. Zadane współrzędne położenia chwytaka $x_z(t)$, $y_z(t)$, $z_z(t)$

Fig.6.6a. Task position reference coordinates $x_z(t)$, $y_z(t)$, $z_z(t)$



Rys.6.6b. Zadane współrzędne orientacji chwytaka $\Phi_z(t)$, $\Theta_z(t)$, $\Psi_z(t)$

Fig.6.6b. Task orientation reference coordinates $\Phi_z(t)$, $\Theta_z(t)$, $\Psi_z(t)$



Rys.6.7. Zadane współrzędne naturalne siłowników $\Theta_{s1z}(t)+\Theta_{s5z}(t)$

Fig.6.7. Actuator natural reference coordinates $\Theta_{s1z}(t)+\Theta_{s5z}(t)$

$T_1=0$, czas drugiego GPP $T_2=1.0$ sek.; kształt trajektorii - linia prosta; rodzaj generacji - zgrubny; czas dyskretyzacji $\Delta T=0.004$ sek.; DP=0.0002m; DF=60°, DFW=2°. Wynikiem generacji jest 1283 DPP, które ilustrują rys.6.6 i rys.6.7.

Współrzędne y_z oraz z_z, wygenerowane przez algorytm PLAN2, są obarczone błędem mniejszym niż 10^{-4} cm. Z rys.6.6b wynika, że kąt Ψ_z gwałtownie zmienia się dla t≅ 0.5 sek. Skok ten jest spowodowany gwałtowną zmianą współrzędnej naturalnej piątego siłownika w tej chwili czasu, co ilustruje rys.6.7. Współrzędna ta zmienia się nagle, powodując zmianę współrzędnej naturalnej θ_5' od minimalnej do maksymalmej wartości granicznej określonej nierównościami (4.2). Z nierówności tych wynika, że skok kąta θ_5' w chwili t≅ 0.5 sek. równy jest 360°.

6.2. GENERACJA TRAJEKTORII ZADANEJ Z NIEZDEFINIOWANĄ KINEMATYKĄ NA PRZYKŁADZIE MRP IRb-6

Jeśli trajektoria zadana jest zdefiniowana tylko za pomocą współrzędnych zewnętrznych punktu początkowego i końcowego, to możemy wyznaczyć niezdefiniowane przebiegi czasowe współrzędnych minimalizujące czas ruchu między tymi punktami.

W celu określenia sił napędowych F_{sln} oraz współrzędnych q_{sl}, v_{sl} i $\dot{v}_{sl}$ zapewniających ruch minimalnoczasowy - zastosujemy zasadę maksimum Pontriagina [59] wynikającą z klasycznego rachunku wariacyjnego [6]. v_{sl} i $\dot{v}_{sl}$ są odpowiednio prędkościami i przyśpieszeniami zmian współrzędnych naturalnych siłowników. Przyjmiemy, że siły napędowe są ograniczone i $-F_{slm} \le F_{sln} \le F_{slm}$. Kryterium jakości będzie minimalizowany czas t_k ruchu MRP od punktu początkowego do końcowego dany w postaci całki:

$$Q=\int_0^{t_k} dt \ . \tag{6.4}$$

Przyjmiemy, że sygnałami wejściowymi są siły napędowe F_{sln}, a sygnałami wyjściowymi współrzędne naturalne siłowników, ich prędkości v_{sl} i przyśpieszenia $\dot{v}_{sl}$. Zależności pomiędzy sygnałami wyjściowymi i wejściowymi opisują następujące równania stanu:

$$\dot{q}_{sl}=f_l(q_{s1},\dots q_{s5},v_{s1},\dots v_{s5},\dot{v}_{s1},\dots \dot{v}_{s5},F_{s1n},\dots F_{s5n})= v_{sl} \ , \tag{6.5a}$$

$$\dot{v}_{sl}=f_{l+5}(q_{s1},\dots q_{s5},v_{s1},\dots v_{s5},\dot{v}_{s1},\dots \dot{v}_{s5},F_{s1n},\dots F_{s5n}) \ , \tag{6.5b}$$

gdzie $1 \le l \le 5$, f_{l+5} - funkcje wynikające z równań dynamiki (5.2) w postaci

$$\sum^{5} D_{sli} f_{i+5} = F_{sln} - \sum_{i=1}^{5} \sum_{k=1}^{5} D_{slik} v_{si} v_{sk} - k_{vsl} v_{sl} - D_{sl} \ , \ 1 \le l \le 5. \quad (6.5c)$$

Po uwzględnieniu równań (6.4), (6.5a) i (6.5b) możemy zdefiniować funkcję H_c [59] następująco:

$$H_c = \sum_{l=1}^{10} \psi_l \ f_l(q_{s1},\ldots q_{s5}, v_{s1},\ldots v_{s5}, \dot{v}_{s1},\ldots \dot{v}_{s5}, F_{s1n},\ldots F_{s5n}) \ . \quad (6.6)$$

Z zasady maksimum wynika, że sygnały wyjściowe i ψ_l określone są równaniami [59]

$$\dot{q}_{sl} = \frac{\partial H_c}{\partial \psi_l} \ , \ \dot{v}_{sl} = \frac{\partial H_c}{\partial \psi_{l+5}} \ ,$$

$$\dot{\psi}_l = - \frac{\partial H_c}{\partial q_{sl}} \ , \ \dot{\psi}_{l+5} = - \frac{\partial H_c}{\partial v_{sl}} \ . \quad (6.6a)$$

Dla $F_{sln}^{(0)}$ minimalizujących czas t_k słuszne jest równanie [59]:

$$H_c(q_{s1},\ldots q_{s5}, v_{s1},\ldots v_{s5}, \dot{v}_{s1},\ldots \dot{v}_{s5}, F_{s1n}^{(0)},\ldots F_{s5n}^{(0)}, \psi_1,\ldots \psi_{10}) =$$

$$= \sup H_c(q_{s1},\ldots q_{s5}, v_{s1},\ldots v_{s5}, \dot{v}_{s1},\ldots \dot{v}_{s5}, F_{s1n},\ldots F_{s5n}, \psi_1,\ldots \psi_{10}). \quad (6.6b)$$

Przy optymalnej strategii napędzania MRP funkcja H_c osiąga kres górny na zbiorze sygnałów wejściowych.

Jeśli kinematyka trajektorii zadanej jest zdefiniowana, wtedy w powyższych rozważaniach należy uwzględnić równanie:

$$q_{sl}(\tau) - q_{slz}(\tau) = 0 \ , \quad (6.6c)$$

gdzie: $l=1+5$, τ- parametr kinematyczny, $q_{slz}(\tau)$ - współrzędne naturalne wynikające z kinematyki trajektorii zadanej.

Ze względu na złożoność analityczną równań (6.5b i (6.5c) wyznaczenie analitycze $F_{sln}^{(0)}$ i odpowiadających im minimalnoczasowych sygnałów wyjściowych jest bardzo trudne. Także obliczenia numeryczne byłyby skomplikowane i dlatego spróbujemy rozwiązać problem minimalnoczasowych sił napędowych dla pojedynczego l-tego siłownika uproszczonego. Uproszczenie to polega na przyjęciu, że moment bezwładności tego siłownika jest równy efektywnemu momentowi bezwładności $J_{sl}=D_{sll}=$ const(patrz równanie 5.3)). Dla tych uproszczeń równania ruchu mają postać

$$F_{sln} = J_{sl} \dot{v}_{sl} \ . \quad (6.7)$$

Równanie (6.7) zapiszemy w postaci równań stanu

$$\dot{q}_{sl} = v_{sl} \quad , \tag{6.8a}$$

$$\dot{v}_{sl} = F_{sln}/J_{sl} \quad . \tag{6.8b}$$

Zgodnie z formułą (6.6) tworzymy funkcję

$$H_c = \psi_1 v_{sl} + \psi_2 F_{sln}/J_{sl} \quad .$$

Z formuł (6.6a) otrzymujemy równania określające ψ_1 i ψ_2:

$$\dot{\psi}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = \psi_{10} \quad , \tag{6.9a}$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1 \quad \Rightarrow \quad \psi_2 = -\psi_{10} t + \psi_{20} \quad ,$$

gdzie ψ_{10} i ψ_{20} - stałe całkowania. Po podstawieniu ψ_1 i ψ_2 do wzoru na H_c otrzymujemy:

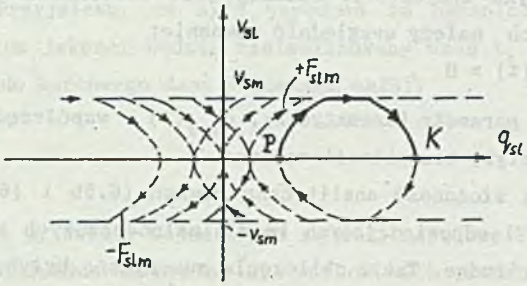
$$H_c = \psi_{10} v_{sl} + (\psi_{20} + \psi_{10} t) F_{sl}/J_{sl} \quad .$$

Funkcja H_c osiągnie kres górny, gdy siła napędowa l-tego siłownika będzie spełniać relację

$$F_{sln} = F_{slm} \operatorname{sgn}(\psi_{20} - \psi_{10} t) \quad . \tag{6.10}$$

Z równań (6.8a), (6.8b), (6.9a) i (6.9b) wynika:

$$q_{sl} \mp \frac{J_{sl}}{2F_{slm}} v_{sl}^2 = \text{const.} \tag{6.11}$$



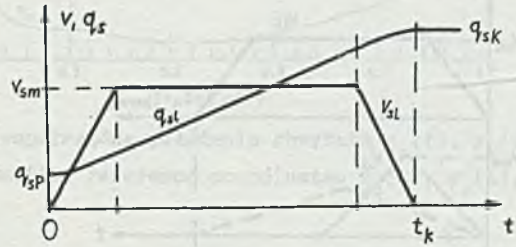
Rys.6.8. Trajektorie opisane równaniem (6.11)
Fig.6.8. Trajectories described the (6.11) equation

Rys.6.8 ilustruje trajektorie $v_{sl}(q_{sl})$ odpowiadające równaniu (6.11). Zaznaczono ekstremalne prędkości v_{lm}, jakie może osiągać element wykonawczy siłownika. Punkt P ilustruje początek, a punkt K-koniec trajektorii $v_{sl}(q_{sl})$. Rys.6.9 ilustruje q_{sl} i v_{sl} odpowiadające trajektorii PK z

rys.6.8. Te same rezultaty wynikają z klasycznego rachunku wariacyjnego, co przedstawia praca [52].

Zaprezentowana metoda pozwala określić wstępnie kinematykę trajektorii minimalnoczasowej, określonej tylko współrzędnymi zewnętrznymi punktu początkowego i końcowego. Do obliczeń przyjmujemy najmniejszą wartość efektywnej bezwładności D_{s11}, gdyż ta daje ekstremalne przyśpieszenie $\dot{v}_{s1}$.

Algorytm PLAN2 umożliwia generację trajektorii minimalnoczasowych o zdefiniowanych współrzędnych zewnętrznych punktu początkowego i końcowego. Po uruchomieniu algorytmu użytkownik definiuje parametry l_6 i λ_6 opisujące chwytak i deklaruje niezdefiniowaną kinematykę trajektorii zadanej. Następnie algorytm pyta o współrzędne zewnętrzne x,y,z początkowego punktu tra-



Rys.6.9. $v_{s1}(t)$ i $q_{s1}(t)$ odpowiadające trajektorii PK z rys.6.8
Fig.6.9. $v_{s1}(t)$ and $q_{s1}(t)$ corresponding to PK trajectory shown in Fig.6.8

jektorii. Orientację chwytaka w tym punkcie deklaruje się tak samo jak dla trajektorii ze zdefiniowaną kinematyką. Po zadeklarowaniu współrzędnych zewnętrznych chwytaka w punkcie końcowym algorytm oblicza współrzędne naturalne siłowników w tych punktach, podobnie jak w przypadku trajektorii ze zdefiniowaną kinematyką. Następnie algorytm przechodzi do segmentu opisanego w [2] i nazwanego tam KIN. Po zadeklarowaniu efektywnych momentów bezwładności siłowników na ekranie końcówki pojawiają się ich wartości, maksymalna prędkość obrotowa siłowników $v_{sm}=100\pi$ rad/sek., współrzędne naturalne siłowników punktu początkowego i końcowego oraz największy spośród pięciu - czas t_k (zilustrowany na rys.6.9). Następnie algorytm pyta, czy profile prędkości mają być modyfikowane czy nie. Modyfikacja profilów prędkości polega na ich rozciągnięciu, tak aby czas ruchu w każdym stopniu swobody był równy. Rys.6.10 przedstawia modyfikację prędkości. Po zadeklarowaniu profilów prędkości algorytm wyznacza je z zadeklarowanym krokiem dyskretyzacji

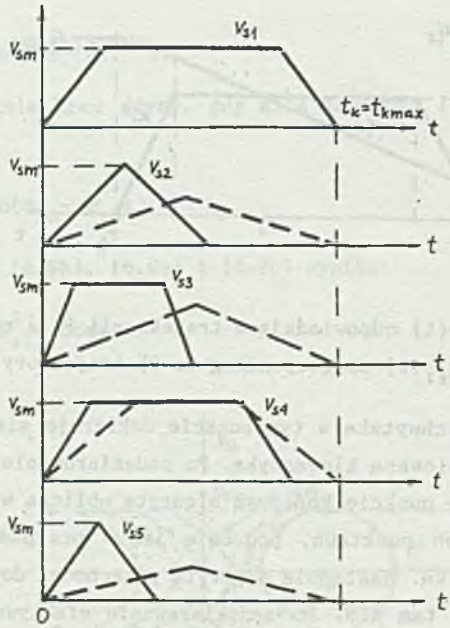
czasu ΔT. Do obliczeń algorytm przyjmuje ekstremalną siłę napędową F_{slm}= 0.968 Nm.

Efektem końcowym działania algorytmu jest utworzenie zbiorów opisujących przebiegi wszystkich współrzędnych wewnętrznych i zewnętrznych manipulatora IRb-6.

Przyjmiemy następujące parametry wejściowe algorytmu PLAN2: parametry chwytaka λ_6=0.16 m, l_6=0; chwytak pusty; współrzędne zewnętrzne punktu początkowego i końcowego jak dla punktu P i K z rys 6.5; minimalne efektywne bezwładności jak w tabeli 5.1; czas dyskretyzacji (dla DFW=2°)

$$\Delta T=\frac{(DFW/2)\cdot k_4(1-k_5)}{v_{sm}}=0.003 \text{ sek.}$$

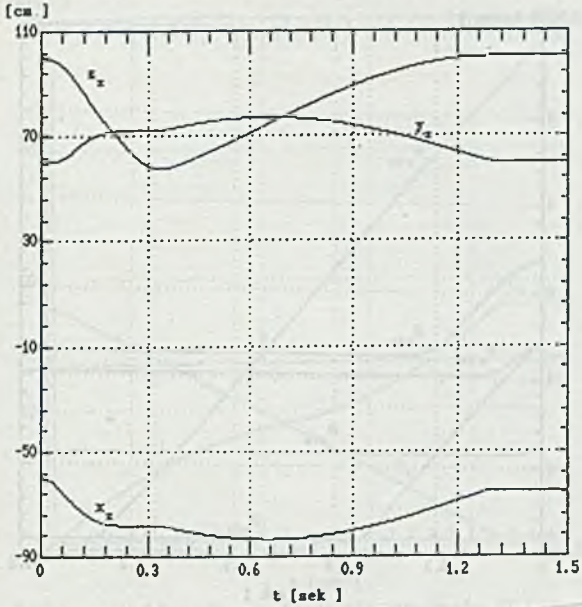
Wyniki generacji trajektorii minimalnoczasowych niemodyfikowanych przedstawiają rys.6.11a, 6.11b i 6.12.



Rys.6.10. Profile prędkości siłowników. Linią ciągłą zaznaczono profile niemodyfikowane, linią przerywaną - profile modyfikowane

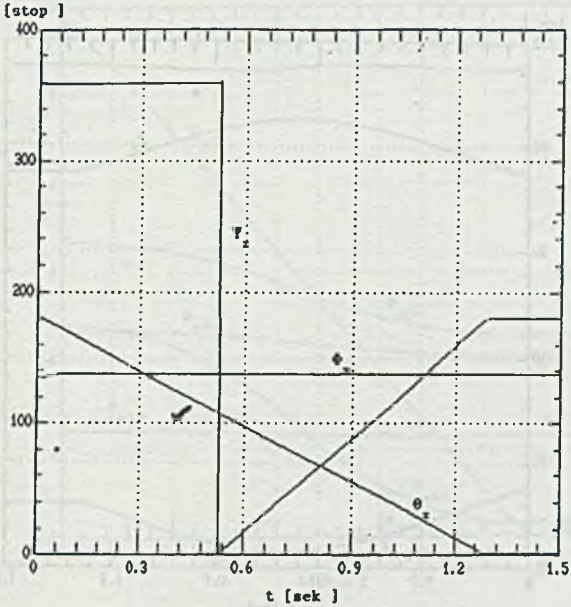
Fig.6.10. Actuator velocity profiles. Continuous line marked unmodified profiles and noncontinuous line marked modified profiles

Wyniki generacji trajektorii minimalnoczasowych modyfikowanych przedstawiają rys.6.13a, 6.13b i 6.14. Maksymalny czas ruchu jest równy około 1.3 sek., co przy deklarowanym czasie dyskretyzacji daje 436 punktów podporowych.



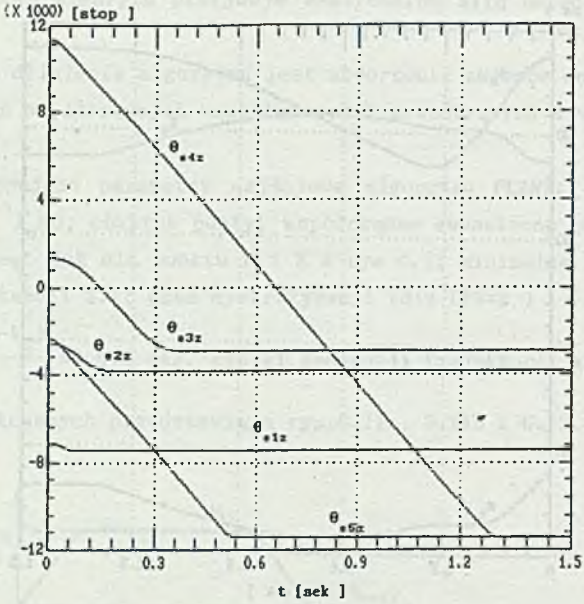
Rys.6.11a. Zadane współrzędne położenia chwytaka $x_z(t)$, $y_z(t)$, $z_z(t)$

Fig.6.11a. Task position reference coordinates $x_z(t)$, $y_z(t)$, $z_z(t)$



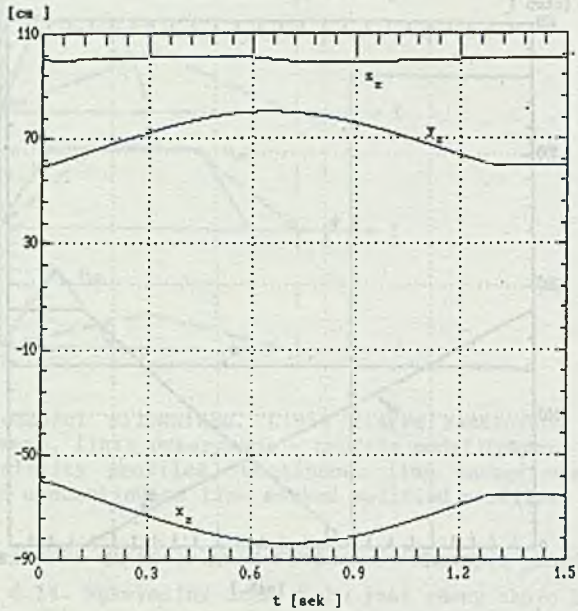
Rys.6.11b. Zadane współrzędne orientacji chwytaka $\Phi_z(t)$, $\Theta_z(t)$, $\Psi_z(t)$

Fig.6.11b. Task orientation reference coordinates $\Phi_z(t)$, $\Theta_z(t)$, $\Psi_z(t)$



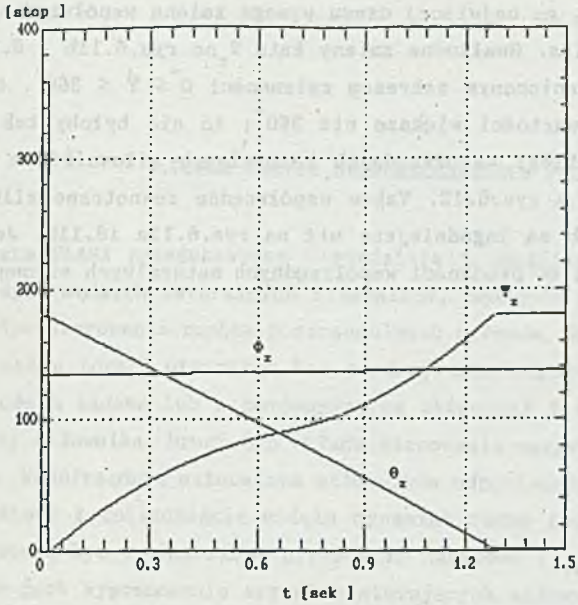
Rys.6.12. Zadane współrzędne naturalne siłowników $\theta_{s1z}(t)\div\theta_{s5z}(t)$

Fig.6.12. Actuator natural reference coordinates $\theta_{s1z}(t)\div\theta_{s5z}(t)$



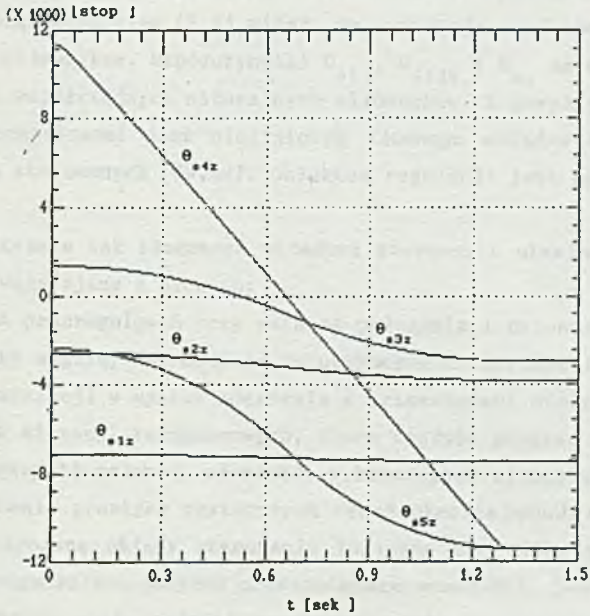
Rys.6.13a. Zadane współrzędne położenia chwytaka $x_z(t)$, $y_z(t)$, $z_z(t)$

Fig.6.13a. Task position reference coordinates $x_z(t)$, $y_z(t)$, $z_z(t)$



Rys.6.13b. Zadane współrzędne orientacji chwytaka $\Phi_z(t)$, $\Theta_z(t)$, $\Psi_z(t)$

Fig.6.13b. Task orientation reference coordinates $\Phi_z(t)$, $\Theta_z(t)$, $\Psi_z(t)$



Rys.6.14. Zadane współrzędne naturalne siłowników $\Theta_{s1z}(t) \div \Theta_{s5z}(t)$

Fig.6.14. Actuator natural reference coordinates $\Theta_{s1z}(t) \div \Theta_{s5z}(t)$

Z rys.6.12 widać, że najwięcej czasu wymaga zmiana współrzędnej naturalnej czwartego siłownika. Gwałtowne zmiany kąta Ψ_z na rys.6.11b i 6.13b spowodowane są jego ograniczonym zakresem zmienności $0^\circ \leq \Psi \leq 360^\circ$. Gdyby kąt Ψ_z mógł przybierać wartości większe niż 360°, to nie byłoby tak gwałtownych jego zmian. Przebiegi współrzędnych naturalnych siłowników z rys.6.14 są łagodniejsze niż z rys.6.12. Także współrzędne zewnętrzne zilustrowane na rys.6.13a i 6.13b są łagodniejsze niż na rys.6.11a i6.11b. Jest to wynik modyfikacji profilów prędkości współrzędnych naturalnych siłowników.

7.DOBÓR NASTAW SERWOMECHANIZMÓW PID

Algorytm PLAN2 przedstawiony w rozdziale 6 umożliwia generowanie przebiegów współrzędnych naturalnych siłowników, będących wartościami zadanymi dla układów sterowania ruchem poszczególnych członów. Układy sterowania mogą pracować w torach otwartych bez porównywania współrzędnej naturalnej z jej wartością zadaną lub z porównywaniem aktualnej i zadanej współrzędnej naturalnej siłownika. Drugi typ układu sterowania nazywa się serwomechanizmem [38]. Współrzędnym naturalnym siłowników odpowiadają siły reakcji ruchu F_{sl} określone z dokładnością modelu dynamiki ruchu (równanie (5.2)). Siły reakcji muszą być zrównoważone przez siły napędowe F_{sln}. Zadaniem serwomechanizmów jest wypracowanie sygnałów sterujących siłowniki u_l, zapewniających wytworzenie wymaganych sił napędowych. Sygnały sterujące u_l wypracowane są na podstawie sygnałów błędów będących różnicą między zadanymi i aktualnymi wartościami współrzędnych naturalnych siłowników. Z modelu dynamiki opisanego równaniem (5.2) widać, że występuje wzajemne oddziaływanie dynamiczne siłowników. Współczynniki D_{slj}, D_{sljk} i D_{sl} są silnie nieliniowymi funkcjami współrzędnych naturalnych siłowników. Z powyższego wynika, że MRP z serwomechanizmami jest nieliniowym złożonym układem sterowania o wielu zmiennych sterowanych [39,59]. Obiektem regulacji jest oczywiście manipulator .

Jednocześnie tak złożonemu układowi sterowania stawia się wiele wymagań [38]. Najważniejsze z nich to:

a) brak przeregulowań przy zmianie położenia i orientacji członów, które mogłyby doprowadzić do uszkodzenia chwytaka lub obiektu manipulacji w wyniku zderzenia z przeszkodami otaczającymi robot;

b) brak wibracji rezonansowych, ktore mogłyby powstać wskutek skończonej sztywności członów, elementów wykonawczych siłowników itp.

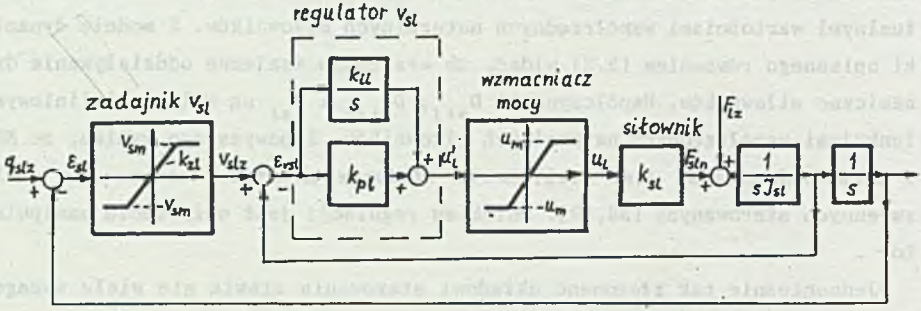
Znalezienie prostych użytecznych reguł określających warunki, przy których tak złożone układy sterowania (opisane dużą liczbą parametrów) będą spełniały wymienione powyżej najważniejsze wymagania, jest niemożliwe. Dlatego poczynimy wiele założeń upraszczających umożliwiających analizę tych układów sterowania. Siły wzajemnego oddziaływania dynamicznego, siły tarcia

i grawitacji potraktujemy jako zakłócenia. Stosując te uproszczenia, możemy przekształcić równania dynamiki zespołu siłownik-człon do następującej postaci:

$$F_{s1n} = D_{s11}\ddot{q}_{s1} - (-F_{s1} + D_{s11}\ddot{q}_{s1}^{*}) = D_{s11}\ddot{q}_{s1} - F_{1z} \quad (7.1)$$

F_{1z} jest siłą zakłócającą ruch 1-tego siłownika, określoną wyrażeniem w nawiasie, w którym F_{s1} wynika z formuł (3.8), (3.12), (3.13) i (5.2). W rzeczywistości obok tak zdefiniowanego zakłócenia występują inne nieznane czynniki zakłócające. Kolejnym uproszczeniem będzie pominięcie interakcji wzajemnej siłowników. Uproszczenie to pozwoli potraktować każdy z serwomechanizmów jako autonomiczny [59]. Ze względu na korzystne własności dynamiczne (w sensie sterowania) rozważymy serwomechanizmy o strukturze kaskadowej z pomocniczym regulatorem prędkości [38]. Kolejnym uproszczeniem będzie założenie stałości efektywnych bezwładności siłowników $D_{s11}=J_{s1}$=const.

Przyjęte założenia upraszczające, przy stosowaniu regulatorów liniowych [59], pozwalają stosować metody analizy liniowych układów sterowania. Żądanie braku przeregulowań serwomechanizmu preferuje analizę z wykorzystaniem



Rys.7.1. Schemat blokowy serwomechanizmu 1-tego stopnia swobody. v_{sm} - maksymalna szybkość v_{s1}, u_m - maksymalne sterowanie, k_{s1} - stała siłownika, q_{s1z} - wartość zadana współrzędnej naturalnej siłownika q_{s1}, s- zmienna zespolona, k_{p1} i k_{i1} - wzmocnienia toru proporcjonalnego i całkującego regulatora prędkości v_{s1}, k_{z1} -wzmocnienie zadajnika prędkości v_{s1}

Fig.7.1 Servo block diagram of 1-th degree of freedom. v_{sm} - maximal velocity v_{s1}, u_m - maximal control, k_{s1} - actuator constans, q_{s1z} - actuator natural coordinate q_{s1}, s- complex variable, k_{p1} - and k_{i1} - proportional and inegral set controller of velocity v_{s1}, k_{z1} - required velocity element set

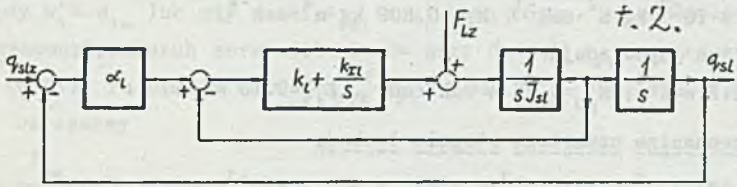
linii pierwiastkowych [57]. Przyjmiemy, że dynamikę sterowania siłowników i wzmacniaczy mocy można pominąć w stosunku do dynamiki ruchu MRP i potraktować je jako elementy bezinercyjne. Schemat blokowy tak uproszczonych serwomechanizmów przedstawia rys.7.1. Dla małych błędów ε_{sl} i sterowań u_l' schemat powyższy możemy przekształcić do postaci jak na rys.7.2. Parametry schematu z rys.7.2 są określone następującymi formułami:

$$\alpha_l=k_{zl}\ ,\quad k_l=k_{pl}k_{sl}\ ,\quad k_{Il}=k_{il}k_{sl}\ . \tag{7.2}$$

Po uwzględnieniu zmian efektywnych momentów bezwładności siłownika $J_{sl}=D_{sll}$ można określić wzmocnienia α_l, k_l, k_{Il} - a tym samym - k_{zl}, k_{pl} i k_{il}. Metodę doboru tych wzmocnień, gwarantujących brak przeregulowań q_{sl} przy skokowej zmianie q_{slz}, opracowano w Zakładzie Automatyki i Informatyki Politechniki Rzeszowskiej [21,56,61]. Metoda umożliwia sformułowanie równania nastaw:

$$\frac{27}{4}\,r_l x_l^2(x_l^2+1)^{1/2}-a_l\left\{\left[\frac{27}{4}\,r_l x_l(x_l^2-1)\right]^2+\left(\frac{27}{2}\,r_l x_l^2-1\right)^2\right\}^{1/2}=0\ , \tag{7.3}$$

gdzie: $x_l=\alpha_l/\omega_{rl}$, r_l - stosunek maksymalnej do minimalnej efektywnej bezwładności l-tego siłownika, ω_{rl} i a_l - częstotliwość rezonansowa i maksymalny moduł funkcji przejścia l-tego serwomechanizmu (oba te parametry przyjmowane są arbitralnie).



Rys.7.2. Przekształcony schemat blokowy l-tego serwomechanizmu
Fig.7.2. Modified l-th servo block diagram

Rozwiązaniem równania (7.3) są wartości x_l, które określają szukane nastawy

$$\alpha_l=x_l\cdot\omega_{rl}\ ,\quad k_l=(27/4)\cdot\alpha_l\cdot D_{sllmax}\ ,\quad k_{Il}=k_l\cdot\alpha_l\ . \tag{7.4}$$

Z pracy [21] wynika, że równanie (7.3) jest też słuszne po uwzględnieniu takich czynników, jak tarcie i grawitacja. W tej pracy przedstawiono także metodę doboru nastaw w serwomechanizmach cyfrowych.

Obliczania nastaw regulatorów serwomechanizmów ciągłych i dyskretnych przedstawia się również w pracy [61].

W robotach IRb-6 siłownikami są silniki prądu stałego sterowane twornikowo. Sterowaniem u_l są prądy twornikow. Stała tych silników

k_{s1}= 0.088 Nm/A, a maksymalna szybkość obrotowa v_{sm}= 100π rad/sek. Do syntezy przykładowych ciągłych serwomechanizmów przyjmiemy następujące wartości parametrów: u_m=11 A, $\omega_{r1}/2\pi$= 10 Hz, a_1= 0.2. Po uwzględnieniu zakresu zmian efektywnych bezwładności wynikających z tabel 5.1 i 5.4 oraz skorzystaniu z algorytmu REGU [61] otrzymamy szukane wartości nastaw.

Serwomechanizm pierwszego stopnia swobody

$r_1=(0.767\cdot10^{-3}/0.253\cdot10^{-3})\cong 3.0$, $x_1=0.191$ rad^{-1}, $\alpha_1=12.0$ sek^{-1},

$k_1=64.1\cdot10^{-3}$ kg·m^2·sek^{-1}, $k_{I1}=0.770$ kg·m^2·sek^{-2}.

Nastawom tym odpowiadają:

$k_{z1}=12.0$ sek^{-1}, $k_{p1}=0.73$ A·sek·rad^{-1}, $k_{i1}=8.75$ A·rad^{-1}·A (7.5a)

Serwomechanizm drugiego stopnia swobody

$r_2=(0.604\cdot10^{-3}/0.338\cdot10^{-3})\cong 1.78$, $x_2=0.188$ rad^{-1}, $\alpha_2=11.8$ sek^{-1},

$k_2=48.1\cdot10^{-3}$ kg·m^2·sek^{-1}, $k_{I2}=0.566$ kg·m^2·sek^{-2}.

Nastawom tym odpowiadają:

$k_{z2}=11.8$ sek^{-1}, $k_{p2}=0.548$ A·sek·rad^{-1}, $k_{i2}=6.43$ A·rad^{-1}. (7.5b)

Serwomechanizm trzeciego stopnia swobody

$r_3=(0.843\cdot10^{-3}/0.407\cdot10^{-3})\cong 2.06$, $x_3=0.190$ rad^{-1}, $\alpha_3=11.9$ sek^{-1},

$k_3=67.9\cdot10^{-3}$ kg·m^2·sek^{-1}, $k_{I3}=0.809$ kg·m^2·sek^{-2}.

Nastawom tym odpowiadają:

$k_{z3}=11.9$ sek^{-1}, $k_{p3}=0.77$ A·sek·rad^{-1}, $k_{i3}=9.15$ A·rad^{-1}. (7.5c)

Serwomechanizm czwartego stopnia swobody

$r_4=(0.274\cdot10^{-3}/0.111\cdot10^{-3})\cong 2.47$, $x_4=0.19$ rad^{-1}, $\alpha_4=11.9$ sek^{-1},

$k_4=22.1\cdot10^{-3}$ kg·m^2·sek^{-1}, $k_{I4}=0.263$ kg·m^2·sek^{-2}.

Nastawom tym odpowiadają:

$k_{z4}=11.9$ sek^{-1}, $k_{p4}=0.25$ A·sek·rad^{-1}, $k_{i4}=2.99$ A·rad^{-1}. (7.5d)

Serwomechanizm piątego stopnia swobody

$r_5=(0.172\cdot10^{-3}/0.926\cdot10^{-4})\cong 1.86$, $x_5=0.188$ rad^{-1}, $\alpha_5=11.8$ sek^{-1},

$k_5=13.7\cdot10^{-3}$ kg·m^2·sek^{-1}, $k_{I5}=0.162$ kg·m^2·sek^{-2}.

Nastawom tym odpowiadają:

$k_{z5}=11.8$ sek^{-1}, $k_{p5}=0.15$ A·sek·rad^{-1}, $k_{i5}=1.84$ A·rad^{-1}. (7.5e)

Obliczone nastawy są parametrami wejściowymi algorytmu komputerowej symulacji ruchu manipulatora IRb-6, sterowanego serwomechanizmami o strukturze jak na rys.7.1.

8. ALGORYTM OBLICZANIA STEROWAŃ I WSPÓŁRZĘDNYCH RUCHU NA PRZYKŁADZIE MRP IRb-6

Przedstawiona w rozdziale 7 metoda doboru nastaw wzmocnień regulatorów serwomechanizmów jest słuszna dla małych błędów ε_{sl} i małych sterowań u_l'. Dokładniej - wartości tych sygnałów nie mogą "nasycać" prędkości zadanych v_{slz} i sterowań u_l (patrz rys.7.1). Stan taki na ogół pojawia się w końcowej fazie pozycjonowania. W serwomechanizmach MRP stosuje się elementy przeciwdziałające nasycaniu się członu całkującego w pętli prędkości [21]. W celu zapewnienia własności czasooptymalnych, przy większych błędach ε_{sl}, serwomechanizmy powinny mieć charakter pierwiastkujący [16,60].

8.1. PRZYKŁADOWE SERWOMECHANIZMY CIĄGŁE

W naszych przykładowych serwomechanizmach prądu stałego, omówionych w rozdziale 7, zastosujemy przełącznik wyłączający tor całkujący regulatora zapobiegający jego nasycaniu się. Przełącznik ten będzie włączał tor całkowania, gdy $u_l' \leq u_{lm}$ lub gdy znaki ε_{vsl} i u_l' będą różne. Do zapewnienia własności czasooptymalnych serwomechanizmów przy dużych ε_{sl} wykorzystamy zależność (6.11). Po przyjęciu $\varepsilon_{sl}=q_{slK}-q_{sl}$, gdzie q_{slK} jest współrzędną q_{sl} końcową, otrzymamy

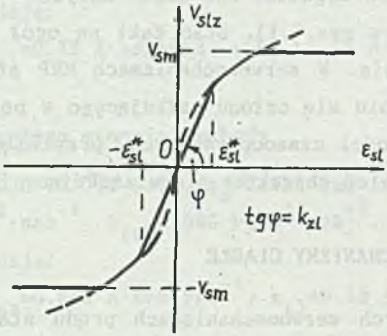
$$\varepsilon_{sl}=\mp \frac{J_{sl}}{2F_{slm}} v_{slz}^2 + \text{const.}$$

Przyjmując, że dla $\varepsilon_{sl}=0$ $v_{slz}=0$, otrzymamy const= 0, zatem

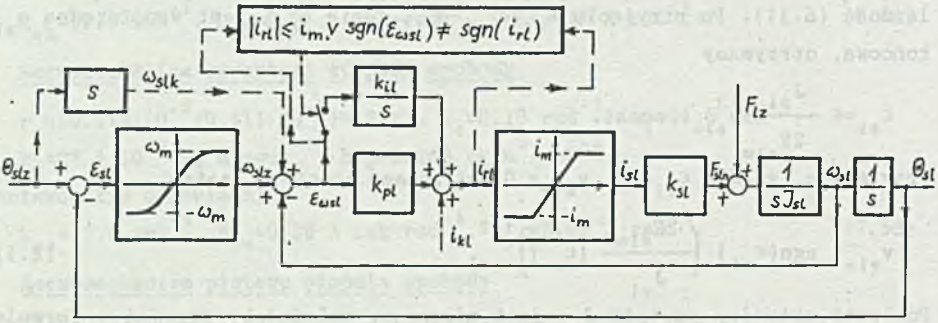
$$v_{slz}= \operatorname{sgn}(\varepsilon_{sl})\cdot\left(\frac{2F_{slm}}{J_{sl}} |\varepsilon_{sl}|\right)^{1/2}. \tag{8.1}$$

Ponieważ aktualna wartość J_{sl} jest nieznana, należałoby przyjąć w formule (8.1) minimalną wartość J_{sl}. Wynika to z rozważań w rozdziale 6. Jednak rodzi to niebezpieczeństwo przeregulowań [21,56] i dlatego przyjmiemy w tej formule maksymalną wartość J_{sl}. Formuła (8.1) opisywać będzie charakterystykę zadajnika prędkości dla $|\varepsilon_{sl}|\geq|\varepsilon_{sl}^{*}|$, co ilustruje rys.8.1. Dla robota IRb-6: $F_{slm}=k_{sl}\cdot u_m$ = 0.088 Nm/A ·11.0 A = 0.968 Nm. Ponieważ w robocie IRb-6 sterowania u_l' i u_l są prądami, a współrzędnymi naturalnymi siłowników

- kąty, wprowadzimy dalej następujące oznaczenia: $u_l'=i_{rl}$, $u_l=i_{sl}$, $u_m=i_m$, $v_{sl}=\omega_{sl}$, $q_{sl}=\theta_{sl}$, $v_m=\omega_m$. Schemat blokowy przykładowych serwomechanizmów (zbliżonych do czasooptymalnych, nie dopuszczających do nasycania się w torze całkowania) dla manipulatora IRb-6 przedstawia rys.8.2. Liniami przerywanymi zaznaczono prędkość kompensacyjną, będącą zróżniczkowanym kątem zadanym θ_{slz} oraz prąd kompensacji i_{kl}. W dalszej kolejności tego rozdziału przedstawimy algorytm obliczania współrzędnych ruchu manipulatora IRb-6,



Rys.8.1. Charakterystyka czasooptymalnego zadajnika prędkości v_{slz}
Fig.8.1. Characteristic minitime required velocity element



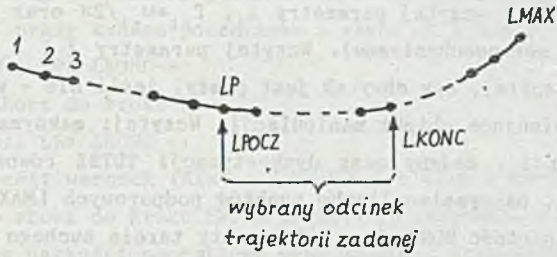
Rys.8.2. Schemat blokowy przykładowych serwomechanizmów manipulatora IRb-6
Fig.8.2. Block diagram of example IRb-6 manipulator servo

będącego odpowiedzią na sterowanie wypracowane przez te serwomechanizmy. Z prac badawczych prowadzonych w Instytucie Automatyki Politechniki Warszawskiej [19] wynika, że sprzężenie typu "feedforard" od prędkości zadanej ω_{slk} prowadzi zawsze do przeregulowań przy θ_{slz} typu "ramp".

8.2. ALGORYTM STER OBLICZANIA STEROWAŃ I WSPÓŁRZĘDNYCH RUCHU NA PRZYKŁADZIE MRP IRb-6

Autor pracy opracował algorytm STER obliczający współrzędne ruchu manipulatora IRb-6 sterowanego serwomechanizmami omówionymi w p.8.1.

Przed uruchomieniem algorytmu STER należy wygenerować zbiór QCPLAN2 opisujący trajektorię zadaną chwytaka. Zbiór ten generujemy za pomocą algorytmu przedstawionego w rozdziale 6. Także konieczna jest znajomość parametrów a_l, ω_{rl}, x_l opisujących serwomechanizmy oraz maksymalnych efektywnych momentów bezwładności silników. Algorytm STER umożliwia badanie ruchu manipulatora z udziałem i bez udziału sygnałów kompensujących ω_{slk} i i_{kl}. Jeśli ustawimy wartość zmiennej maszynowej KOMP= 0, to sygnały te są pomijane, jeśli KOMP= 1, to sygnały te uczestniczą w sterowaniu. Przy KOMP= 1 możemy odłączyć regulatory przez ustawienie zmiennej maszynowej REG > 0. Przy odłączonych regulatorach sygnał sterujący $i_{rl}=i_{kl}$ (patrz rys.8.2), co umożliwia badanie ruchu manipulatora IRb-6 przy sterowaniu w torach otwartych tylko sygnałem i_{kl}. Jeśli REG ≤ 0, to regulatory uczestniczą w sterowaniu.



Rys.8.3. Wybrany odcinek trajektorii zadanej
Fig.8.3. Chosen fragment of required trajectory

Trajektorię zadaną definiuje się za pomocą liczby LMAX określającej numer końcowego punktu podporowego, znajdującego się w zbiorze QCPLAN2. Algorytm STER umożliwia badanie realizacji kolejnych odcinków trajektorii zadanej. Liczby LPOCZ i LKONC określają numery początkowego i końcowego punktu podporowego wybranego odcinka zilustrowanego na rys.8.3. Dla pierwszego odcinka LPOCZ= 1. Po przebadaniu tego odcinka algorytm tworzy zbiór WPSTER, w którym znajdują się między innymi: numer LP, czas TZK i warunki początkowe następnego po LKONC-owym punkcie podporowym. Po ponownym uruchomieniu algorytm wczytuje LPOCZ, LKONC i czas TK końcowej chwili badania ruchu. Nastę-

pnie zostaje wczytany zbiór WPSTER opisujący parametry i stan początkowy LP punktu podporowego. Jeśli LPOCZ≠LP, to obliczenia są przerwane. W przeciwnym przypadku zostaje przebadany odcinek trajektorii od zadanego czasu początkowego TZKP=TZK. Czasy TZK znajdują się w zbiorze QCPLAN2 i przypisane są poszczególnym punktom podporowym. Jeśli deklarowany czas TK jest większy od czasu TZK przypisanego ostatniemu LMAX punktowi podporowemu, wtedy po zakończeniu badania tak zadeklarowanego odcinka wpisywane jest do zbioru WPSTER między innymi LP=LMAX i TZK=TK. Kolejne uruchomienie algorytmu nastąpi dla LPOCZ=LKONC=LMAX i TK>TZKP=TZK (równego TK dla poprzedniego odcinka). Umożliwia to badanie ruchu po czasie przypisanym ostatniemu punktowi podporowemu trajektorii zadanej.

Przedstawimy krok po kroku bardziej szczegółowy opis algorytmu STER:

Krok 1. Wczytaj LPOCZ, LKONC i TK wybranego odcinka trajektorii zadanej.

Krok 2. Jeśli LPOCZ<1 - przerwij obliczenia z podaniem odpowiedniego komunikatu.

Jeśli LPOCZ>LKONC lub TK ≤ 0 - skocz do kroku 1.

Krok 3. Jeśli LPOCZ=1 - otwórz zbiór QCPLAN2 i inne zbiory, do których będą wpisywane współrzędne sterowania i ruchu, przyjmij KX= 0, otwórz zbiór WPSTER i wczytaj parametry x_l, $f_{rl}=\omega_{rl}/2\pi$ oraz a_l (opisujące pięć serwomechanizmów). Wczytaj parametry l i λ_6 opisujące chwytak. Zapytaj, czy chwytak jest pusty, jeśli nie - wczytaj parametry opisujące obiekt manipulacji. Wczytaj: maksymalną amplitudę prądu i_m, zadany czas dyskretyzacji TDYSZ równań ruchu i sterowania, maksymalną liczbę punktów podporowych LMAX w zbiorze QCPLAN2 i wartość KOMP. Wczytaj momenty tarcia suchego startowego i ruchowego siłowników. Wczytaj ze zbioru QCPLAN2 numer LP,współrzędne naturalne członów i czas TZP zadanego początkowego punktu podporowego. Jeśli KOMP= 1, otwórz zbiór, do którego będą wpisywane prądy i_{lk}, zapytaj o wartość REG, otwórz zbiór ISPLAN2, w którym są prądy i_{lk}, wczytaj je dla pierwszego punktu podporowego i przyjmij je jako prądy zadane początkowe. Wczytaj wartości początkowe współrzędnych naturalnych członów i ich pierwszych pochodnych po czasie oraz wartości początkowe prądów w torach całkowania serwomechanizmów. Skocz do segmentu VZAD, który po wczytaniu maksymalnych efektywnych bezwładności wyznacza parametry opisujące charakterystykę zadajnika prędkości (zilustrowaną na rys.8.1) oraz oblicza nastawy k_{pl} i k_{il} regulatorów. Sprawdź, czy LKONC≤ LMAX, jeśli tak, to skocz do kroku 4, jeśli nie - zakończ

obliczenia z odpowiednim komunikatem.

Jeśli LPOCZ>1, przyjmij KX= 0, otwórz zbiór WPSTER (utworzony przy LPOCZ= 1 w kroku 12) i wczytaj go. Wczytany zbiór prześlij na końcówkę. Sprawdź, czy LKONC≤ LMAX, jeśli tak - skocz do kroku 4, jeśli nie - zakończ obliczenia z odpowiednim komunikatem.

Krok 4. Jeśli LP≠LPOCZ -

przerwij obliczenia z odpowiednim komunikatem.

Jeśli LP=LPOCZ -

jeśli LPOCZ= 1 -

skocz do kroku 5,

jeśli LPOCZ≠1 -

jeśli warunek (LP=LMAX i TK> TZKP lub LP<LMAX) nie jest spełniony, to przerwij obliczenia z odpowiednim komunikatem,

jeśli jest spełniony - otwórz zbiór QCPLAN2 i inne zbiory, do których będą wpisywane współrzędne sterowania i ruchu. Jeśli KOMP=1, to otwórz zbiór ISPLAN2, w którym znajdują się prądy i_{1k}, wczytaj współrzędne naturalne członów i czas TZP zadanego LP punktu podporowego ze zbioru QCPLAN2. Jeśli KOMP=1, to wczytaj ze zbioru ISPLAN2 wartości prądów i_{1k}, przyjmij je jako prądy zadane początkowe i skocz do kroku 5.

Krok 5. Jeśli LP< LKONC -

skocz do kroku 6.

Jeśli LP> LKONC -

jeśli warunek (KX=1 i LP>LMAX lub KX=0 i LP≤LMAX) jest spełniony - skocz do kroku 12. W przeciwnym przypadku przyjmij KX=1 i zadane wartości początkowe współrzędnych naturalnych członów przyjmij jako wartości zadane końcowe. Jeśli KOMP= 1, to przyjmij prądy zadane początkowe jako zadane końcowe. Wyznacz liczbę ND kroków dyskretyzacji na aktualnym odcinku trajektorii. Wyznacz zadany czas końcowy TZK.

Jeśli KX= 1 - zmniejsz LP o jeden i zwiększ TZK o TDYSZ.

Jeśli KX= 0 -

przyjmij aktualny czas TX=TZP, wyznacz liczbę kroków dyskretyzacji ND, przyjmij aktualny krok dyskretyzacji TDYS=TDYSZ, przyjmij aktualny numer kroku dyskretyzacji NX=0 i skocz do kroku 7.

Jeśli LP=LKONC -

jeśli LKONC<LMAX -

skocz do kroku 6.

Jeśli LKONC=LMAX -

jeśli LP=LPOCZ -

przyjmij TZP=TZKP,

jeśli TZP<TK -

wykonaj operacje już omówione w tym kroku dla LP>LKONC, oprócz przypisania wartości KX=1.

Jeśli TZP=TK -

przyjmij TZK=TZP i skocz do kroku 12.

Jeśli TZP>TK -

podaj komunikat informujący, że zadeklarowany czas końcowy jest za krótki, przyjmij TZK=TZP i skocz do kroku 12.

Jeśli LP≠LPOCZ -

przyjmij TZP=TZK i wykonaj operacje już omówione w tym kroku dla LP=LKONC i LKONC=LMAX i LP=LPOCZ, oprócz przypisania TZP= TZKP.

Jeśli LKONC>LMAX -

podaj komunikat "LKONC>LMAX" i przerwij obliczenia.

Krok 6. Wczytaj współrzędne naturalne członów kolejnego punktu podporowego ze zbioru QCPLAN2 i przyjmij je jako współrzędne zadane końcowe aktualnego odcinka trajektorii. Wczytaj z tego zbioru czas przypisany temu punktowi i przyjmij go jako czas zadany końcowy TZK. Wyznacz liczbę kroków dyskretyzacji ND na aktualnie wybranym odcinku trajektorii (ograniczonym aktualnie wczytanym i poprzednim punktem podporowym). Wyznacz aktualny krok dyskretyzacji TDYS.Przyjmij numer aktualnego kroku dyskretyzacji NX=0 i aktualny czas TX=TZP. Jeśli KOMP=1, wczytaj prądy zadane końcowe ze zbioru ISPLAN2, odpowiadające kolejnemu punktowi podporowemu.

Krok 7. Wyznacz aktualne wartości zadane współrzędnych naturalnych członów, siłowników oraz ich pochodnych (z uwzględnieniem ograniczeń prędkości siłowników $v_m=100\pi$ rad/sek). Wyznacz wartości początkowe współrzędnych naturalnych siłowników i ich pochodne. Jeśli KOMP=1 - zadane prądy początkowe przyjmij jako zadane aktualnie. Wyznacz współrzędne zewnętrzne chwytaka odpowiadające powyższym współrzędnym wewnętrznym i zapisz je do odpowiednich zbiorów.

Krok 8. Wyznacz ε_{sl} jako różnice między zadanymi aktualnymi i wartościami początkowymi współrzędnych naturalnych siłowników. Wyznacz ω_{slz} i ε_{wsl}. ε_{wsl} są różnicami między ω_{slz} i wartościami początkowymi pochodnych współrzędnych naturalnych siłowników. Wyznacz prądy i_r

oraz i_s z uwzględnieniem: ograniczenia i_m=11 A, wyłączenia torów całkowania przy ich nasycaniu się, prądów początkowych w tych torach i prądów zadanych aktualnie.

Krok 9. Zapisz w odpowiednich zbiorach wartości współrzędnych sterowania obliczone w kroku 8.

Krok 10. Jeśli KOMP=0-

przyjmij TPOCZ=TX, TKONC=TX+TDYS, NX=NX+1, skocz do segmentu ODY. W segmencie ODY wyznaczane są siły napędowe F_{sln} pomniejszone o siły tarcia suchego (formuła (3.12)) i tarcia lepkiego (formuła (3.13)), a następnie rozwiązywane jest zadanie proste dynamiki napędów manipulatora (formuły (3.27a i 3.27b)).Po rozwiązaniu tego zadania uwzględniane są ograniczenia dla współrzędnych naturalnych członów i ich pochodnych, wynikające z nierówności (4.2).

Jeśli KOMP=1 -

jeśli REG≤0 -

wykonaj te same operacje jak dla KOMP=0 w tym kroku.

Jeśli REG>0 -

przyjmij i_s równe prądom zadanym aktualnie. Wykonaj te same operacje jak dla KOMP=0 w tym kroku.

Krok 11. Przyjmij współrzędne naturalne członów i ich pochodne obliczone w segmencie ODY jako wartości początkowe .

Jeśli NX≥ND -

przyjmij wartości zadane końcowe współrzędnych naturalnych członów jako ich wartości zadane początkowe. Jeśli KOMP=1, to prądy zadane końcowe przyjmij jako prądy zadane początkowe. Przyjmij LP=LP+1, TZP=TZK i skocz do kroku 5.

Jeśli NX<ND -

przyjmij TX=TKONC i skocz do kroku 7.

Krok 12. Jeśli LP≤LMAX -

wpisz do zbioru WPSTER: LP, LMAX, i_m, TDYSZ, KOMP, parametry definiujące chwytak i obiekt manipulacji, wartości początkowe współrzędnych naturalnych członów i wartości początkowe ich pochodnych, parametry zadajników prędkości, nastawy regulatorów, TZK, REG, wartości sił tarcia suchego F_{sits} i F_{sitr} oraz innych parametrów. Zakończ obliczenia.

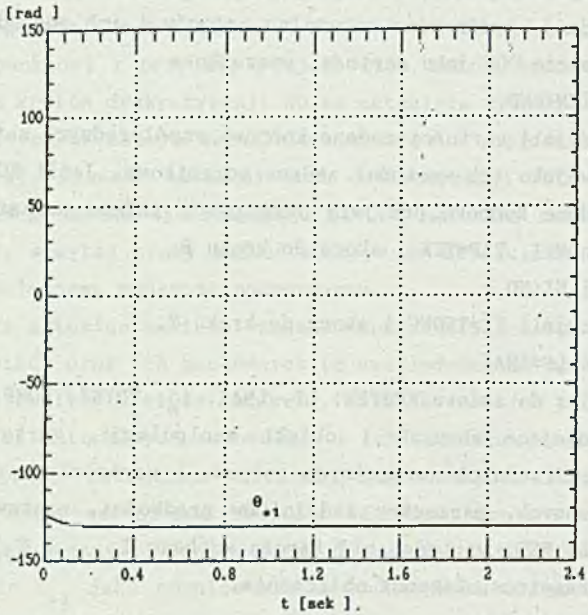
Jeśli LP>LMAX -

przyjmij LP=LMAX i wykonaj te same operacje jak dla LP≤LMAX w tym kroku.

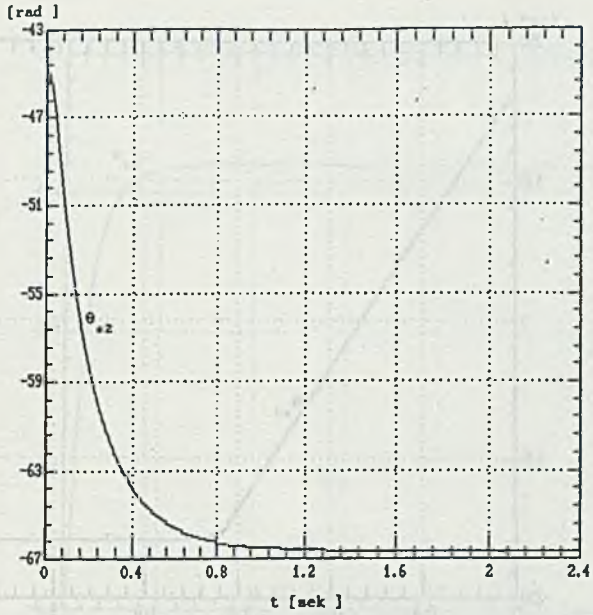
Algorytm STER uwzględnia tarcie lepkie przekładni falowych. Przekładnie te są stosowane w pierwszym, czwartym i piątym stopniu swobody manipulatora IRb-6. Współczynniki tarcia lepkiego tych przekładni przedstawiono w rozdziale czwartym, w punkcie 4.2.

Jeśli zadany czas dyskretyzacji TDYSZ jest większy niż różnica czasów TZK i TZP (przypisanych kolejnym punktom podporowym zbioru QCPLAN2), to czas dyskretyzacji TDYSZ=TZK-TZP.

Korzystając z algorytmu PLAN2, wygenerowano zbiór QCPLAN2, opisujący trajektorię zadaną w postaci skokowej [59]. Zbiór ten ma dwa główne punkty podporowe - początkowy P i końcowy K. Współrzędne tych punktów są takie same jak na rys.6.5. Jeden dodatkowy punkt podporowy posłużył do ustawienia zerowych wartości początkowych i jego współrzędne zewnętrzne pokrywały się ze współrzędnymi zewnętrznymi punktu P. Po uruchomieniu algorytmu zadeklarowano parametry wejściowe następująco: LPOCZ=1, LKONC=3, TK=3.0 sek, $x_1 \div x_5$ jak w (7.5a÷e), $f_{r1} \div f_{r5}$= 10 Hz, $a_1 \div a_5$=0.2, chwytak przykładowy (patrz punkt 4.2, l_6=0, λ_6= 0.16 m) pusty, i_m= 11 A, LMAX=3, KOMP= 0, F_{s1ts}= 0.07 Nm, $F_{s2ts}=F_{s3ts}$= 0.33 Nm, $F_{s4ts}=F_{s5ts}$= 0.06 Nm, $F_{s1tr}=F_{s1ts}$, $F_{s2tr}=F_{s3tr}$= 0.28 Nm, $F_{s4tr}=F_{s4ts}=F_{s5tr}=F_{s5ts}$ = 0.06 Nm (patrz uzupełnienie E), wartości początkowe współrzędnych naturalnych członów są równe wartościom zada-

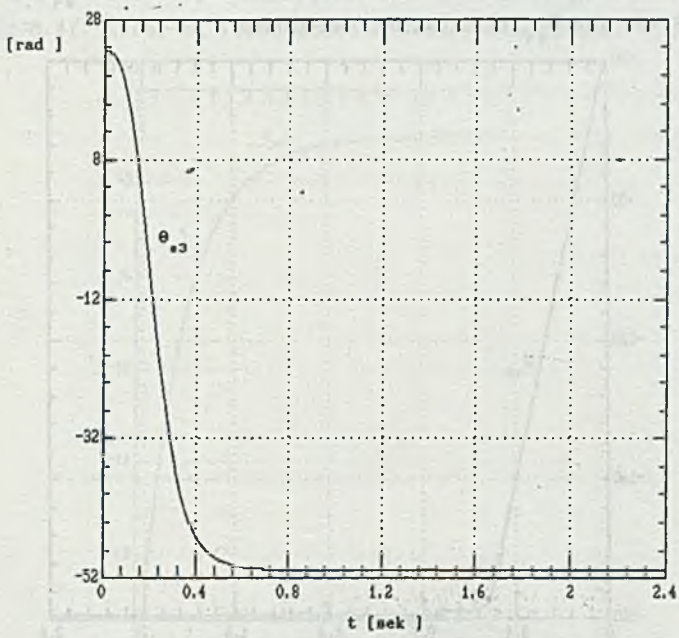


Rys.8.4a. Współrzędna naturalna pierwszego siłownika $\theta_{s1}(t)$
Fig.8.4a. The $\theta_{s1}(t)$ actuator natural coordinate



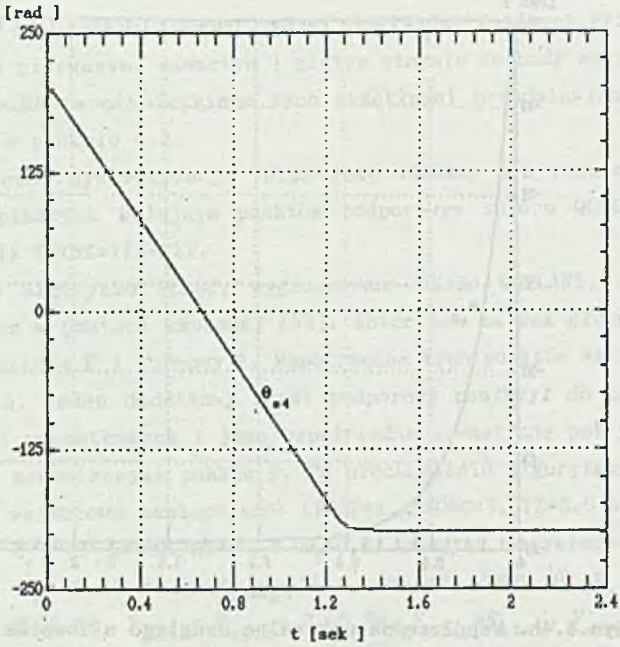
Rys.8.4b. Współrzędna naturalna drugiego siłownika $\theta_{s2}(t)$

Fig.8.4b. The $\theta_{s2}(t)$ actuator coordinate



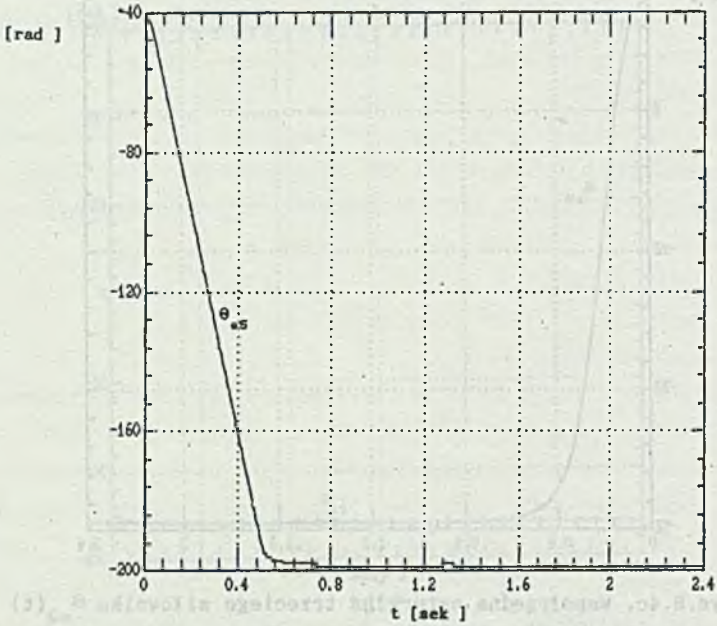
Rys.8.4c. Współrzędna naturalna trzeciego siłownika $\theta_{s3}(t)$

Fig.8.4b. The $\theta_{s3}(t)$ actuator coordinate



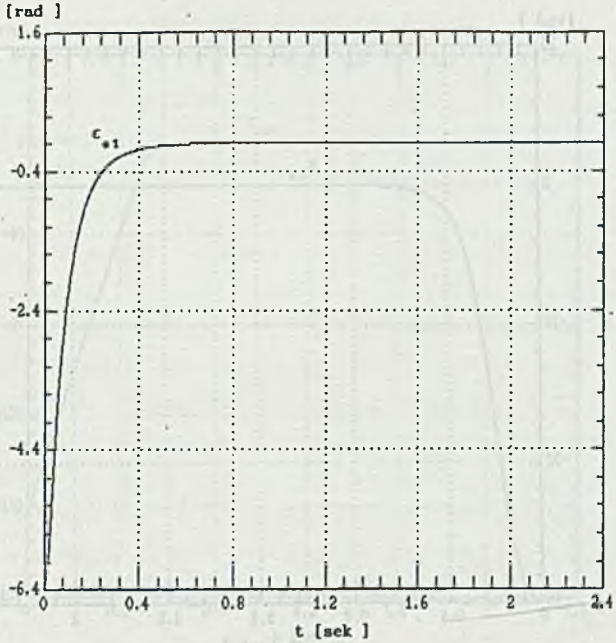
Rys.8.4d. Współrzędna naturalna czwartego siłownika $\theta_{s4}(t)$

Fig.8.4d. The $\theta_{s4}(t)$ actuator coordinate



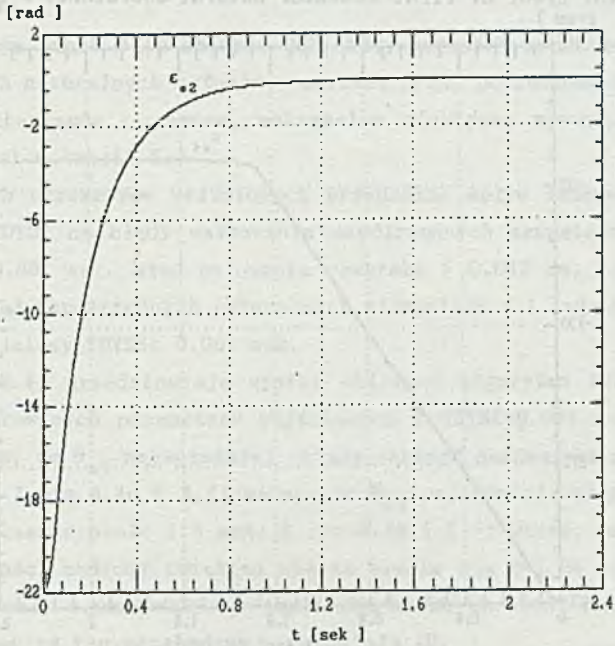
Rys.8.4e. Współrzędna naturalna piątego siłownika $\theta_{s5}(t)$

Fig.8.4e. The $\theta_{s5}(t)$ actuator coordinate



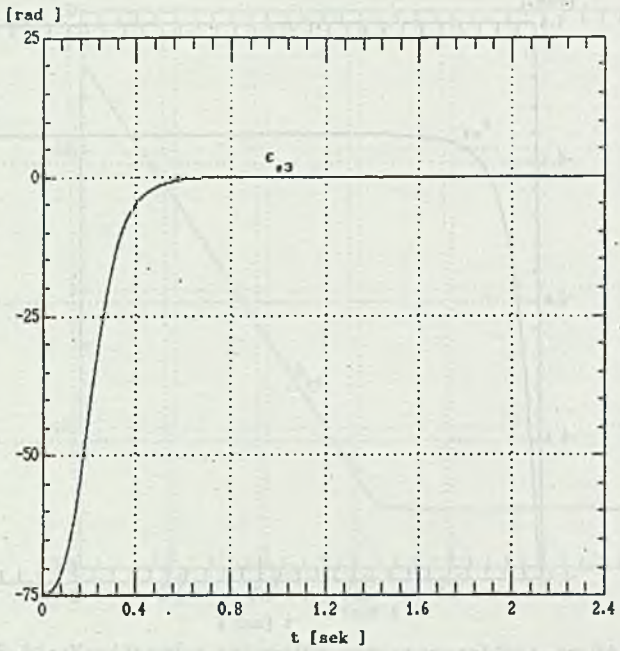
Rys.8.4f. Błąd współrzędnej naturalnej pierwszego siłownika $\varepsilon_{s1}(t)$

Fig.8.4f. Error of first actuator natural coordinate $\varepsilon_{s1}(t)$



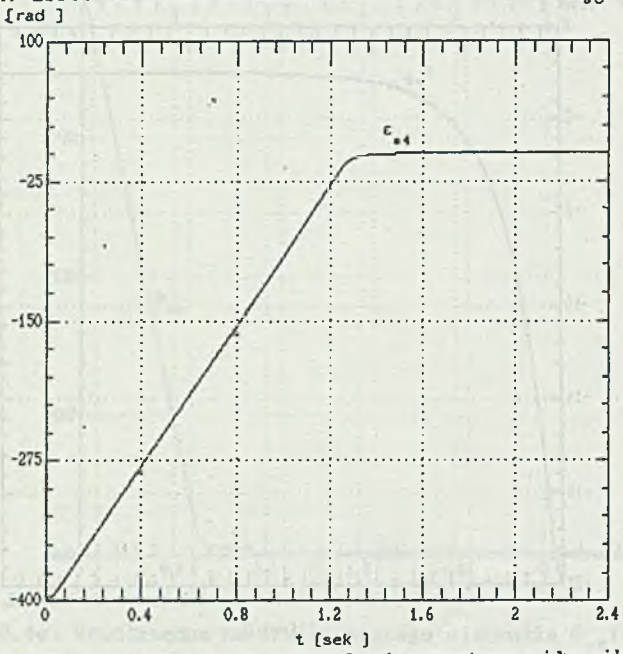
Rys.8.4g. Błąd współrzędnej naturalnej drugiego siłownika $\varepsilon_{s2}(t)$

Fig.8.4g. Error of first actuator natural coordinate $\varepsilon_{s2}(t)$



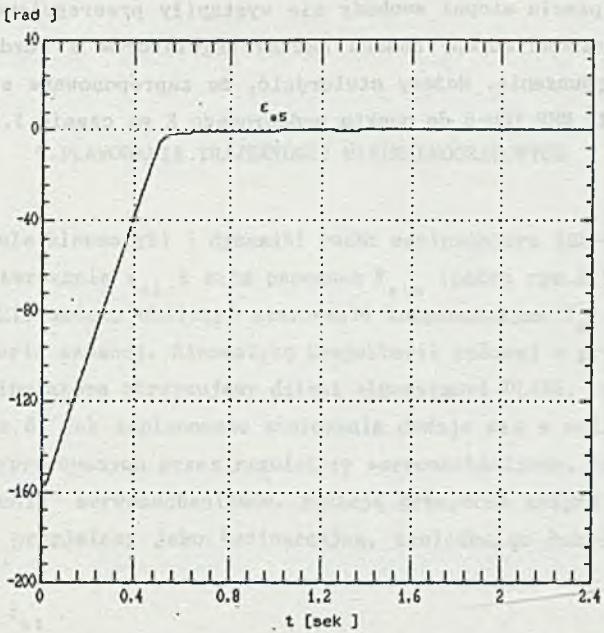
Rys.8.4h. Błąd współrzędnej naturalnej trzeciego siłownika $\varepsilon_{s3}(t)$

Fig.8.4h. Error of first actuator natural coordinate $\varepsilon_{s3}(t)$



Rys.8.4i. Błąd współrzędnej naturalnej czwartego siłownika $\varepsilon_{s4}(t)$

Fig.8.4i. Error of first actuator natural coordinate $\varepsilon_{s4}(t)$



Rys.8.4j. Błąd współrzędnej naturalnej piątego siłownika $\varepsilon_{s5}(t)$

Fig.8.4j. Error of first actuator natural coordinate $\varepsilon_{s5}(t)$

nym opisującym punkt P (w zbiorze QCPLAN2), wartości początkowe pochodnych współrzędnych naturalnych członów - zerowe, prądy początkowe torów całkowania serwomechanizmów - zerowe, maksymalne efektywne momenty bezwładności siłowników jak w tabeli 5.4 .

Dla takich parametrów wejściowych przebadano wpływ zadanego czasu dyskretyzacji TDYSZ na błędy całkowania współrzędnych zewnętrznych chwytaka. Dla TDYSZ≅ 0.001 sek. błąd położenia chwytaka ≤ 0.042 cm, błąd orientacji ≤0.075° i błąd współrzędnych naturalnych siłowników ≤ 1 rad. W dalszych badaniach przyjmiemy TDYSZ= 0.001 sek.

Rys.8.4a÷8.4j przedstawiają wyniki obliczeń algorytmu STER dla wcześniej zadeklarowanych parametrów wejściowych i TDYSZ=0.001 sek. Z rys.8.4a i 8.4f wynika, że θ_{s1} najwcześniej osiąga wartość zadaną, bo po czasie około 0.64 sek. Z rys.8.4d i 8.4i widać, że θ_{s4} najpóźniej osiąga wartość zadaną, bo po czasie około 1.5 sek. Z rys.8.4e i 8.4j widać, że θ_{s5} po osiągnięciu wartości zadanej zwiększa się na krótko dla t≈1.28 sek. Wzrost ten jest bardzo mały w porównaniu z amplitudą skoku wartości zadanej θ_{s5}. Dokładniej przebieg ten przebadamy w rozdziale 10.

W żadnym z pięciu stopni swobody nie wystąpiły przeregulowania, co potwierdza skuteczność metody doboru nastaw regulatorów z rozdziału 7 dla tak zadanego wymuszenia. Możemy stwierdzić, że zaproponowane serwomechanizmy doprowadziły MRP IRb-6 do punktu podporowego K po czasie 1.5 sek.

9. PLANOWANIE TRAJEKTORII MINIMALNOCZASOWYCH

Znając modele kinematyki i dynamiki ruchu manipulatora IRb-6 oraz równania wiążące sterowania i_{sl} z siłą napędową F_{sln} (patrz rys.8.2) wytwarzaną przez siłowniki, możemy obliczyć sterowanie kompensacyjne i_{kl} przed realizacją trajektorii zadanej. Kinematykę trajektorii zadanej w przestrzeni wewnętrznej manipulatora otrzymujemy dzięki algorytmowi PLAN2, przedstawionemu w rozdziale 6. Tak zaplanowane sterowania dodaje się w węźle sumacyjnym do sterowań wypracowanych przez regulatory serwomechanizmów. Idea ta pozwala na "odciążenie" serwomechanizmów. Funkcję przejścia zespołów wzmacniacz mocy-siłownik przyjmiemy jako bezinercyjną, zaniedbując bezwładności elektryczne.

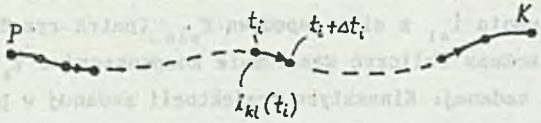
$$F_{sln} = k_{sl} \cdot i_{kl} \quad . \tag{9.1}$$

Sterowania i_{kl} minimalizujące czas wzdłuż trajektorii zadanej opisują równania (6.6a+b) z równaniami (6.6c). W równaniach tych F_{sln} wyrażamy poprzez i_{kl}, stosując formułę (9.1). Równania (6.6c) są zapisem zdefiniowanej kinematyki trajektorii zadanej w przestrzeni wewnętrznej manipulatora, wygenerowanej przez algorytm PLAN2, opisany w rozdziale 6. Rozwiązanie równań (6.6a+b) jest trudne ze względu na złożoność równań dynamiki MRP.

Algorytm PLAN2 generuje kinematykę trajektorii zadanej w przestrzeni wewnętrznej dla zdefiniowanej i niezdefiniowanej kinematyki w przestrzeni zewnętrznej. W przypadku zdefiniowanej kinematyki czas jest parametrem nie mającym związku z dynamiką ruchu manipulatora IRb-6. W przypadku niezdefiniowanej kinematyki czas jest parametrem wynikającym z uproszczonego równania dynamiki (6.7). W obu przypadkach kinematyka trajektorii zadanej w przestrzeni wewnętrznej ze zbioru QCPLAN2 określona jest przez punkty podporowe, opisane współrzędnymi naturalnymi $\theta'_1 \div \theta'_5$ oraz czasem t. Na życzenie użytkownika algorytm PLAN2 może wygenerować kinematykę trajektorii zadanej z czasem t= -1 sek, dla każdego punktu podporowego w zbiorze QCPLAN2. Tak wygenerowany zbiór umożliwia przypisanie punktom podporowym czasów wynikających z jego minimalizacji.

Wobec złożoności równań (6.6a+b) zastosujemy programowanie dynamiczne [59] sterowań i_{kl} minimalizujących czas wzdłuż trajektorii z obliczoną już

kinematyką znajdującą się w zbiorze QCPLAN2. Programowanie dynamiczne sterowań i_{kl} polega na wyznaczaniu takich wartości i_{kl}, które minimalizują czas przejścia ze stanu poprzedniego do aktualnego, poczynając od stanu końcowego. W naszym przypadku kolejne stany ruchu opisują punkty podporowe ze zbioru QCPLAN2. Rys.9.1 ilustruje to programowanie.



Rys.9.1. Ilustracja programowania dynamicznego sterowania i_{kl}. P - początek trajektorii, K - koniec trajektorii

Fig.9.1. Dynamic programming of control i_{kl}. P - trajectory beginning, K - trajectory end

Przyjmując stałe prędkości i przyśpieszenia współrzędnych naturalnych między kolejnymi punktami podporowymi możemy opisać w postaci analitycznej [52] sterowania stanu i MRP w chwili t_i.

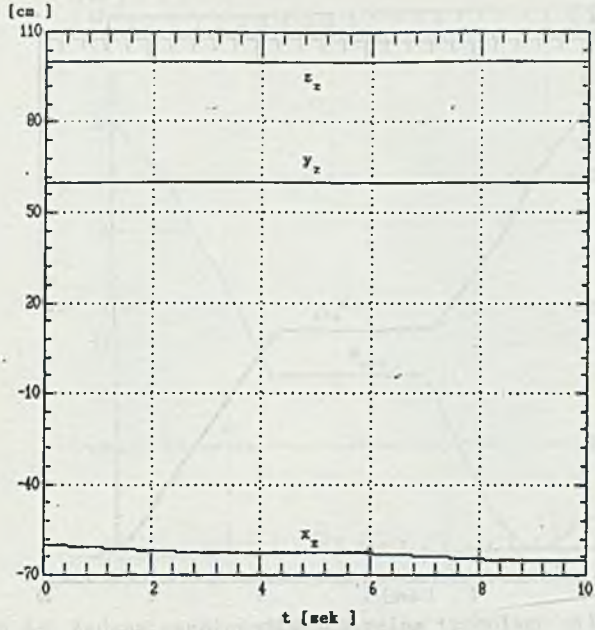
$$i_{kl}=\frac{A_l}{(\Delta t_i)^2}+\frac{B_l}{\Delta t_i}+C_l \quad . \tag{9.2}$$

A_l, B_l, C_l są stałymi współczynnikami dla i-tego stanu, wynikającymi z formuły (9.1) i równań dynamiki (5.2). Postacie analityczne tych współczynników zamieszczono w uzupełnieniu F. Z równań (9.2) możemy wyznaczyć czasy minimalne $\Delta t_{ilmin}(i_{kl}=\mp i_m)$ odpowiadające sterowaniu minimalnemu lub maksymalnemu $i_{kl}=\mp i_m$. Minimalnym czasem Δt_i będzie

$$\Delta t_i=\min_l \Delta t_{ilmin} > 0 \text{ (i każde } |i_{kj}(\Delta t_{ilmin})|\le i_m) \ . \tag{9.3}$$

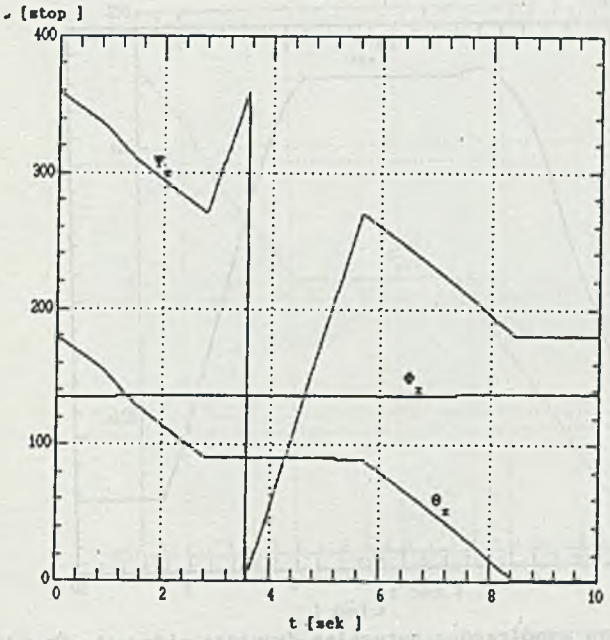
Minimalny czas Δt_i, określony formułą (9.3), determinuje najkrótszy czas Δt_{ilmin}, przy którym amplituda żadnego ze sterowań i_{kj} nie przekroczy i_m przy przejściu z i-tego do i+1-szego punktu podporowego.

W pracach [26] i [43] proponuje się metody planowania trajektorii minimalnoczasowych wymagające dodatkowo sparametryzowania toru ruchu jego długością s, obliczenia w każdym punkcie podporowym pseudoprędkości $\mu=ds/dt$ i pseudoprzyśpieszeń $d\mu/dt$.



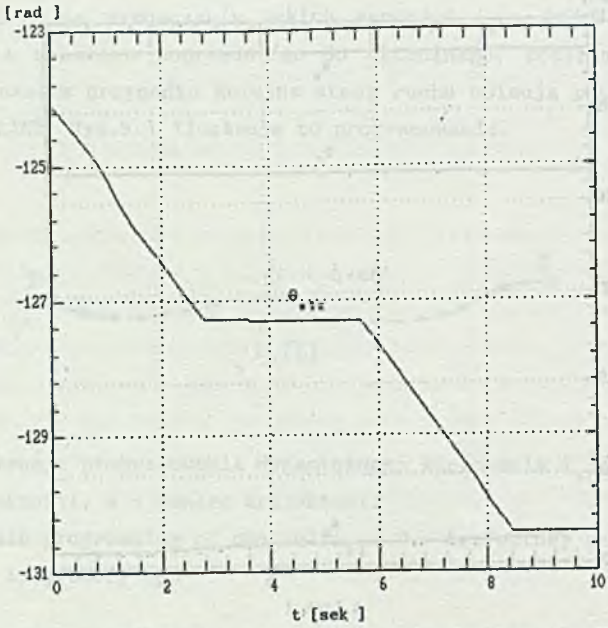
Rys.9.2a. Zadane współrzędne położenia chwytaka $x_z(t)$, $y_z(t)$, $z_z(t)$

Fig.9.2a. Task position reference coordinates $x_z(t)$, $y_z(t)$, $z_z(t)$



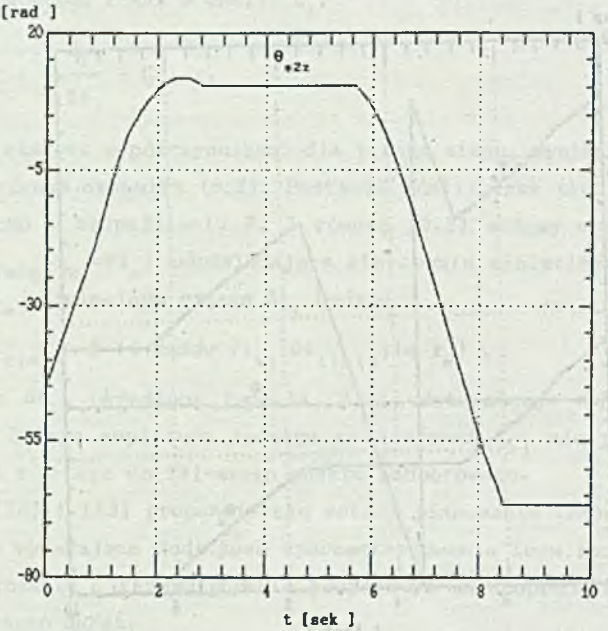
Rys.9.2b. Zadane współrzędne orientacji chwytaka $\Phi_z(t)$, $\Theta_z(t)$, $\Psi_z(t)$

Fig.9.2b. Task orientation reference coordinates $\Phi_z(t)$, $\Theta_z(t)$, $\Psi_z(t)$



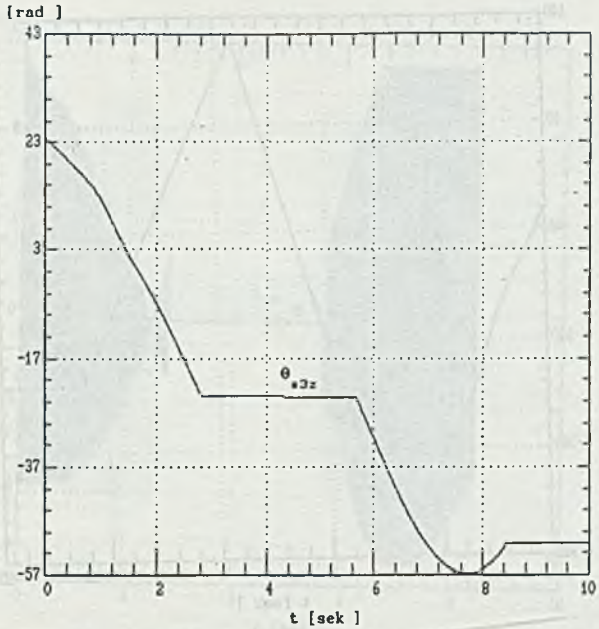
Rys.9.3a. Zadana współrzędna naturalna pierwszego siłownika $\Theta_{s1z}(t)$

Fig.9.3a. First actuator reference natural coordinate $\Theta_{s1z}(t)$



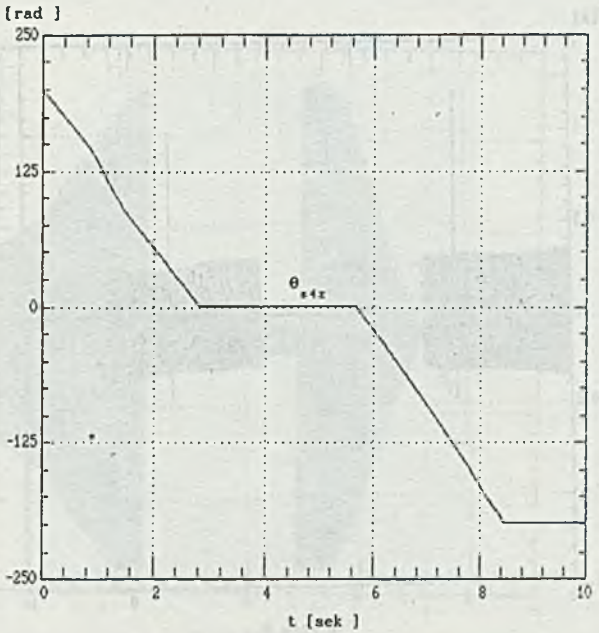
Rys.9.3b. Zadana współrzędna naturalna drugiego siłownika $\Theta_{s2z}(t)$

Fig.9.3b. Second actuator reference natural coordinate $\Theta_{s2z}(t)$



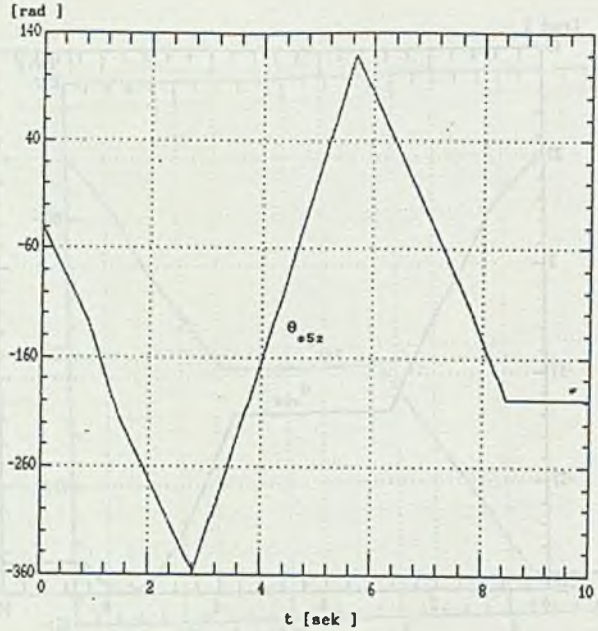
Rys.9.3c. Zadana współrzędna naturalna trzeciego siłownika $\theta_{s3z}(t)$

Fig.9.3c. Third actuator reference natural coordinate $\theta_{s3z}(t)$



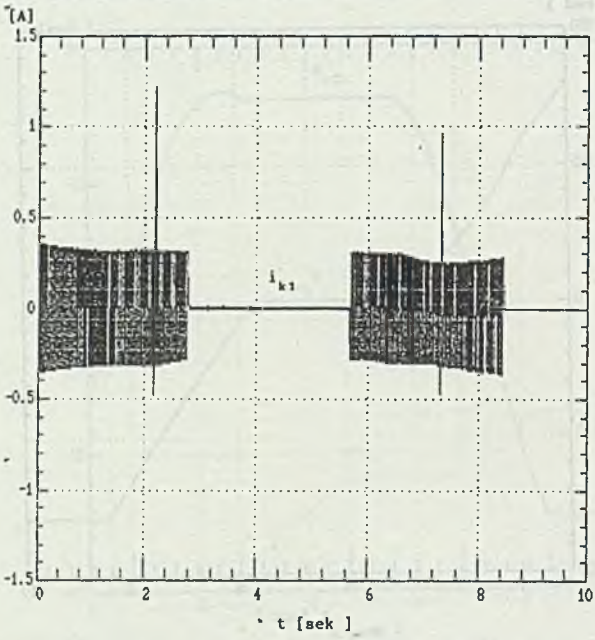
Rys.9.3d. Zadana współrzędna naturalna czwartego siłownika $\theta_{s4z}(t)$

Fig.9.3d. Fourth actuator reference natural coordinate $\theta_{s4z}(t)$



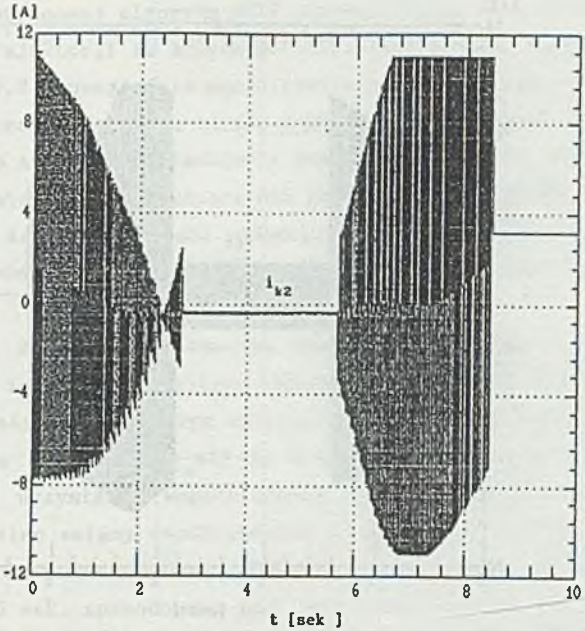
Rys.9.3e. Zadana współrzędna naturalna piątego siłownika $\theta_{e5z}(t)$

Fig.9.3e. Fifth actuator reference natural coordinate $\theta_{e5z}(t)$



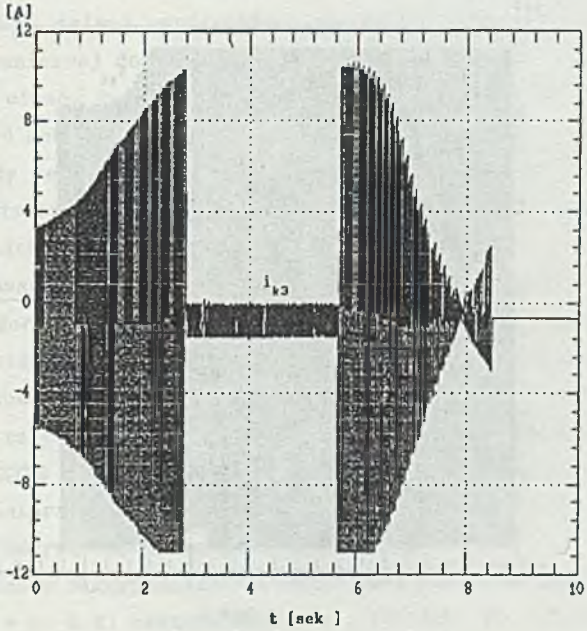
Rys.9.3f. Sterowanie kompensacyjne pierwszego siłownika $i_{k1}(t)$

Fig.9.3f. The $i_{k1}(t)$ first actuator planning control



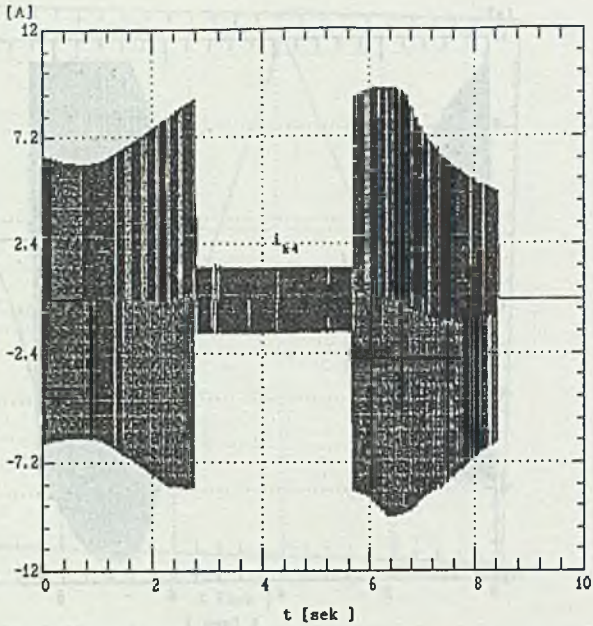
Rys.9.3g. Sterowanie kompensacyjne drugiego siłownika $i_{k2}(t)$

Fig.9.3g. The $i_{k2}(t)$ second actuator planning control



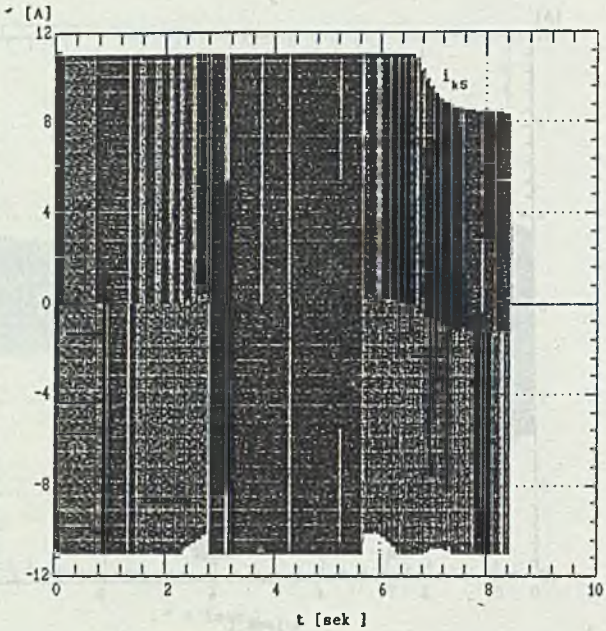
Rys.9.3h. Sterowanie kompensacyjne trzeciego siłownika $i_{k3}(t)$

Fig.9.3h. The $i_{k3}(t)$ third actuator planning control



Rys.9.3i. Sterowanie kompensacyjne czwartego siłownika $i_{k4}(t)$

Fig.9.3i. The $i_{k4}(t)$ fourth actuator planning control



Rys.9.3j. Sterowanie kompensacyjne piątego siłownika $i_{k5}(t)$

Fig.9.3j. The $i_{k5}(t)$ fifth actuator planning control

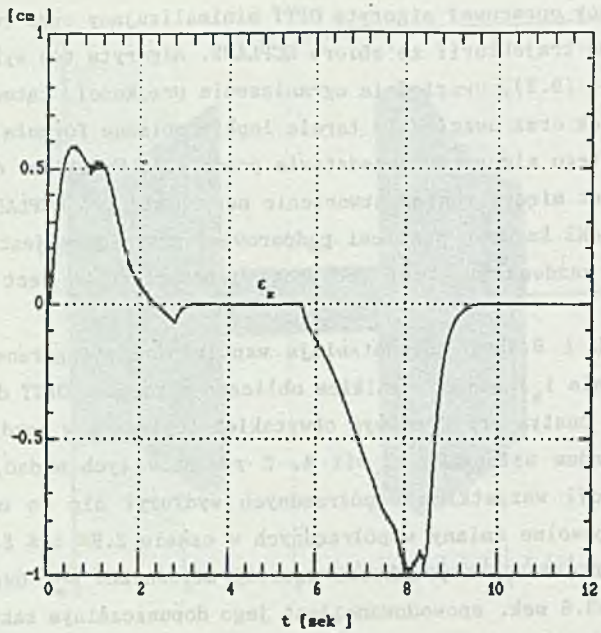
Autor pracy opracował algorytm OPTT minimalizujący czas ruchu manipulatora IRb-6 po trajektorii ze zbioru QCPLAN2. Algorytm ten wykorzystuje równania (9.1) i (9.2), uwzględnia ograniczenia prędkości kątowej siłowników ω_m=100πrad/sek oraz uwzględnia tarcie lepkie opisane formułą (3.13). Szczegółowy opis tego algorytmu przedstawia praca [2]. Wynikiem działania tego algorytmu jest między innymi utworzenie nowych zbiorów QCPLAN2 i ISPLAN2. W zbiorze QCPLAN2 każdemu punktowi podporowemu przypisany jest czas. W zbiorze ISPLAN2 każdemu punktowi podporowemu przypisanych jest pięć sterowań i_{kl} i czas.

Rys.9.2a÷b i 9.3a÷j przedstawiają współrzędne zewnętrzne i wewnętrzne oraz sterowania i_{kl} będące wynikiem obliczeń algorytmu OPTT dla trajektorii z rys.6.7, z pustym przykładowym chwytakiem (opisanym w rozdziale 4) i maksymalnym prądem siłowników i_m=11 A. Z rysunków tych widać, że planowany czas realizacji wszystkich współrzędnych wydłużył się do około 8.4 sek. Szczególnie powolne zmiany współrzędnych w czasie 2.8≤ t ≤ 5.6 sek. spowodowane są ograniczeniem prędkości kątowej siłowników ω_m. Gwałtowna zmiana kąta Ψ dla t≅3.6 sek. spowodowana jest jego dopuszczalnym zakresem zmian .Z rys.9.3f÷i widać, że sterowania i_{k1}÷i_{k4} zmieniają szybko znak, z dużą amplitudą w czasie 0 ≤ t ≤ 2.8 sek. oraz 5.6≤ t ≤ 8.4 sek. Dla czasu 2.8 ≤ t ≤5.6 sek. amplituda zmian tych sterowań jest stosunkowo mała. Spowodowane jest to gwałtowną zmianą współrzędnej naturalnej zadanej piątego siłownika od wartości granicznej dolnej do górnej, co ilustruje rys.9.3e.

Z rys.9.3j widać, że amplituda zmian sterowania i_{k5} jest równa i_m=11 A do czasu t≅ 8.4 sek. Po tym czasie wszystkie sterowania i_{kl} przyjmują stałe wartości. Prądy te zapewniają wytworzenie przez siłowniki sił zapewniających stan statyczny manipulatora o konfiguracji odpowiadającej końcowemu punktowi K trajektorii zadanej.

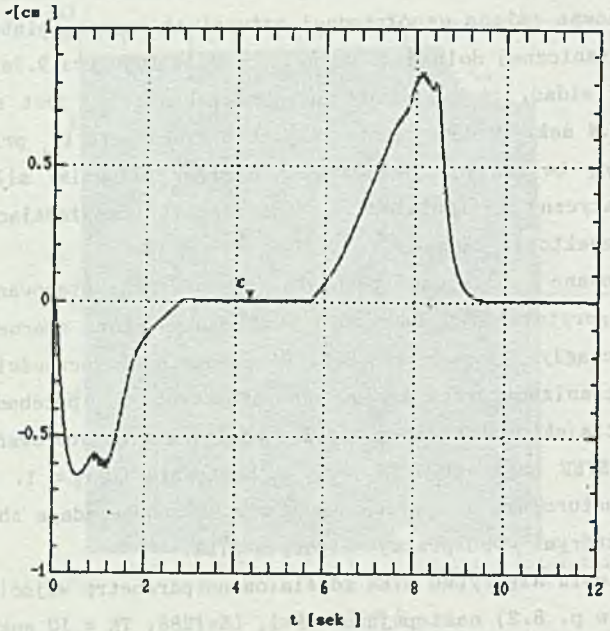
Tak zaplanowane współrzędne naturalne członów oraz sterowania i_{kl} wykorzystamy w algorytmie STER badającym ruch manipulatora sterowanego serwomechanizmami ciągłymi jak na rys.8.2. Do zbadania skuteczności wspomagania pracy serwomechanizmów przez zaplanowane sterowania i_{kl} przebadamy realizację ruchu po trajektorii zadanej bez i z udziałem tych sterowań, przyjmując w algorytmie STER parametr KOMP = 0, a następnie KOMP = 1. Zaplanowanym współrzędnym naturalnym i sterowaniom z rys.9.3 odpowiadają zbiory QCPLAN2 i ISPLAN2, z którymi współpracuje algorytm STER.

Po uruchomieniu algorytmu STER zdefiniowano parametry wejściowe (opisane w rozdziale 8 w p. 8.2) następująco: LP=1, LK=1286, TK = 10 sek., x_1÷x_5 jak w równaniach (7.5a÷e), f_{rl}= 10 Hz, a_l= 0.2 , chwytak przykładowy i pusty, maksymalna amplituda sterowań i_m= 11 A, TDYSZ = 0.001 sek., LMAX = 1286,



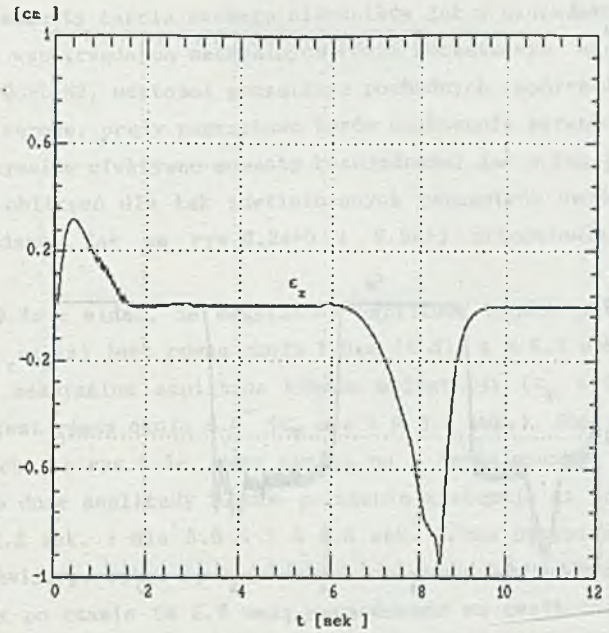
Rys.9.4a. Błąd współrzędnej położenia chwytaka $\varepsilon_x(t)=x_z(t)-x(t)$

Fig.9.4a. Error of task position coordinate $\varepsilon_x(t)=x_z(t)-x(t)$



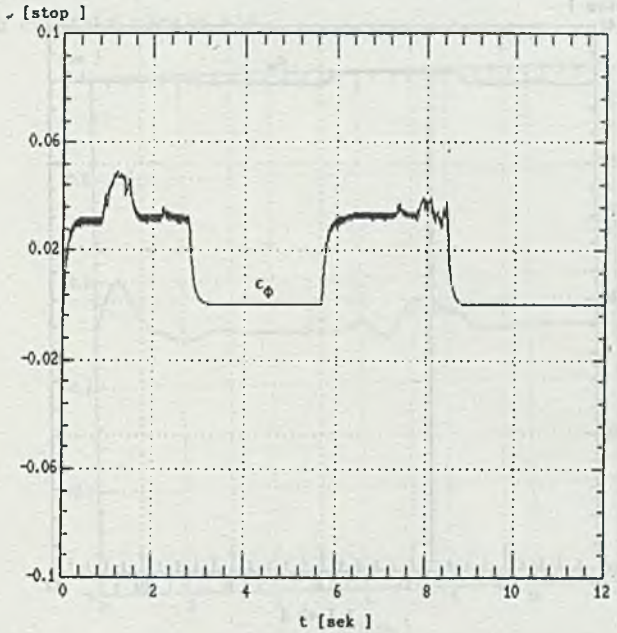
Rys.9.4b. Błąd współrzędnej położenia chwytaka $\varepsilon_y(t)=y_z(t)-y(t)$

Fig.9.4b. Error of task position coordinate $\varepsilon_y(t)=y_z(t)-y(t)$



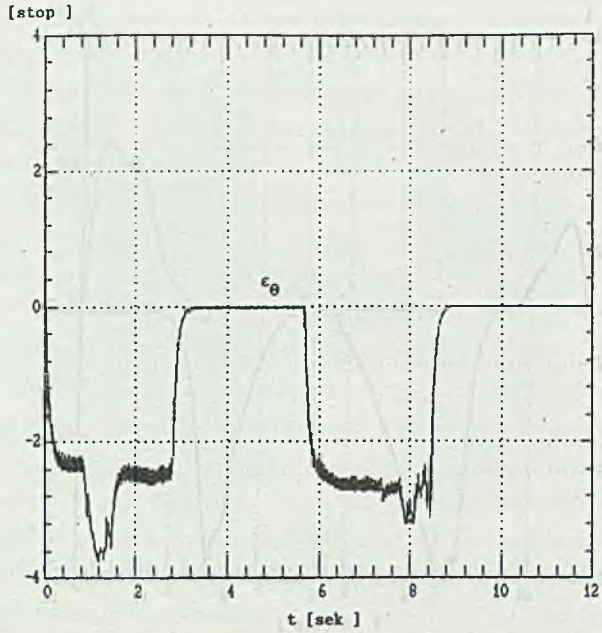
Rys.9.4c. Błąd współrzędnej położenia chwytaka $\varepsilon_z(t)=z_z(t)-z(t)$

Fig.9.4c. Error of task position coordinate $\varepsilon_z(t)=z_z(t)-z(t)$



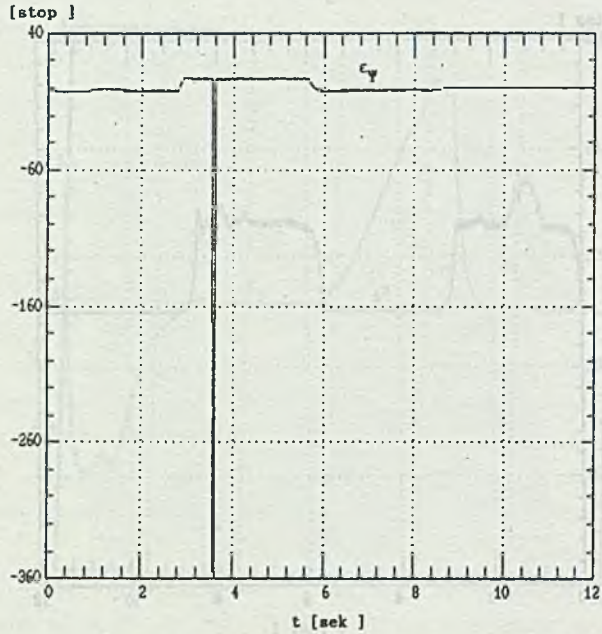
Rys.9.5a. Błąd współrzędnej orientacji chwytaka $e_\Phi(t)=\Phi_z(t)-\Phi(t)$

Fig.9.5a. Error of task orientation coordinate $e_\Phi(t)=\Phi_z(t)-\Phi(t)$



Rys.9.5b. Błąd współrzędnej orientacji chwytaka $e_\theta(t)=\theta_z(t)-\theta(t)$

Fig.9.5b. Error of task orientation coordinate $e_\theta(t)=\theta_z(t)-\theta(t)$



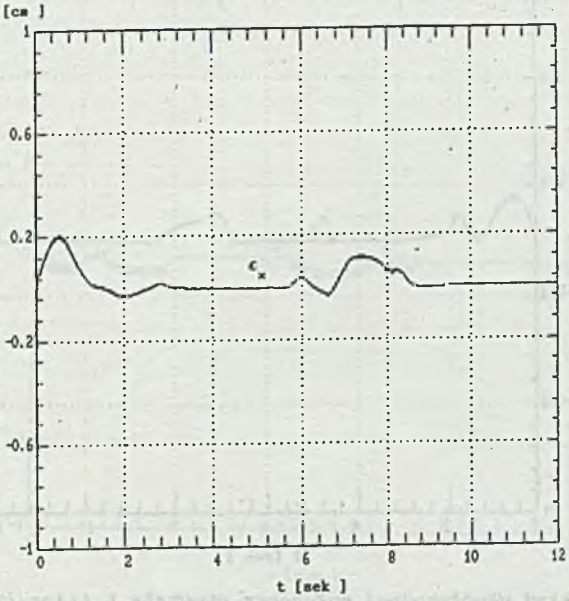
Rys.9.5c. Błąd współrzędnej orientacji chwytaka $e_\Psi(t)=\Psi_z(t)-\Psi(t)$

Fig.9.5c. Error of task orientation coordinate $e_\Psi(t)=\Psi_z(t)-\Psi(t)$

KOMP = 0, momenty tarcia suchego siłowników jak w uzupełnieniu E, wartości początkowe współrzędnych naturalnych równe początkowym wartościom zadanym w zbiorze QCPLAN2, wartości początkowe pochodnych współrzędnych naturalnych członów - zerowe, prądy początkowe torów całkowania serwomechanizmów - zerowe, maksymalne efektywne momenty bezwładności jak w tabeli 5.4.

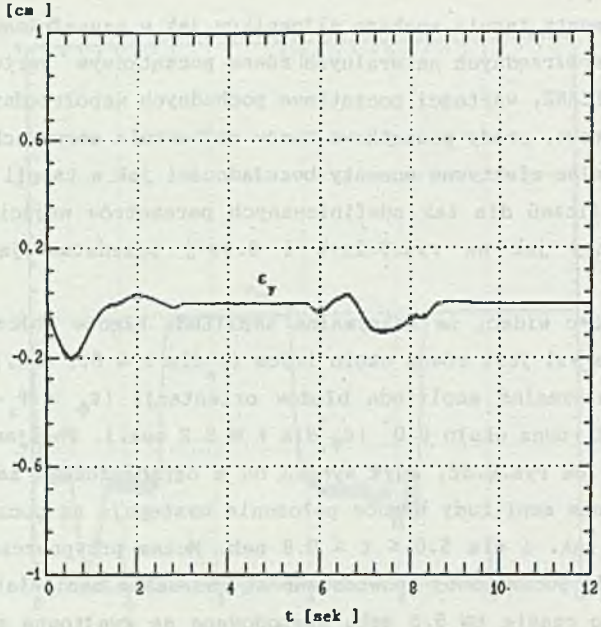
Wyniki obliczeń dla tak zdefiniowanych parametrów wejściowych i trajektorii zadanej jak na rys.9.2a÷b i 9.3a÷j przedstawiają rys.9.4a÷c i 9.5a÷c.

Z rys.9.4a÷c widać, że maksymalna amplituda błędów położenia ($\varepsilon_x=x_z-x$, $\varepsilon_y=y_z-y$, $\varepsilon_z=z_z-z$) jest równa około 1.0cm (ε_x dla $t \cong 8.1$ sek.). Z rys.9.5a÷c widać, że maksymalna amplituda błędów orientacji ($\varepsilon_\Phi = \Phi_z-\Phi$, $\varepsilon_\Theta = \Theta_z-\Theta$, $\varepsilon_\Psi=\Psi_z-\Psi$) jest równa około 8.0° (ε_Ψ dla $t \cong 3.2$ sek.). Pomijamy tu "pik" dla $t \cong 3.6$ sek. na rys.9.5c, gdyż wynika on z ograniczonego zakresu zmian Ψ. Stosunkowo duże amplitudy błędów położenia występują na początku ruchu dla $0 \le t \le 2.2$ sek. i dla $5.6 \le t \le 8.8$ sek. Można przypuszczać, że te duże błędy w chwili początkowej spowodowane są rozruchem manipulatora, natomiast duże błędy po czasie $t \cong 5.6$ sek. spowodowane są gwałtowną zmianą kierunku zmian zadanej współrzędnej Θ_{s5} (co pokazano na rys.9.3e). Z rys.9.4a÷c i 9.5a÷c widać, że manipulator osiągnie punkt końcowy K trajektorii zadanej (z rys.6.5) po czasie $t \cong 9.6$ sek., kiedy wszystkie błędy współrzędnych zewnętrznych chwytaka zerują się.



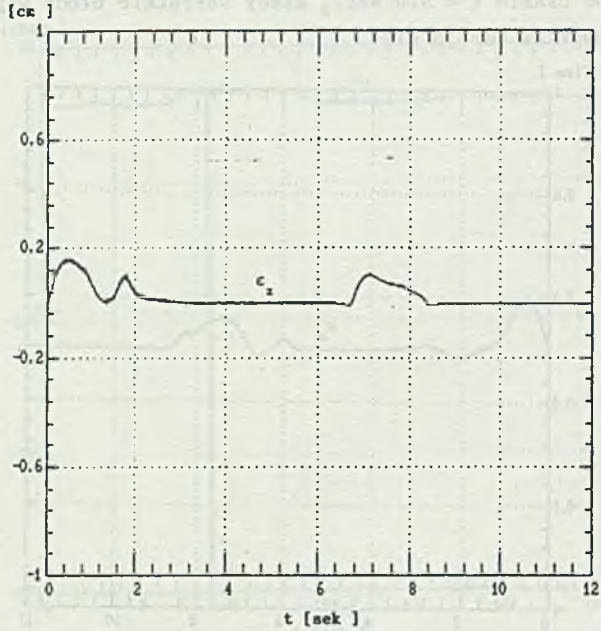
Rys.9.6a. Błąd współrzędnej położenia chwytaka $\varepsilon_x(t)=x_z(t)-x(t)$

Fig.9.6a. Error of task position coordinate $\varepsilon_x(t)=x_z(t)-x(t)$



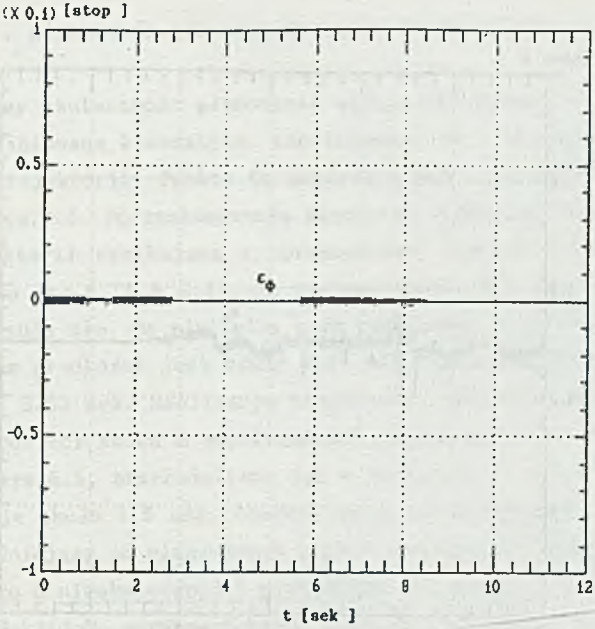
Rys.9.6b. Błąd współrzędnej położenia chwytaka $\varepsilon_y(t)=y_z(t)-y(t)$

Fig.9.6b. Error of task position coordinate $\varepsilon_y(t)=y_z(t)-y(t)$



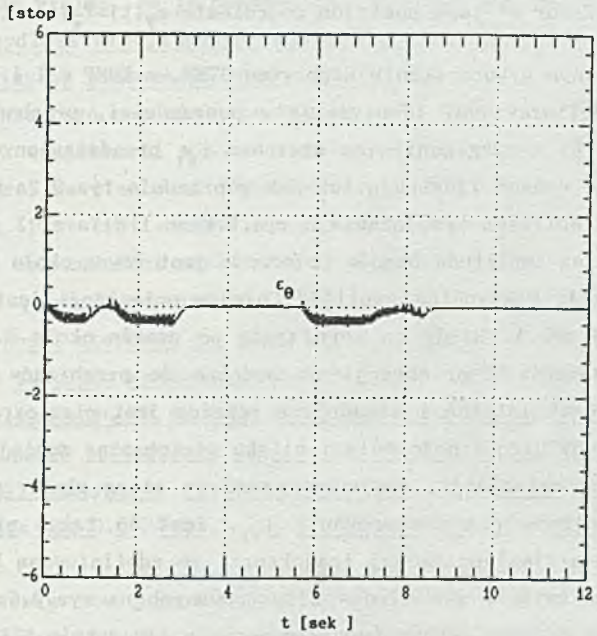
Rys.9.6c. Błąd współrzędnej położenia chwytaka $\varepsilon_z(t)=z_z(t)-z(t)$

Fig.9.6c. Error of task position coordinate $\varepsilon_z(t)=z_z(t)-z(t)$



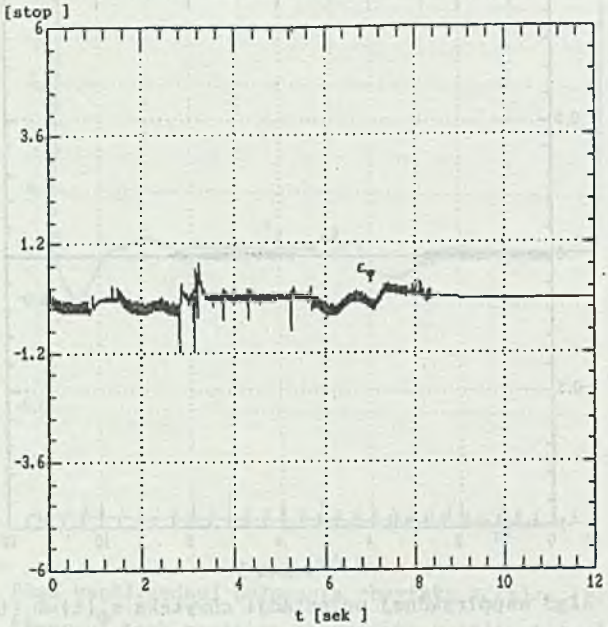
Rys.9.7a. Błąd współrzędnej orientacji chwytaka $e_\Phi(t)=\Phi_z(t)-\Phi(t)$

Fig.9.7a. Error of task position coordinate $e_\Phi(t)=\Phi_z(t)-\Phi(t)$



Rys.9.7b. Błąd współrzędnej orientacji chwytaka $e_\theta(t)=\theta_z(t)-\theta(t)$

Fig.9.7b. Error of task position coordinate $e_\theta(t)=\theta_z(t)-\theta(t)$



Rys.9.7c. Błąd współrzędnej orientacji chwytaka $e_\Psi(t)=\Psi_z(t)-\Psi(t)$

Fig.9.7c. Error of task position coordinate $e_\Psi(t)=\Psi_z(t)-\Psi(t)$

Po ponownym wykorzystaniu algorytmu STER, z KOMP = 1 i pozostałymi parametrami zdefiniowanymi identycznie z poprzednimi, przebadano ruch manipulatora IRb-6, z uwzględnieniem sterowań i_{k1} przedstawionych na rys.9.3f÷j. Trajektorię zadaną ilustrują,tak jak poprzednio rys.9.2a÷b i 9.3a÷e. Rezultaty tych obliczeń przedstawiają rys.9.6a÷c i 9.7a÷c. Z rys.9.6a÷c widać, że maksymalna amplituda błędów położenia jest równa około 0.2 cm (ε_x,ε_y dla t≅ 0.5 sek.). Maksymalna amplituda błędów orientacji jest równa ≅ 1.2 (ε_Ψ dla t≅ 2.6 sek.). Błędy te zerują się po czasie około 9.0 sek. Przebiegi błędów położenia i orientacji są podobne do przebiegów na rys 9.4a÷c i 9.5a÷c. Jednak istotną i zasadniczą różnicą jest pięciokrotne zmniejszenie się amplitudy błędów położenia i blisko ośmiokrotne zmniejszenie się amplitudy błędów orientacji, co można uznać za miarę skuteczności wspomagania serwomechanizmów przez sterowania i_{k1}. Jest to także miarą skuteczności planowania minimalnoczasowej trajektorii ze zdefiniowaną kinematyką jak na rys.6.5. Pojawienie się błędów zilustrowanych na rys.9.6a÷c i 9.7a÷c jest spowodowane tarciem suchym (uwzględnionym w algorytmie STER), które pominęliśmy w algorytmie OPTT. Uwzględnienie tego tarcia skomplikowałoby planowa-

nie trajektorii, gdyż wtedy równania dynamiki (5.2) byłyby niejednoznaczne (patrz rozdz.3).

Przeanalizujmy skuteczność planowania minimalnoczasowej trajektorii zadanej z niezdefiniowaną kinematyką. Zdefiniowane są tylko punkt początkowy P i końcowy K trajektorii. Punkty te pokrywają się z odpowiednimi punktami trajektorii z rys.6.5. Po zastosowaniu algorytmu PLAN2 otrzymaliśmy kinematykę tej trajektorii wynikającą z uproszczonych równań dynamiki (6.7) i przedstawioną na rys.6.11 ÷ 6.14. Po zastosowaniu algorytmu OPTT dla tych trajektorii okazuje się, że minimalny czas realizacji trajektorii z modyfikowanym profilem prędkości jest równy 3.85 sek., a z niemodyfikowanym profilem prędkości 3.62 sek. Realizację trajektorii zadanej z niezdefiniowaną kinematyką, w postaci skoku o współrzędnych punktu początkowego P i końcowego K jak na rys.6.5, przebadaliśmy już w rozdziale 8. Z rys 8.4a÷j wynika, że po czasie około 1.5 sek. chwytak osiągnął zadany punkt K. Czas ten jest znacznie mniejszy od planowanych czasów realizacji równych 3.85 i 3.62 sek. Świadczy to o nieskuteczności planowania trajektorii z niezdefiniowaną kinematyką. Przykładowe serwomechanizmy opisane w rozdziale 8 znajdują bardziej efektywną trajektorię ruchu niż trajektoria wyznaczona przez algorytm OPTT.

Z prac [2,53] wynika, że im dokładniej planujemy kinematykę trajektorii, tym bardziej wydłuża się planowany minimalny czas realizacji. Za cenę dokładności tracimy na planowanym czasie realizacji.

Na zakończenie tego rozdziału zastanówmy się, jakie są warunki poprawności, planowania trajektorii minimalnoczasowych za pomocą algorytmu OPTT. Z rys.9.3f÷j widać, że planowane sterowania i_{kl} zmieniają szybko polarność z dużą amplitudą. Przy zbyt dużych szybkościach zmian polarności tych sterowań pominięcie bezwładności elektrycznych zespołów wzmacniacz mocy-siłownik może okazać się niedopuszczalne. Jeśli minimalny czas między kolejnymi zmianami polarności sterowań i_{kl} jest nie mniejszy niż 10 maksymalnych stałych czasowych zespołów wzmacniacz mocy-siłownik, wtedy możemy pominąć jego bezwładności elektryczne i formuła (9.1) jest słuszna. Minimalny czas między kolejnymi zmianami polarności i_{kl}, z rys.9.3f÷j, jest równy około 0.003 sek. Jeśli maksymalna stała czasowa zespołów wzmacniacz mocy-siłownik jest nie większa niż 0.0003 sek., wtedy zaplanowane sterowania z rys.9.3f÷j są poprawne.

Przy planowaniu sterowań algorytm OPTT wykorzystuje równanie (9.2), w którym współczynniki A_l, B_l, C_l są stałe między kolejnymi punktami podporowymi trajektorii zadanej. Założenie o stałości tych współczynników jest tym słuszniejsze, im mniejsze są zmiany współrzędnych wewnętrznych manipulato-

ra. Dla sterowań z rys.9.3f÷j zmiany współrzędnych naturalnych członów między kolejnymi punktami podporowymi nie przekraczają DFW/2=1°. Przypomnijmy tu, że DFW=2°, to wartość parametru wejściowego algorytmu PLAN2, który wygenerował trajektorię prostoliniową jak na rys.6.6a÷b i 6.7 (patrz rozdział 6, p.6.1). Z ograniczeń (4.2) wynika, że takie zmiany stanowią co najwyżej 1.5% dopuszczalnych zakresów współrzędnych naturalnych członów. Zatem można przyjąć, że przy tak małych względnych zmianach równanie (9.2) jest słuszne i zaplanowane sterowania poprawne.

W każdym przypadku skuteczność planowania trajektorii należy sprawdzić przez zastosowanie algorytmu STER przedstawionego w rozdziale 8.

Dotychczas rozważaliśmy warunki poprawności planowania trajektorii minimalnoczasowych pomijając aspekt eksploatacyjny siłowników. Poprawne sterowanie w sensie powyższych rozważań są nadal szybkozmiennymi przebiegami. Bardzo szybkie zmiany prądu nie są obojętne dla żywotności siłowników ze względu na szybko zmieniający sie kierunek sił napędowych o dużej amplitudzie. Dlatego celowe jest uśrednianie zaplanowanych sterowań i analiza trajektorii będących odpowiedziami na te sterowania . Jest to problem, który autor zamierza podjąć w przyszłości.

10. WRAŻLIWOŚĆ PRZYKŁADOWYCH SERWOMECHANIZMÓW NA ZMIANY GRANICZNYCH EFEKTYWNYCH BEZWŁADNOŚCI SIŁOWNIKÓW

Modele kinematyki i dynamiki MRP są złożone i opisuje je dużo parametrów kinematyki i dynamiki. Tak złożone modele są rygorystyczne względem podstawowych praw fizyki i matematyki klasycznej (prawa Newtona, prawa geometrii euklidesowej itp.). Parametry kinematyki występują w równaniach kinematyki członów i napędów manipulatora. Dla manipulatora IRb-6 są to: parametry Hartenberga-Denavita λ_1, l_2, l_3, λ_5, λ_6, l_6 - występujące w równaniach (4.3), (4.4), (4.7), przełożenia k_1, k_4, k_5 występujące w równaniach (4.8), (4.9), stałe konstrukcyjne AB, BC, h_2, h_3, DE, DF, D_0F, a_2, b_2 itd. - występujące w równaniach (4.8)÷(4.11) . Parametry dynamiki występują w równaniach dynamiki i opisują masę oraz jej rozkład dla poszczególnych członów i elementów napędowych manipulatora. Są to elementy macierzy pseudobezwładności występujących we współczynnikach równań (5.1) i (5.2). Parametrami dynamiki są także czynniki opisujące tarcie lepkie i suche (formuły (3.12) i (3.13)).

Ruch manipulatora IRb-6 będący odpowiedzią na trajektorię zadaną w postaci skokowej - w ogólnym przypadku - jest funkcją czasu i wszystkich parametrów kinematyki i dynamiki manipulatora. Jeśli jeden z tych parametrów ulegnie zmianie, to zmieni się też odpowiedź na zadany skok. Różnice odpowiedzi na zadany skok, spowodowany zmianą wybranego parametru, możemy uznać za miarę "wrażliwości odpowiedzi skokowej na zmiany tego parametru " [57].

Z rozdziału 8 wynika, że ważnymi parametrami umożliwiającymi dobór nastaw regulatorów przykładowych serwomechanizmów są minimalne i maksymalne efektywne bezwładności siłowników. Dlatego zbadamy wrażliwość odpowiedzi skokowej na zmiany granicznych efektywnych bezwładności siłowników. Zmiany maksymalnych i minimalnych efektywnych bezwładności siłowników mogą być spowodowane każdym z parametrów występujących w formule (5.3). Wyznaczymy zmiany tych parametrów spowodowane pominięciem macierzy pseudobezwładności J_{310}(elementu równoważącego ciężar członu trzeciego) i momentów dewiacji (I_{uv}; u, v = x, y, z ; u≠v) we wszystkich macierzach pseudobezwładności członów. Zmiany efektywnych bezwładności wyznaczymy dla odpowiednich konfiguracji manipulatora IRb-6 przedstawionych na rys.5.1 i 5.4. Wartości tych

bezwładności obliczone za pomocą algorytmu SZAC przedstawia tabela 10.1. Z tabeli tej widać, że na takie uproszczenia macierzy pseudobezwładności najbardziej wrażliwe są efektywne bezwładności pierwszego i trzeciego siłownika. Przyrosty bezwładności liczone są względem odpowiednich wartości podanych w tabeli 5.1 i 5.4.

Tabela 10.1

Efektywne bezwładności siłowników w $kg \cdot m^2$

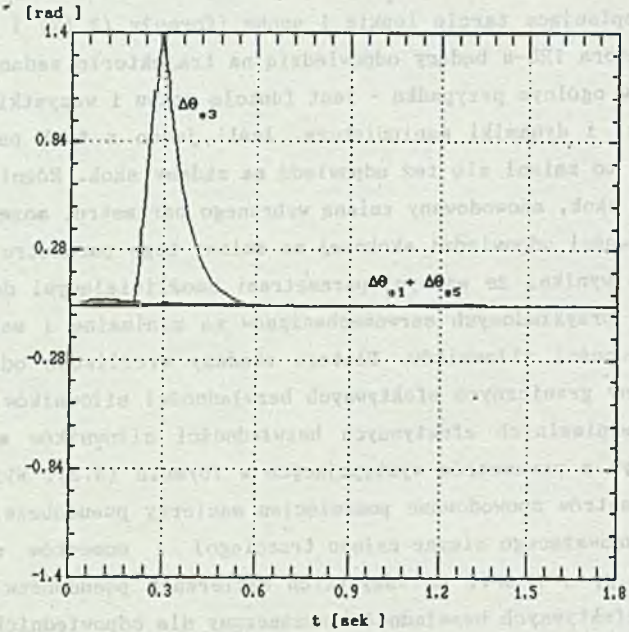
Lp.	D_{s11max}	ΔD_{s11max}	D_{s11min}	ΔD_{s11min}
1	$0.754 \cdot 10^{-3}$	$-0.036 \cdot 10^{-3}$	$0.220 \cdot 10^{-3}$	$-0.033 \cdot 10^{-3}$
2	$0.604 \cdot 10^{-3}$	0	$0.338 \cdot 10^{-3}$	0
3	$0.730 \cdot 10^{-3}$	$-0.113 \cdot 10^{-3}$	$0.332 \cdot 10^{-3}$	$-0.075 \cdot 10^{-3}$
4	$0.274 \cdot 10^{-3}$	0	$0.111 \cdot 10^{-3}$	0
5	$0.172 \cdot 10^{-3}$	0	$0.926 \cdot 10^{-4}$	0

$\Delta D_{s11max}/D_{s11max} = -4.5\%$, $\Delta D_{s11min}/D_{s11min} = -13\%$,

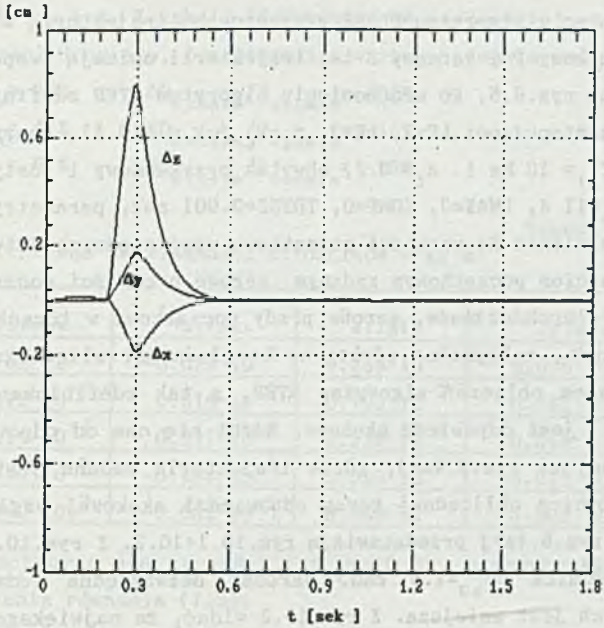
$\Delta D_{s33max}/D_{s33max} = -14.4\%$, $\Delta D_{s33min}/D_{s33min} = -18.4\%$.

Dla tych bezwładności oraz dla $a_1 = 0.2$ i $\omega_{r1}/2\pi = 10$ Hz algorytm REGU daje następujace rozwiązania równania (7.3):

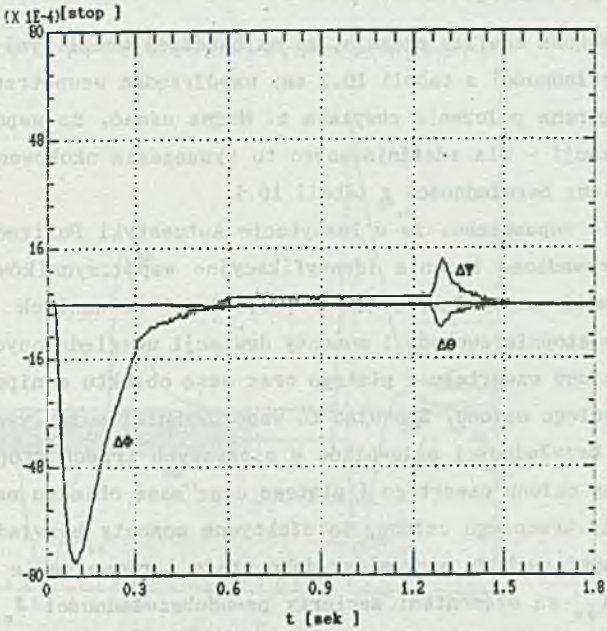
$$x_1=0.192 \ , \ x_2=0.188 \ , \ x_3=0.189 \ , \ x_4=0.190 \ , \ x_5=0.188 \ . \qquad (10.1)$$



Rys.10.1. Różnice współrzędnych naturalnych siłowników
Fig.10.1. Error of actuator natural coordinates



Rys.10.2. Różnice współrzędnych zewnętrznych położenia chwytaka
Fig.10.2. Error of task position external coordinates



Rys.10.3. Różnice współrzędnych zewnętrznych orientacji chwytaka
Fig.10.3. Error of task orientation external coordinates

Korzystając z algorytmu PLAN2 wygenerowano trajektorię w postaci skoku. Punkt początkowy P i końcowy K tej trajektorii opisują współrzędne zewnętrzne jak na rys.6.5. Po uruchomieniu algorytmu STER zdefiniowano parametry wejściowe następująco: LP=1, LK=3, $x_1 \div x_5$ jak w (10.1), parametry serwomechanizmów f_{r1}= 10 Hz i a_1= 0.2, chwytak przykładowy i pusty (l_6=0 i λ_6= 0.16 m), i_m=11 A, LMAX=3, KOMP=0, TDYSZ=0.001 sek, parametry tarcia suchego jak w uzupełnieniu E, wartości początkowe współrzędnych naturalnych członów równe wartościom początkowym zadanym, zerowe prędkości początkowe współrzędnych naturalnych członów, zerowe prądy początkowe w torach całkowania serwomechanizmów, maksymalne efektywne bezwładności siłowników jak w tabeli 10.1. Wynikiem obliczeń algorytmu STER, z tak zdefiniowanymi parametrami wejściowymi, jest odpowiedź skokowa. Różni się ona od odpowiedzi skokowej, zilustrowanej na rys.8.4a÷j, gdzie trajektoria zadana jest taka sama jak obecnie. Różnice obliczonej teraz odpowiedzi skokowej względem odpowiedzi skokowej z rys.8.4a÷j przedstawiają rys.10.1÷10.3. Z rys.10.1 widać, że maksymalna różnica $\Delta\theta_{s3}$=1.4 rad. Wartość bezwzględna różnic pozostałych współrzędnych jest mniejsza. Z rys.10.2 widać, że największa różnica współrzędnych położenia chwytaka $\Delta z \cong$ 0.8 cm. Z rys.10.3 wynika, że wartość bezwzględna różnicy współrzędnych zewnętrznych orientacji chwytaka $|\Delta\Phi|$= 0.008°.

Przeprowadzona analiza ukazuje, że najbardziej wrażliwymi na zmiany efektywnych bezwładności z tabeli 10.1 są: współrzędna wewnętrzna θ_{s3} i współrzędna zewnętrzna położenia chwytaka z. Można uznać, że współrzędne zewnętrzne orientacji - dla zdefiniowanego tu wymuszenia skokowego - są niewrażliwe na zmiany bezwładności z tabeli 10.1.

We wstępie wspomniano, że w Instytucie Automatyki Politechniki Warszawskiej przeprowadzono badania identyfikacyjne współczynników uproszczonych równań dynamiki manipulatora IRb-6 [16,54]. W równaniach tych pominięto ostatnie dwa stopnie swobody i momenty dewiacji uwzględnionych trzech członów. Masę członu czwartego i piątego oraz masę obiektu manipulacji włączono do masy trzeciego członu. Stosując te współczynniki można wyznaczyć efektywne momenty bezwładności siłowników w pierwszych trzech stopniach swobody. Ponieważ masy członu czwartego i piątego oraz masę obiektu manipulacji włączono do masy trzeciego członu, to efektywne momenty bezwładności siłowników tych stopni swobody przyjmiemy jako stałe i równe sumie kwadratów $I_{xx}^2 + I_{yy}^2$. I_{xx} i I_{yy} są elementami macierzy pseudobezwładności $\mathbb{J}_{s4}$ lub $\mathbb{J}_{s5}$. Tabela 10.2 przedstawia tak wyznaczone efektywne momenty bezwładności siłowników. Przyrosty bezwładności liczone są względem odpowiednich wartości

podanych w tabeli 5.1 i 5.4. Z tabeli 10.2 wynika że najbardziej różnią się efektywne bezwładności drugiego, trzeciego i czwartego stopnia swobody.

$\Delta D_{s22max}/D_{s22max} = 85\%$, $\Delta D_{s22min}/D_{s22min} = 108\%$,

$\Delta D_{s33max}/D_{s33max} = 47\%$, $\Delta D_{s33min}/D_{s33min} = -15\%$,

$\Delta D_{s44max}/D_{s44max} = 67\%$, $\Delta D_{s44min}/D_{s44min} = -19\%$.

Tabela 10.2

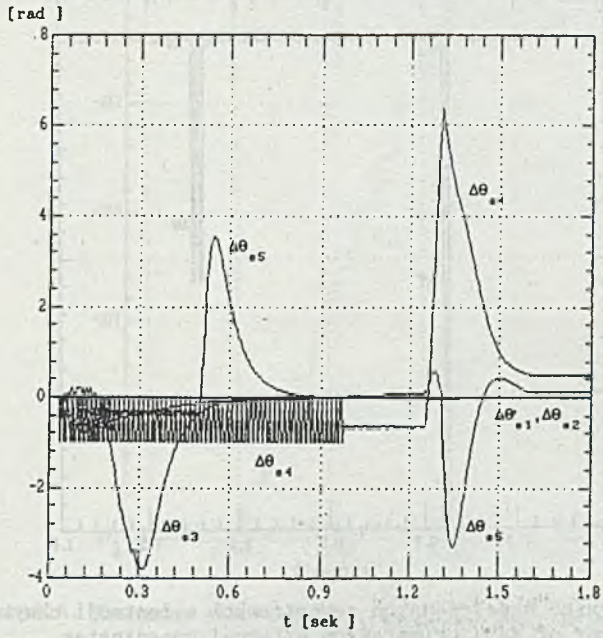
Efektywne bezwładności siłowników w $kg \cdot m^2$

Lp.	D_{s11max}	ΔD_{s11max}	D_{s11min}	ΔD_{s11min}
1	$0.762 \cdot 10^{-3}$	$-0.028 \cdot 10^{-3}$	$0.269 \cdot 10^{-3}$	$0.016 \cdot 10^{-3}$
2	$0.112 \cdot 10^{-2}$	$0.516 \cdot 10^{-3}$	$0.703 \cdot 10^{-3}$	$0.365 \cdot 10^{-3}$
3	$0.114 \cdot 10^{-2}$	$0.397 \cdot 10^{-3}$	$0.339 \cdot 10^{-3}$	$-0.068 \cdot 10^{-3}$
4	$0.090 \cdot 10^{-3}$	$-0.184 \cdot 10^{-3}$	$0.090 \cdot 10^{-3}$	$-0.021 \cdot 10^{-3}$
5	$0.090 \cdot 10^{-3}$	$-0.082 \cdot 10^{-3}$	$0.090 \cdot 10^{-3}$	$-0.003 \cdot 10^{-3}$

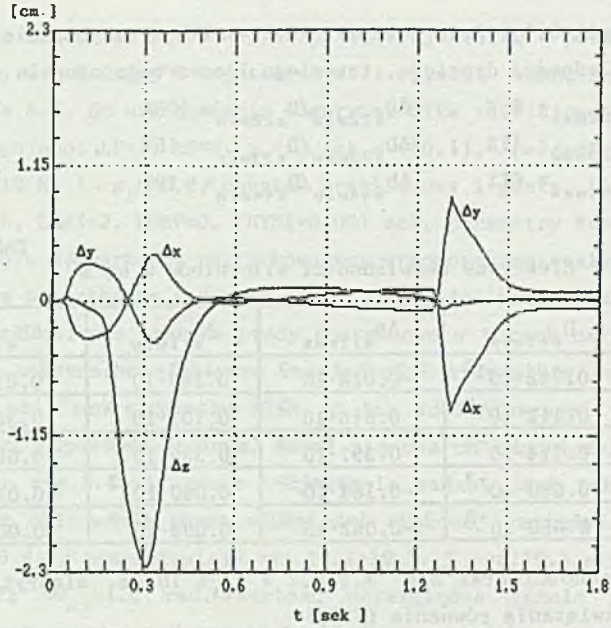
Dla tych bezwładności oraz dla $a_1 = 0.2$ i $f_{r1} = 10$ Hz, algorytm REGU daje następujące rozwiązania równania (7.3):

$$x_1 = 0.191 \ , \ x_2 = 0.186 \ , \ x_3 = 0.192 \ , \ x_4 = 0.182 \ , \ x_5 = 0.182 \ . \qquad (10.2)$$

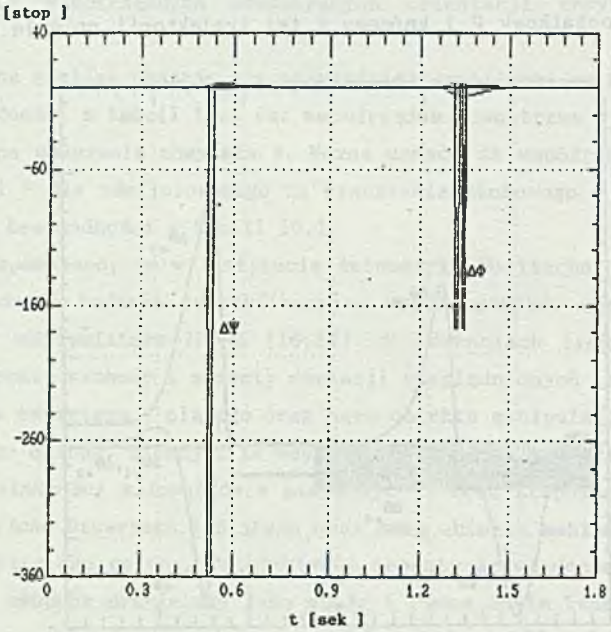
Korzystając z algorytmu PLAN2, wygenerowano trajektorię zadaną w postaci skoku. Punkt początkowy P i końcowy K tej trajektorii opisują współrzędne



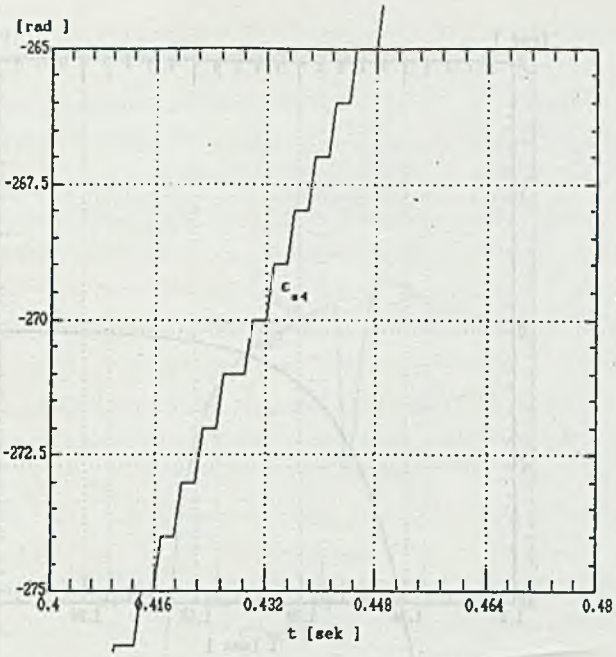
Rys.10.4. Różnice współrzędnych naturalnych siłowników
Fig.10.4. Error of actuator natural coordinates



Rys.10.5. Różnice współrzędnych zewnętrznych położenia chwytaka
Fig.10.5. Error of task position external coordinates

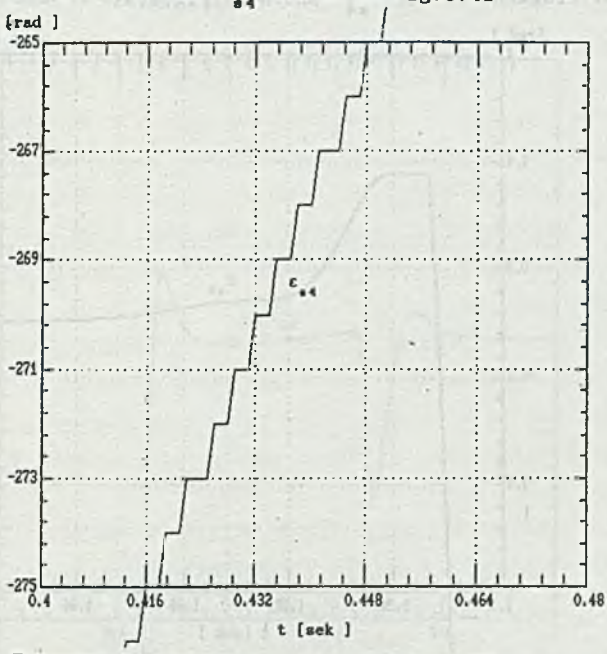


Rys.10.6. Różnice współrzędnych zewnętrznych orientacji chwytaka
Fig.10.6. Error of task orientation external coordinates



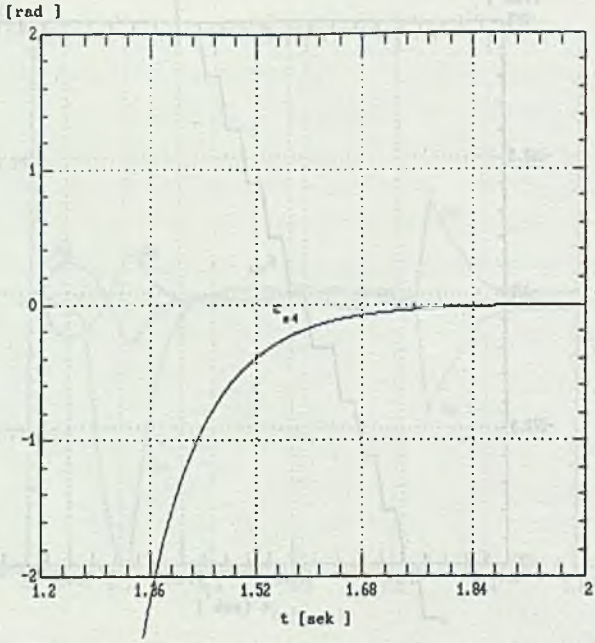
Rys.10.7. Fragment przebiegu ε_{s4} z rys.8.4i

Fig.10.7. Fragment of the ε_{s4} showmn in Fig.8.4i



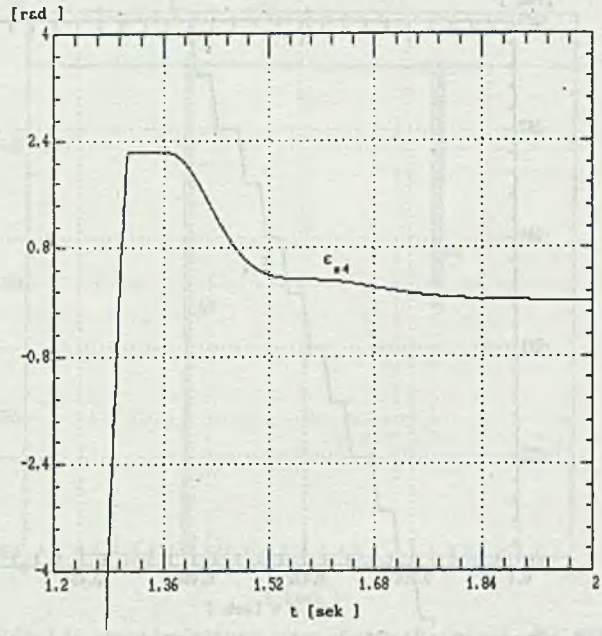
Rys.10.8. Fragment przebiegu ε_{s4} odpowiadający $\Delta\theta_{s4}$ z rys.10.4

Fig.10.8. Fragment of the ε_{s4} corresponding to $\Delta\theta_{s4}$



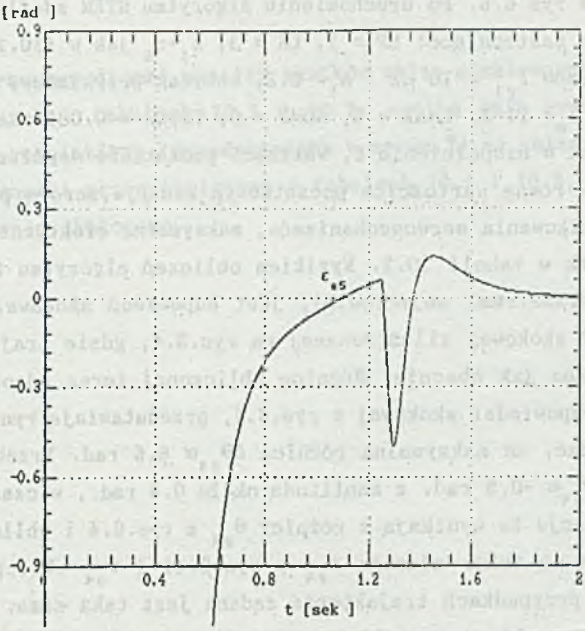
Rys.10.9. Fragment przebiegu ε_{s4} z rys.8.4i

Fig.10.9. Fragment of the ε_{s4} shown in Fig.8.4i



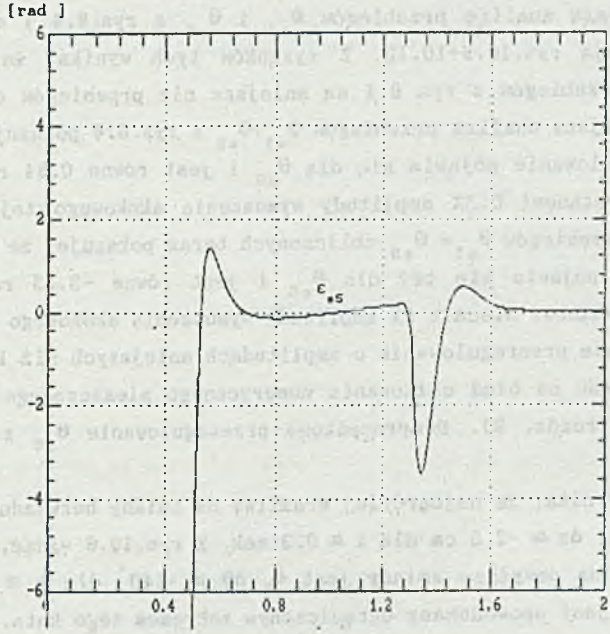
Rys.10.10. Fragment przebiegu ε_{s4} odpowiadający $\Delta\theta_{s4}$ z rys.10.4

Fig.10.10. Fragment of the ε_{s4} corresponding to $\Delta\theta_{s4}$ shown in Fig.10.4



Rys.10.11. Fragment przebiegu ε_{s5} z rys.8.4j

Fig.10.11. Fragment of the ε_{s5} shown in Fig.8.4j



Rys.10.12. Fragment przebiegu ε_{s5} odpowiadający $\Delta\theta_{s5}$ z rys.10.4

Fig.10.12. Fragment of the ε_{s5} corresponding to $\Delta\theta_{s5}$ shown in Fig.10.4

zewnętrzne jak na rys 6.5. Po uruchomieniu algorytmu STER zdefiniowano parametry wejściowe następująco: LP = 1, LK = 3, $x_1 \div x_5$ jak w (10.2), parametry serwomechanizmów f_{rj} = 10 Hz i a_j= 0.2, chwytak przykładowy (l_6=0, λ_6= 0.16 m) i pusty, i_m= 11 A, LMAX = 3, KOMP = 0, TDYSZ = 0.001 sek., momenty tarcia suchego jak w uzupełnieniu E, wartości początkowe współrzędnych naturalnych członów równe wartościom początkowym zadanym,zerowe prądy początkowe w torach całkowania serwomechanizmów, maksymalne efektywne bezwładności siłowników jak w tabeli 10.2. Wynikiem obliczeń algorytmu STER, z tak zdefiniowanymi parametrami wejściowymi, jest odpowiedź skokowa. Różni się ona od odpowiedzi skokowej zilustrowanej na rys.8.4, gdzie trajektoria zadana jest taka sama jak obecnie. Różnice obliczonej teraz odpowiedzi skokowej, względem odpowiedzi skokowej z rys.8.4, przedstawiają rys.10.4÷10.6.

Z rys.10.4 widać, że maksymalna różnica $\Delta\theta_{s4} \cong$ 6.6 rad. Przebieg ten ma oscylacje wokół $\theta_{s4} \cong$ -0.5 rad. z amplitudą około 0.5 rad., w czasie 0.03≤ t ≤ 0.96 sek. Oscylacje te wynikają z różnicy θ_{s4} z rys.8.4 i obliczonego teraz. Oscylacje te są także różnicą ε_{s4} z rys.8.4i i ε_{s4} obliczonego obecnie, gdyż w obu przypadkach trajektoria zadana jest taka sama. Dokładniejszą analizę tych przebiegów umożliwiają rys.10.7 i 10.8, z których wynika, że żaden z przebiegów ε_{s4} nie ma oscylacji. Z rys.10.4 widać, że $\Delta\theta_{s5}$ ma dwa piki - jeden 3.6 rad. dla t ≅ 0.54 sek. i drugi - 3.6 rad. dla t ≅ 1.35 sek. Dokładniejszą analizę przebiegów θ_{s4} i θ_{s5} z rys.8.4 i obliczonych teraz umożliwiają rys.10.9÷10.12. Z rysunków tych wynika, że amplitudy przeregulowań przebiegów z rys 8.4 są mniejsze niż przebiegów obliczonych teraz. Dokładniejsza analiza przebiegów $\theta_{s1} \div \theta_{s5}$ z rys.8.4 pokazuje, że największe przeregulowanie pojawia się dla θ_{s5} i jest równe 0.54 rad. (patrz rys.10.11), co stanowi 0.3% amplitudy wymuszenia skokowego tej współrzędnej. Analiza przebiegów $\theta_{s1} \div \theta_{s5}$ obliczonych teraz pokazuje, że największe przeregulowanie pojawia się też dla θ_{s5} i jest równe -3.33 rad. (patrz rys.10.12), co stanowi niecałe 2% amplitudy wymuszenia skokowego tej współrzednej. Wszystkie przeregulowania o amplitudach mniejszych niż 1 rad można pominąć ze względu na błąd całkowania numerycznego mieszczącego się w tym zakresie (patrz rozdz. 8). Dwuprocentowe przeregulowanie θ_{s5} z rys.10.12 można pominąć.

Z rys.10.5 wynika, że najbardziej wrażliwe na zmiany bezwładności z tabeli 10.2 jest z, $\Delta z \cong$ -2.3 cm dla t ≅ 0.3 sek. Z rys.10.6 widać, że najbardziej wrażliwy na powyższe zmiany jest θ, $\Delta\theta \cong -180^\circ$ dla t ≅ 1.32 sek. Skok $\Delta\Psi \cong -360^\circ$ jest spowodowany ograniczonym zakresem tego kąta.

Z przeprowadzonej analizy skutków zmian efektywnych bezwładności, przedstawionych w tabelach 10.1 i 10.2, wynika mała wrażliwość metody doboru nastaw regulatorów (przedstawiona w rozdz.7) na zmiany efektywnych momentów bezwładności przedstawionych w tabelach 10.1 i 10.2, dla zdefiniowanego tu wymuszenia skokowego.

11. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Podstawowy wniosek końcowy wynikający z badań i analiz prezentowanych w rozdziałach 2 ÷ 10, w kontekście przestudiowanych prac dotyczących rozprawy [8,38,41], brzmi następująco:

"projektowanie złożonych systemów robotów wymaga oparcia się na metodach i zasadach teorii sterowania w połączeniu z ścisłą analizą matematyczną występujących w systemie zjawisk fizycznych".

W całej pracy udowodniono bowiem niejednokrotnie, że złożony system robota przemysłowego analizowany nie na podstawie rygorystycznych modeli fizyki i matematyki, nie ujawnia istotnych dla analizy kinematyki i dynamiki robota parametrów i charakterystyk (generacja trajektorii zadanych, zakresy zmian efektywnych momentów bezwładności siłowników, nastawy regulatorów serwomechanizmów, analiza ruchu MRP sterowanych w torach otwartych i serwochanizmami, planowanie optymalnych trajektorii i odpowiadających im sterowań kompensacyjnych, badanie skuteczności planowanych trajektorii i sterowań oraz badania wrażliwościowe).

Przeprowadzone rozważania umożliwiły ponadto sformułowanie innych wniosków i uwag, które przedstawiono poniżej.

1. Równania kinematyki MRP w postaci jednorodnej i równania więzów członu roboczego, z ich klasyczną interpretacją geometryczną, umożliwiają rozwiązanie zadań prostych i odwrotnych kinematyki MRP w postaci analitycznej ciągłej i różniczkowej, oraz badanie ich osobliwości kinematycznych.
2. Formuł (3.1)÷(3.9) wynikających z równań Lagrange'a II rodzaju stosunkowo prosto można użyć do algorytmizacji obliczeń komputerowych. Również są one podatne na komputerową algebraizację za pomocą wyspecjalizowanych języków programowania, np.języka LISP [22].
3. Formuły (3.1)÷(3.9) i (5.3) umożliwiają ogólny opis analityczny efektywnych bezwładności siłowników D_{s11} oraz obliczenia zakresów zmian D_{s11}, spowodowanych zmianą współrzędnych naturalnych MRP i obiektem manipulacji.
4. Modele kinematyki z rozdziału 2 umożliwiają projektowanie algorytmów

PLAN2 generacji trajektorii zadanych ze zdefiniowaną i niezdefiniowaną kinematyką ruchu elementu wykonawczego MRP. Algorytmy te umożliwiają definiowanie kinematyki trajektorii zadanej elementu wykonawczego MRP w postaci współrzędnych zewnętrznych dowolnie oddalonych punktów w przestrzeni zewnętrznej, i jednokrokowe wyznaczanie współrzędnych wewnętrznych odpowiadających współrzędnym zewnętrznym.

5. Zakresy zmian D_{c11} (o których mówi się w punkcie 3) umożliwiają projektowanie charakterystyk zadajników prędkości (rys.8.1) w serwomechanizmach MRP, oraz obliczanie nastaw regulatorów.

6. Algorytm numerycznego rozwiązywania zadania prostego dynamiki napędów MRP umożliwia projektowanie algorytmów STER analizujących ruch MRP sterowanego w torach otwartych lub serwomechanizmami o dowolnej znanej strukturze.

7. Algorytm STER zaprezentowany w pracy jest niezbędnym narzędziem komputerowym umożliwiającym przeprowadzenie badań symulacyjnych zaprojektowanych układów sterowania. Projektowanie układów sterowania wymaga uproszczeń modelu dynamiki ruchu MRP. Dlatego badania symulacyjne za pomocą algorytmu STER, wykorzystującego modele rygorystyczne względem podstawowych praw fizyki, są pierwszym niezbędnym testem poprawności działania zaprojektowanego układu sterowania. Badania eksperymentalne MRP rzeczywistego będące ostatecznym testem poprawności działania zaprojektowanego układu sterowania są niemożliwe bez wcześniejszych badań symulacyjnych za pomocą algorytmu STER lub podobnego.

8. Formuły (9.2) umożliwiają projektowanie algorytmów planowania OPTT sterowań optymalizujących wybrane wskaźniki jakości, np. czas, koszty i czas itp., nie wymagających: parametryzowania toru ruchu jego długością s, obliczania ds/dt i d^2s/dt^2 jak w [26,43]. Także dzięki formułom (9.2) możliwe jest obliczanie jednokrokowe (nie iteracyjne) sterowań optymalizujących wybrany wskaźnik jakości w poszczególnych puntach dyskretyzacji toru ruchu.

9. Algorytmy PLAN2, OPTT i STER mogą być podstawą do badań wrażliwościowych serwomechanizmów MRP. Badania te mogą służyć do racjonalnych uproszczeń modeli kinematyki i dynamiki wzdłuż trajektorii zadanych. Uproszczenia te przyśpieszając proces obliczeń mogą pozwolić na sterowanie MRP w trybie "on line" [4,37].

10. Formuły analityczne opisujące kinematykę odwrotną i efektywne bezwładności D_{s11} są niezbędnymi parametrami do szacowania maksymalnych sił napędowych, wynikających ze struktury kinematycznej MRP i założonych przez konstruktora maksymalnych szybkości i przyśpieszeń elementu

wykonawczego MRP. Tak oszacowane siły napędowe są pomocne przy doborze przełożeń przekładni i charakterystyk mechanicznych siłowników [32].

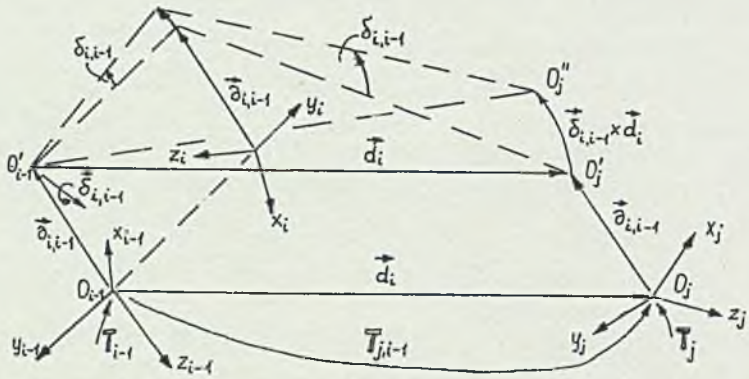
11. Równania Newtona (3.19)÷(3.22) umożliwiają wyznaczanie reakcji wzajemnego oddziaływania elementów MRP. Reakcje te umożliwiają analizę naprężeń występujących w poszczególnych elementach oraz badanie odkształceń wynikających z ich skończonej sztywności [46].

UZUPEŁNIENIA

UZUPEŁNIENIE A

FORMUŁY OKREŚLAJĄCE PRZEMIESZCZENIA I OBROTY RÓŻNICZKOWE UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH $x_j y_j z_j$, SPOWODOWANE RÓŻNICZKOWĄ ZMIANĄ dq_i i-tej WSPÓŁRZĘDNEJ NATURALNEJ CZŁONU

Zmiana dq_i powoduje różniczkową zmianę położenia lub orientacji i-tego członu względem i-1-szego członu. Zmiany te opisują wektory $\vec{\partial}_{i,i-1}$ oraz $\vec{\delta}_{i,i-1}$, które są odpowiednio przemieszczeniem i obrotem różniczkowym układu współrzędnych $x_i y_i z_i$ względem układu współrzędnych $x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$. Z rys.A.1 widać, że zmiany te powodują przemieszczenie układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ o wektor $\vec{\partial}_{i,i-1} + \vec{\delta}_{i,i-1} \times \vec{d}_i$. Obrót tego układu współrzędnych jest taki sam jak członu i-tego względem członu i-1-szego, czyli $\vec{\delta}_{i,i-1}$. Po przemnożeniu skalarnym tych wektorów przez wersory $\vec{a}_i$, $\vec{b}_i$, $\vec{c}_i$ układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ otrzymamy szukane przemieszczenia i obroty różniczkowe tego układu. Składowe wektorów $\vec{a}_i$, $\vec{b}_i$, $\vec{c}_i$ i $\vec{d}_i$ opisują odpowiednie kolumny macierzy $T_{j,i-1}$ [41,51].



Rys.A.1. Ilustracja różniczkowych zmian położenia i orientacji układu współrzędnych $x_j y_j z_j$, spowodowanych różniczkową zmianą dq_i

Fig.A.1. Illustration of differential displacements and rotations of $x_j y_j z_j$ coordinate system, caused differential changes dq_i of i-th link natural coordinate

$$\overrightarrow{0_j0''_j} = \overrightarrow{0_j0'_j} + \overrightarrow{0'_j0''_j} = \vec{\partial}_{i,i-1} + \vec{\delta}_{i,i-1} \times \vec{d}_i$$

$$\partial x_{i,Tj} = \vec{a}_i \cdot \overrightarrow{0_j0''_j} \quad , \quad \partial y_{i,Tj} = \vec{b}_i \cdot \overrightarrow{0_j0''_j} \quad , \quad \partial z_{i,Tj} = \vec{c}_i \cdot \overrightarrow{0_j0''_j} \quad .$$

$$\partial x_{i,Tj} = \vec{a}_i \cdot ((\vec{\delta}_{i,i-1} \times \vec{d}_i) + \vec{\partial}_{i,i-1}) \quad ,$$

$$\partial y_{i,Tj} = \vec{b}_i \cdot ((\vec{\delta}_{i,i-1} \times \vec{d}_i) + \vec{\partial}_{i,i-1}) \quad ,$$

$$\partial z_{i,Tj} = \vec{c}_i \cdot ((\vec{\delta}_{i,i-1} \times \vec{d}_i) + \vec{\partial}_{i,i-1}) \quad ,$$

$$\delta_{xi,Tj} = \vec{a}_i \cdot \vec{\delta}_{i,i-1} \quad ,$$

$$\delta_{yi,Tj} = \vec{b}_i \cdot \vec{\delta}_{i,i-1} \quad ,$$

$$\delta_{zi,Tj} = \vec{c}_i \cdot \vec{\delta}_{i,i-1} \quad .$$

Formuły powyższe można otrzymać po formalnych przekształceniach matematycznych jak w pracy [41].

UZUPEŁNIENIE B

OBLICZENIA LAGRANGIANU L I JEGO POCHODNYCH ORAZ SIŁY REAKCJI RUCHU CZŁONÓW F_i

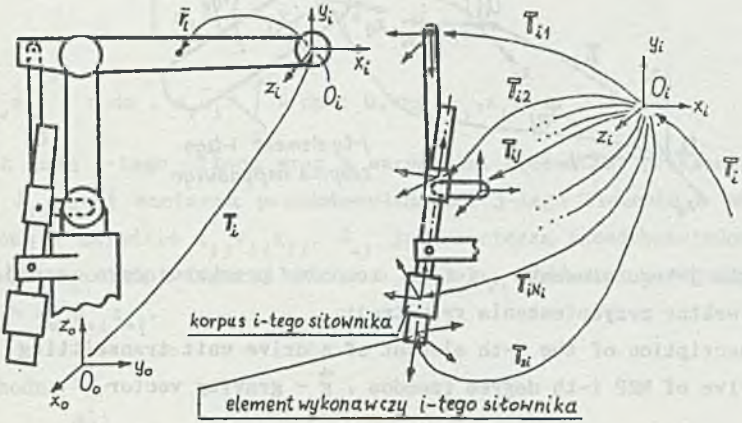
Do obliczenia sił napędowych członów metodą Lagrange'a potrzebna jest znajomość potencjału kinetycznego Lagrange'a L. Najpierw rozważymy MRP z siłownikami zamocowanymi poza parami członów. Potencjał kinetyczny Lagrange'a jest różnicą całkowitej energii kinetycznej E_k i całkowitej energii potencjalnej E_p MRP. Energie te są sumami odpowiednich energii E_{ki} i E_{pi} członów MRP. Z kolei energie E_{ki} i E_{pi} są sumami odpowiednich energii: E_{kri} i E_{pri} i-tego członu wraz z elementami przymocowanymi i nieruchomymi względem niego, E_{krsi} i E_{prsi} zespołu elementów przekazujących napęd z i-tego siłownika na i-ty człon, E_{ksi} i E_{psi} i-tego siłownika [51]. Rys.B.1 i B.2 ilustrują opis członów, zespołów napędowych i siłowników, stosowany przy obliczaniu potencjału kinetycznego Lagrange'a L. Z [51] wynika, że

$$
\begin{aligned}
L=E_k-E_p=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Bigg\{&\mathrm{Trace}\Big(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt}\,\mathbb{J}_i\,\frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt}\Big)+\sum_{j=1}^{N_i}\Big[\mathrm{Trace}\Big(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt}\,\mathbf{T}_{ij}\mathbb{J}_{ij}\mathbf{T}_{ij}^T\,\frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt}\Big)+\\
&+2\,\mathrm{Trace}\Big(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt}\,\mathbf{T}_{ij}\mathbb{J}_{ij}\,\frac{d\mathbf{T}_{ij}^T}{dt}\,\mathbf{T}_i^T\Big)+\mathrm{Trace}\Big(\frac{d\mathbf{T}_{ij}}{dt}\,\mathbb{J}_{ij}\,\frac{d\mathbf{T}_{ij}^T}{dt}\Big)\Big]+\\
&+\mathrm{Trace}\Big(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt}\,\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\mathbf{T}_{si}^T\,\frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt}\Big)+2\,\mathrm{Trace}\Big(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt}\,\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\,\frac{d\mathbf{T}_{si}^T}{dt}\,\mathbf{T}_i^T\Big)+\\
&+\mathrm{Trace}\Big(\frac{d\mathbf{T}_{si}}{dt}\,\mathbb{J}_{si}\,\frac{d\mathbf{T}_{si}^T}{dt}\Big)\Bigg\}+\mathbf{g}^T\sum_{i=1}^{N}\mathbf{T}_i\Big(m_i\bar{\mathbf{r}}_i+\sum_{j=1}^{N_i}m_{ij}\mathbf{T}_{ij}\bar{\mathbf{r}}_{ije}+m_{si}\mathbf{T}_{si}\bar{\mathbf{r}}_{si}\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

Gdy siłownik k-tego członu jest zamocowany w jego parze, wtedy $N_k=0$ i pomijamy sumę po j dla i=k w formule (B.1).

Na ogół w MRP masa zespołu elementów przekazujących napęd wraz z masą siłownika jest mała w porównaniu z masą członów. Prędkości tych elementów wraz z korpusem siłownika są porównywalne z prędkościami członów. Prędkości

elementów wykonawczych siłowników są na ogół bardzo duże w porównaniu z prędkościami członów. Stosunek prędkości tych elementów do prędkości członów odpowiada przełożeniu przekładni. Przełożenia te są na ogół duże i np. dla przekładni falowych mogą osiągać nawet 10^5 [38]. Z powyższego wynika,



Rys.B.1. Zespół napędowy i-tego członu MRP
Fig.B.1. Driving unit of MRP i-th link

że w dalszych rozważaniach możemy pominąć energię elementów przekazujących napęd wraz z korpusami siłowników. Po tych uproszczeniach otrzymujemy:

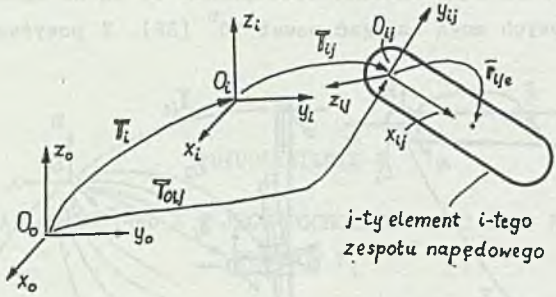
$$L=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{Trace}\left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt}\,\mathbf{J}_i\,\frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt}\right)+\mathrm{Trace}\left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt}\,\mathbf{T}_{si}\,\mathbf{J}_{si}\,\frac{d\mathbf{T}_{si}^T}{dt}\,\mathbf{T}_i^T\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,\mathrm{Trace}\left(\frac{\mathbf{T}_{si}}{dt}\,\mathbf{J}_{si}\,\frac{d\mathbf{T}_{si}^T}{dt}\right)+m_i\,\mathbf{g}^T\mathbf{T}_i\,\bar{\mathbf{r}}_i\right] \qquad (B.2)$$

Różniczkowanie po czasie opisują następujące formuły:

$$\frac{d\mathbf{T}_i}{dt}=\sum_{j=1}^{i}\frac{d\mathbf{T}_i}{dq_j}\,\dot{q}_j\,,\qquad \frac{d\mathbf{T}_{si}}{dt}=\sum_{j=1}^{N}\frac{d\mathbf{T}_{si}}{dq_j}\,\dot{q}_j\,. \qquad (B.3)$$

Pochodna $\mathbf{T}_i$ zależy od współrzędnych naturalnych członów $q_1 \div q_i$, gdyż jest iloczynem macierzy $\mathbf{A}_1 \div \mathbf{A}_i$ opisujących wzajemne położenie i orientację sąsiednich członów. Z prac [41,51] wynika, że każda macierz $\mathbf{A}_i$ jest zależna tylko od odpowiedniej współrzędnej naturalnej członu q_i. Pochodna $\mathbf{T}_{si}$ w ogólnym przypadku zależy od wszystkich współrzędnych naturalnych członów $q_1 \div q_N$.



Rys.B.2. Opis j-tego elementu , i-tego zespołu przekazującego napęd. $\vec{g}$ wektor przyśpieszenia grawitacji

Fig.B.2. Description of the j-th element of a drive unit transmitting drive of MRP i-th degree freedom . $\vec{g}$ - gravity vector

Po uwzględnieniu formuł (B.3) i pewnych uproszczeniach [51] otrzymujemy:

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j}\mathbf{J}_i\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j}\mathbf{T}_{si}\mathbf{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_i^T\right)\dot{q}_j\dot{q}_k+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_j}\mathbf{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{i=1}^{N}m_i g^T\mathbf{T}_i\bar{r}_i\ . \qquad \text{(B.4)}$$

Występujące w formułach (B.1), (B.2) i (B.4) g jest postacią jednorodną wektora grawitacji $\vec{g}$ [41,51] pokazanego na rys.B.2. Macierze $\mathbf{T}_i$, $\mathbf{T}_{ij}$, $\mathbf{T}_{si}$ opisują wzajemne położenie i orientację układów współrzędnych skojarzonych jak na rys.B.1 i B.2. $\bar{r}_i$ i $\bar{r}_{ij}$ są postaciami jednorodnymi wektorów opisujących środki ciężkości elementów pokazanych na rys.B.1 i B.2. $\mathbf{J}_i$ jest macierzą pseudobezwładności [41,51] i-tego członu, liczoną w układzie współrzędnych $x_i y_i z_i$ następująco:

$$\mathbb{J}_i = \int_0^{m_i} r_i r_i^T dm = \begin{bmatrix} I_{ixx} & I_{iyx} & I_{izx} & m_i\bar{x}_i \\ I_{ixy} & I_{iyy} & I_{izy} & m_i\bar{y}_i \\ I_{ixz} & I_{iyz} & I_{izz} & m_i\bar{z}_i \\ m_i\bar{x}_i & m_i\bar{y}_i & m_i\bar{z}_i & m_i \end{bmatrix},$$

$$I_{iuv} = \int_0^{m_i} u\, v\, dm\ ,\ m_i\bar{u}_i = \int_0^{m_i} u\, dm\ ;\ u,v = x_i, y_i, z_i. \tag{B.5}$$

m_i jest masą i-tego członu wraz z wszystkimi elementami przymocowanymi do niego. $\mathbb{J}_{ij}$ jest macierzą pseudobezwładności j-tego elementu o masie m_{ij}, obliczoną w układzie $x_{ij}y_{ij}x_{ij}$. $\mathbb{J}_{si}$ jest macierzą pseudobezwładności elementu wykonawczego i-tego siłownika o masie m_{si} obliczoną w układzie współrzędnych $x_{si}y_{si}z_{si}$.

Pochodne $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_p}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbb{T}_i}{\partial q_p}\mathbb{J}_i\frac{\partial \mathbb{T}_i^T}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbb{T}_i}{\partial q_j}\mathbb{J}_i\frac{\partial \mathbb{T}_i^T}{\partial q_p}\right)\dot{q}_j +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbb{T}_i}{\partial q_p}\mathbb{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_k}\mathbb{T}_i^T\right)\dot{q}_k +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbb{T}_i}{\partial q_j}\mathbb{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_p}\mathbb{T}_i^T\right)\dot{q}_j +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbb{T}_{si}}{\partial q_p}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbb{T}_{si}}{\partial q_j}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_p}\right)\dot{q}_j .$$

Ponieważ

$$\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j}\,\mathbb{J}_i\,\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p}\right) = \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j}\,\mathbb{J}_i\,\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p}\right)^T = \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\,\mathbb{J}_i^T\,\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_j}\right) =$$

$= \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\,\mathbb{J}_i\,\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_j}\right)$, to po zamianie j na k otrzymamy:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\,\mathbb{J}_i\,\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\,\mathbf{T}_{si}\,\mathbb{J}_{si}\,\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\,\mathbf{T}_i^T\right)\dot{q}_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\,\mathbf{T}_{si}\,\mathbb{J}_{si}\,\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p}\,\mathbf{T}_i^T\right)\dot{q}_k + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_p}\,\mathbb{J}_{si}\,\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k +$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p}\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\,\mathbb{J}_i\,\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right)\ddot{q}_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\,\mathbf{T}_{si}\,\mathbb{J}_{si}\,\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\,\mathbf{T}_i^T\right)\ddot{q}_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\,\mathbf{T}_{si}\,\mathbb{J}_{si}\,\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p}\,\mathbf{T}_i^T\right)\ddot{q}_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_p}\,\mathbb{J}_{si}\,\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\right)\ddot{q}_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\,\mathbb{J}_i\,\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right)\right]\dot{q}_k\dot{q}_j +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_i^T\right)\right]\dot{q}_k\dot{q}_j +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p}\mathbf{T}_i^T\right)\right]\dot{q}_k\dot{q}_j +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_p}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\right)\right]\dot{q}_k\dot{q}_j .$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_p}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_p}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j}\mathbb{J}_i\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right)\right]\dot{q}_j\dot{q}_k +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_p}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j}\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_i^T\right)\right]\dot{q}_j\dot{q}_k +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_p}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_j}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\right)\right]\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{i=1}^{N}m_i g^T\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\bar{r}_i .$$

Po zamianie j na k oraz k na j otrzymamy:

$$\frac{\partial L}{\partial q_p}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_p}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\mathbb{J}_i\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_j}\right)\right]\dot{q}_k\dot{q}_j +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_p}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j}\mathbf{T}_i^T\right)\right]\dot{q}_k\dot{q}_j +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_p}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_k}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j}\right)\right]\dot{q}_k\dot{q}_j+\sum_{i=1}^{N}m_i g^T\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\bar{r}_i .$$

$$F_p = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_p} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\mathbf{J}_i\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right)\ddot{q}_k + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\mathbf{T}_{si}\mathbf{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_i^T\right)\ddot{q}_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\mathbf{T}_{si}\mathbf{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p}\mathbf{T}_i^T\right)\ddot{q}_k + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_p}\mathbf{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\right)\ddot{q}_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial q_j}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\mathbf{J}_i\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_p}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\mathbf{J}_i\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_j}\right)\right]\dot{q}_k\dot{q}_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial q_j}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\mathbf{T}_{si}\mathbf{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_i^T\right) - \frac{\partial}{\partial q_p}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\mathbf{T}_{si}\mathbf{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j}\mathbf{T}_i^T\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_j}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\mathbf{T}_{si}\mathbf{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p}\mathbf{T}_i^T\right)\right]\dot{q}_k\dot{q}_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial q_j}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_p}\mathbf{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\right) +\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_p}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_k}\mathbf{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j}\right)\right]\dot{q}_k\dot{q}_j - \sum_{i=1}^{N} m_i g^T \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\bar{r}_i \; .$$

Uprościmy wyrażenia jak poniżej

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial q_j}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\mathbf{J}_i\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_p}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\mathbf{J}_i\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_j}\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_p} \mathbb{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right) + \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbb{J}_i \frac{\partial^2 \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k \partial q_j}\right) + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_k \partial q_p} \mathbb{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_j}\right) - \frac{1}{2} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbb{J}_i \frac{\partial^2 \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p \partial q_j}\right) \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_p} \mathbb{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right) + \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} \mathbb{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p}\right) + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_p \partial q_k} \mathbb{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_j}\right) - \frac{1}{2} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_p \partial q_j} \mathbb{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right) \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_p} \mathbb{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right) + \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} \mathbb{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p}\right) \right] +$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_p} \mathbb{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=1}^{i} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} \mathbb{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p}\right) .$$

Podobnie dla wyrażeń, w których zamiast $\mathbf{T}_i$ będzie $\mathbf{T}_{si}$

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\partial}{\partial q_j} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{T}_{si} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_i^T\right) - \frac{\partial}{\partial q_p} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{T}_{si} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j} \mathbf{T}_i^T\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_j} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{T}_{si} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p} \mathbf{T}_i^T\right) \right] = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_p} \mathbf{T}_{si} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_i^T\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Trace}\left[\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_i^T\right)\right]+$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_p \partial q_k}\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j}\mathbf{T}_i^T\right)+$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Trace}\left[\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_p}\left(\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j}\mathbf{T}_i^T\right)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_j}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p}\mathbf{T}_i^T\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Trace}\left[\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_i^T\right)\right]+$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Trace}\left[\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_p}\left(\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j}\mathbf{T}_i^T\right)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_j}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p}\mathbf{T}_i^T\right).$$

Zatem

$$F_p=\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\mathbb{J}_i\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right)\ddot{q}_k+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_i^T\right)\ddot{q}_k+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p}\mathbf{T}_i^T\right)\ddot{q}_k+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_p}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\right)\ddot{q}_k+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j\partial q_k}\mathbb{J}_i\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\{\mathrm{Trace}\left[\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_i^T\right)\right]+\right.$$

$$\left.-\mathrm{Trace}\left[\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_p}\left(\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j}\mathbf{T}_i^T\right)\right]+\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p}\mathbf{T}_i^T\right)\right]\right\}\dot{q}_k\dot{q}_j+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_{si}}{\partial q_j\partial q_k}\mathbf{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j-\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{g}^T\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\bar{\mathbf{r}}_i\ . \tag{B.6}$$

Przedstawimy siły w postaci:

$$F_p=\sum_{k=1}^{N}D_{pk}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}D_{pkj}\dot{q}_k\dot{q}_j+D_p\ . \tag{B.7}$$

$$D_{pk}=\sum_{i=1}^{N}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\mathbb{J}_i\frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k}\right)+\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\mathbf{T}_{si}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_i^T\right)+\right.$$

$$\left.+\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k}\mathbf{T}_{si}\mathbf{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p}\mathbf{T}_i^T\right)+\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_p}\mathbf{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k}\right)\right]\ .$$

$$D_p=-\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{g}^T\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p}\bar{\mathbf{r}}_i\ .$$

$$D_{pkj} = \sum_{i=1}^{N} \Bigg[\mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial^2 \mathbb{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} \mathbb{J}_i \frac{\partial \mathbb{T}_i^T}{\partial q_p}\Big) + \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial \mathbb{T}_i}{\partial q_p} \frac{\partial \mathbb{T}_{si}}{\partial q_j} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_k} \mathbb{T}_i^T\Big) +$$

$$+ \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial \mathbb{T}_i}{\partial q_p} \mathbb{T}_{si} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial^2 \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_j \partial q_k} \mathbb{T}_i^T\Big) + \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial \mathbb{T}_i}{\partial q_p} \mathbb{T}_{si} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbb{T}_i^T}{\partial q_j}\Big) +$$

$$- \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial \mathbb{T}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbb{T}_{si}}{\partial q_p} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_j} \mathbb{T}_i^T\Big) - \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial \mathbb{T}_i}{\partial q_k} \mathbb{T}_{si} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial^2 \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_j \partial q_p} \mathbb{T}_i^T\Big) +$$

$$- \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial \mathbb{T}_i}{\partial q_k} \mathbb{T}_{si} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbb{T}_i^T}{\partial q_p}\Big) + \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial^2 \mathbb{T}_i}{\partial q_k \partial q_j} \mathbb{T}_{si} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_p} \mathbb{T}_i^T\Big) +$$

$$+ \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial \mathbb{T}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbb{T}_{si}}{\partial q_j} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_p} \mathbb{T}_i^T\Big) + \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial \mathbb{T}_i}{\partial q_k} \mathbb{T}_{si} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial^2 \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_j \partial q_p} \mathbb{T}_i^T\Big) +$$

$$+ \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial \mathbb{T}_i}{\partial q_k} \mathbb{T}_{si} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_p} \frac{\partial \mathbb{T}_i^T}{\partial q_j}\Big) + \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial^2 \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_j \partial q_k} \mathbb{J}_{si} \frac{\partial \mathbb{T}_{si}^T}{\partial q_p}\Big) \Bigg] .$$

Po zamianie p na i, k na j, j na k, i na p oraz wykorzystaniu równości $\partial \mathbb{T}_i / \partial q_j \equiv 0$ dla $i < j$, otrzymamy

$$F_i = \sum_{j=1}^{N} D_{ij} \ddot{q}_j \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i$$

gdzie

$$D_{ij} = \sum_{p=\max(i,j)}^{N} \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial \mathbb{T}_p}{\partial q_i} \mathbb{J}_p \frac{\partial \mathbb{T}_p^T}{\partial q_j}\Big) + \sum_{p=i}^{N} \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial \mathbb{T}_p}{\partial q_i} \mathbb{T}_{sp} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbb{T}_{sp}^T}{\partial q_j} \mathbb{T}_p^T\Big) +$$

$$+ \sum_{p=j}^{N} \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial \mathbb{T}_p}{\partial q_j} \mathbb{T}_{sp} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbb{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \mathbb{T}_p^T\Big) + \sum_{p=1}^{N} \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial \mathbb{T}_{sp}}{\partial q_i} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbb{T}_{sp}^T}{\partial q_j}\Big) ,$$

$$D_i = -\sum_{p=1}^{N} m_p g^T \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \bar{\mathbf{r}}_p \ .$$

$$D_{ijk} = \sum_{p=\max(i,j,k)}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_j \partial q_k} \mathbb{J}_p \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_i}\right) + \sum_{p=i}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j} \mathbf{T}_p^T\right) +$$

$$+ \sum_{p=i}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \mathbf{T}_{sp} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{T}_p^T\right) + \sum_{p=\max(i,k)}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \mathbf{T}_{sp} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_k}\right) +$$

$$- \sum_{p=j}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_p^T\right) - \sum_{p=\max(i,j)}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \mathbf{T}_{sp} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_i}\right) +$$

$$+ \sum_{p=\max(j,k)}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{T}_{sp} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \mathbf{T}_p^T\right) + \sum_{p=j}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \mathbf{T}_p^T\right) +$$

$$+ \sum_{p=\max(j,k)}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \mathbf{T}_{sp} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_k}\right) + \sum_{p=1}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j \partial q_k} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i}\right) .$$

Po przegrupowaniu otrzymamy

$$D_{ijk} = \sum_{p=\max(i,j,k)}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_j \partial q_k} \mathbb{J}_p \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_i}\right) - \sum_{p=\max(i,j)}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \mathbf{T}_{sp} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_i}\right) +$$

$$+ \sum_{p=\max(i,k)}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \mathbf{T}_{sp} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_k}\right) +$$

$$+ \sum_{p=\max(j,k)}^{N} \left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{T}_{sp} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \mathbf{T}_p^T\right) + \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \mathbf{T}_{sp} \mathbb{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_k}\right) \right] +$$

$$+\sum_{p=i}^{N}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i}\mathbf{T}_{sp}\mathbf{J}_{sp}\frac{\partial^2 \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j \partial q_k}\mathbf{T}_p^T\right)+\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k}\mathbf{J}_{sp}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j}\mathbf{T}_p^T\right)\right]+$$

$$+\sum_{p=j}^{N}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k}\mathbf{J}_{sp}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i}\mathbf{T}_p^T\right)-\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i}\mathbf{J}_{sp}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_p^T\right)\right]+$$

$$+\sum_{p=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_j \partial q_k}\mathbf{J}_{sp}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i}\right).$$

Na ogół masy elementów wykonawczych siłowników z elementami przekładni przymocowanymi do nich są małe i dlatego elementy macierzy $\mathbf{J}_{sp}$ są małe w porównaniu z elementami macierzy $\mathbf{J}_p$. Jednak ze względu na duże przełożenia przekładni niektóre elementy macierzy $\partial \mathbf{T}_{sp}/\partial q_j$ są duże. Dlatego pominiemy w powższych formułach wyrazy z $\mathbf{J}_{sp}$ nie zawierające dwóch pochodnych $\mathbf{T}_{sp}$.

$$D_{ij}=\sum_{p=\max(i,j)}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i}\mathbf{J}_p\frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j}\right)+\sum_{p=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i}\mathbf{J}_{sp}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j}\right),$$

$$D_{ijk}=\sum_{p=\max(i,j,k)}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_j \partial q_k}\mathbf{J}_p\frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_i}\right)+\sum_{p=i}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k}\mathbf{J}_{sp}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j}\mathbf{T}_p^T\right)+$$

$$+\sum_{p=j}^{N}\left[\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k}\mathbf{J}_{sp}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i}\mathbf{T}_p^T\right)-\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i}\mathbf{J}_{sp}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_p^T\right)\right],$$

$$D_i=-\sum_{p=i}^{N}m_p\mathbf{g}^T\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i}\bar{\mathbf{r}}_p.$$

Jeśli wszystkie siłowniki zamocowane są w osiach par kinematycznych tak, że $\partial \mathbf{T}_{sp}/\partial q_k = (\partial \mathbf{T}_{sp}/\partial q_k)\delta_{pk}$ (δ_{pk} - delta Kroneckera), to

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k}\mathbb{J}_{sp}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i}\mathbf{T}_p^T\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k}\delta_{pk}\mathbb{J}_{sp}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i}\delta_{pi}\mathbf{T}_p^T\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_k}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{T}_{sk}}{\partial q_k}\mathbb{J}_{sk}\frac{\partial \mathbf{T}_{sk}^T}{\partial q_i}\delta_{ki}\mathbf{T}_k^T\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_i}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_i}\mathbf{T}_i^T\right) .$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i}\mathbb{J}_{sp}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_p^T\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i}\delta_{pi}\mathbb{J}_{sp}\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k}\delta_{pk}\mathbf{T}_p^T\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_k}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{T}_{sk}}{\partial q_i}\delta_{ki}\mathbb{J}_{sk}\frac{\partial \mathbf{T}_{sk}^T}{\partial q_k}\mathbf{T}_k^T\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_i}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_i}\mathbf{T}_i^T\right) .$$

Po podobnych przekształceniach otrzymamy

$$D_{ij} = \sum_{p=\max(i,j)}^{N}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i}\mathbb{J}_p\frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j}\right) + \delta_{ij}\mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_i}\mathbb{J}_{si}\frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_i}\right) ,$$

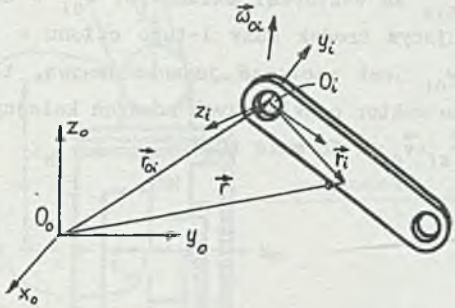
$$D_{ijk} = \sum_{p=\max(i,j,k)}^{N} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial^2 \mathbb{T}_p}{\partial q_j \partial q_k} \mathbb{J}_p \frac{\partial \mathbb{T}_p^T}{\partial q_i}\right) + \delta_{jk} \mathrm{Trace}\left(\frac{\partial \mathbb{T}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbb{T}_{sj}}{\partial q_j} \mathbb{J}_{sj} \frac{\partial \mathbb{T}_{sj}^T}{\partial q_j} \mathbb{T}_j^T\right) ,$$

$$D_i = - \sum_{p=i}^{N} m_p g^T \frac{\partial \mathbb{T}_p}{\partial q_i} \bar{r}_p \quad .$$

UZUPEŁNIENIE C

WYZNACZANIE WEKTORA PĘDU $\vec{p}_i$ I KRĘTU $\vec{K}_i$ WZGLĘDEM POCZĄTKU UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH $x_i y_i z_i$, SKOJARZONEGO Z i-tym CZŁONEM

Przyjmiemy, że układ bazowy $x_0 y_0 z_0$ jest inercjalny. Wtedy [3,44,45,55]



Rys.C.1. Opis ruchu i-tego członu
Fig.C.1. Description of move of i-th link

$$\vec{p}_i = \int_0^{m_i} \frac{d\vec{r}}{dt}\, dm = \int_0^{m_i} \frac{d}{dt}(\vec{r}_{0i} + \vec{r}_i)\, dm = \int_0^{m_i} (\vec{v}_{0i} + \frac{\overset{v}{d\vec{r}_i}}{dt} + \vec{\omega}_{0i} \times \vec{r}_i)\, dm =$$

$$= m_i(\vec{v}_{0i} + \vec{\omega}_{0i} \times \vec{r}_{Si}) \quad . \tag{C1}$$

Różniczkowanie z odwróconym daszkiem oznacza różniczkowanie w ruchomym układzie $x_i y_i z_i$ [44] i w naszym przypadku

$$\frac{\overset{v}{d\vec{r}_i}}{dt} = 0 \; .$$

$$\vec{K}_i = \int_0^{m_i} \vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}}{dt}\, dm = \int_0^{m_i} \vec{r}_i \times (\vec{v}_{0i} + \vec{\omega}_{0i} \times \vec{r}_i)\, dm = m_i \vec{r}_{Si} \times \vec{v}_{0i} + \int_0^{m_i} \vec{r}_i \times (\vec{\omega}_{0i} \times \vec{r}_i)\, dm =$$

$$= m_i \vec{r}_{Si} \times \vec{v}_{0i} + \mathbb{I}_{i-0i}\, \omega_{0i} \quad , \tag{C2}$$

gdzie:

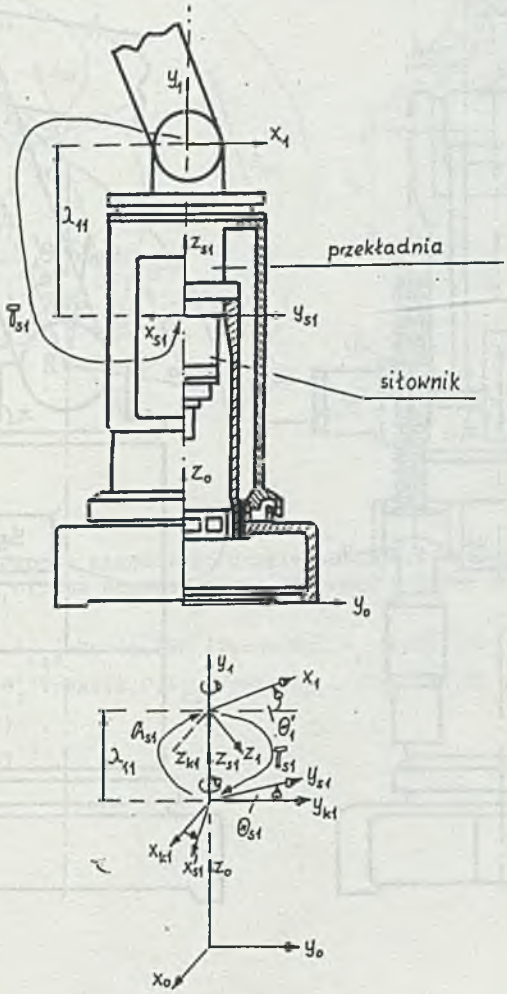
$$\mathbb{I}_i = \begin{bmatrix} I_{iyy} + I_{izz} & -I_{iyx} & -I_{izx} \\ -I_{ixy} & I_{ixx} + I_{izz} & -I_{izy} \\ -I_{ixz} & -I_{iyz} & I_{ixx} + I_{iyy} \end{bmatrix}, \quad \underline{\omega}_{0i} = \begin{bmatrix} \omega_{0ix} \\ \omega_{0iy} \\ \omega_{0iz} \end{bmatrix}.$$

Elementy macierzy tensora bezwładności $\mathbb{I}_i$ obliczamy tak samo jak odpowiednie elementy macierzy pseudobezwładności, tj. za pomocą formuł (B.5). ω_{0ix}, ω_{0ix}, ω_{0ix} są wektorami składowymi $\vec{\omega}_{0i}$ w układzie $x_i y_i z_i$. $\vec{r}_{Si}$ jest wektorem opisującym środek masy i-tego członu w układzie $x_i y_i z_i$. Iloczyn macierzowy $\mathbb{I}_i \underline{\omega}_{0i}$ jest macierzą jednokolumnową, trzywierszową. Macierz tę traktujemy jako wektor o składowych równych kolejnym wierszom i dodajemy go do wektora $m_i \vec{r}_{Si} \times \vec{v}_{0i}$ w formule (C2).

UZUPEŁNIENIE D

ILUSTRACJA KINEMATYKI NAPĘDÓW MANIPULATORA IRb-6. MACIERZE PRZEKSZTAŁCEŃ ZILUSTROWANE NA RYSUNKACH ZACZERPNIĘTO Z PRACY [35]

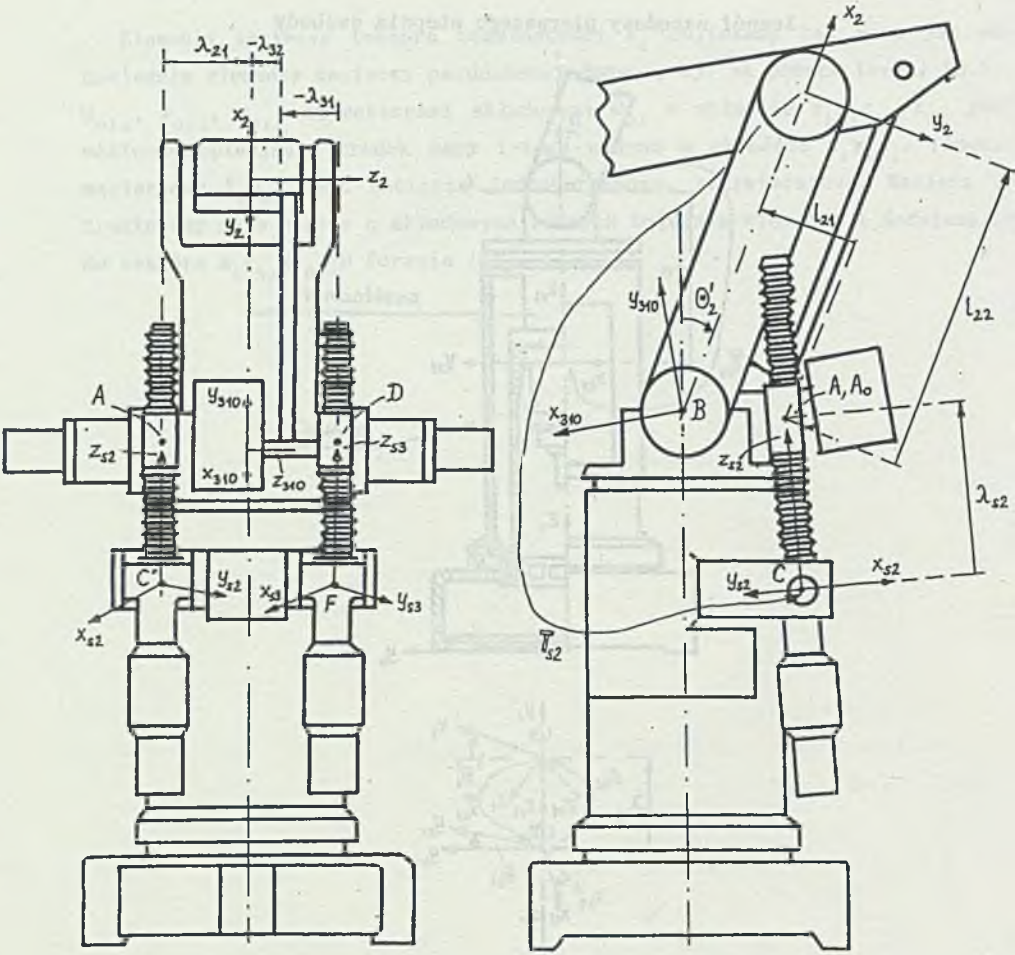
Zespół napędowy pierwszego stopnia swobody

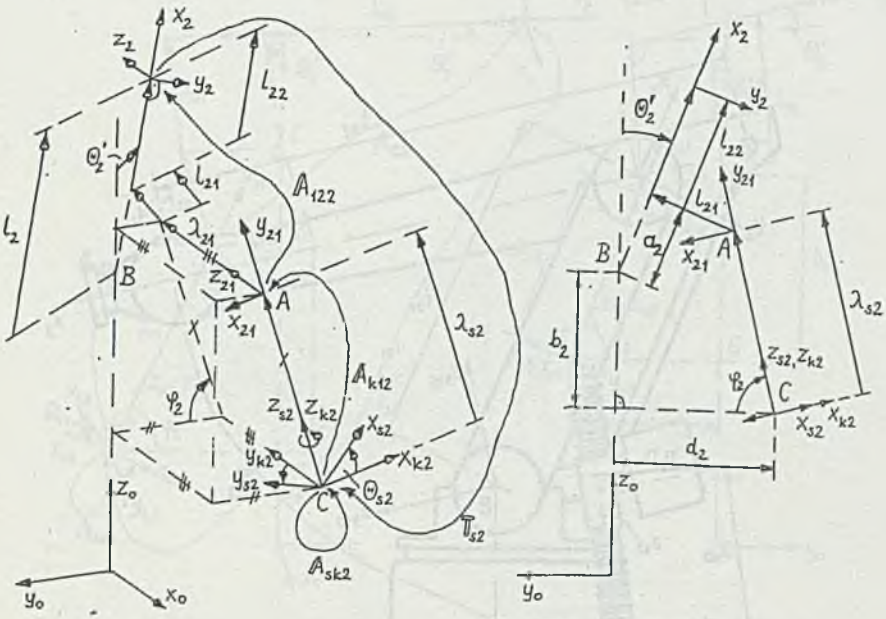


Rys.D.1. Ilustracja zespołu napędowego pierwszego stopnia swobody
Fig.D.1. Illustration of the first degree of freedom drive unit

$$A_{s1} = Rot(z,-\theta_{s1}+\theta'_1+90^\circ)Trans(0,0,\lambda_{11})Rot(x,90^\circ),$$
$$T_{s1} = A_{s1}^{-1}.$$

Zespół napędowy drugiego stopnia swobody





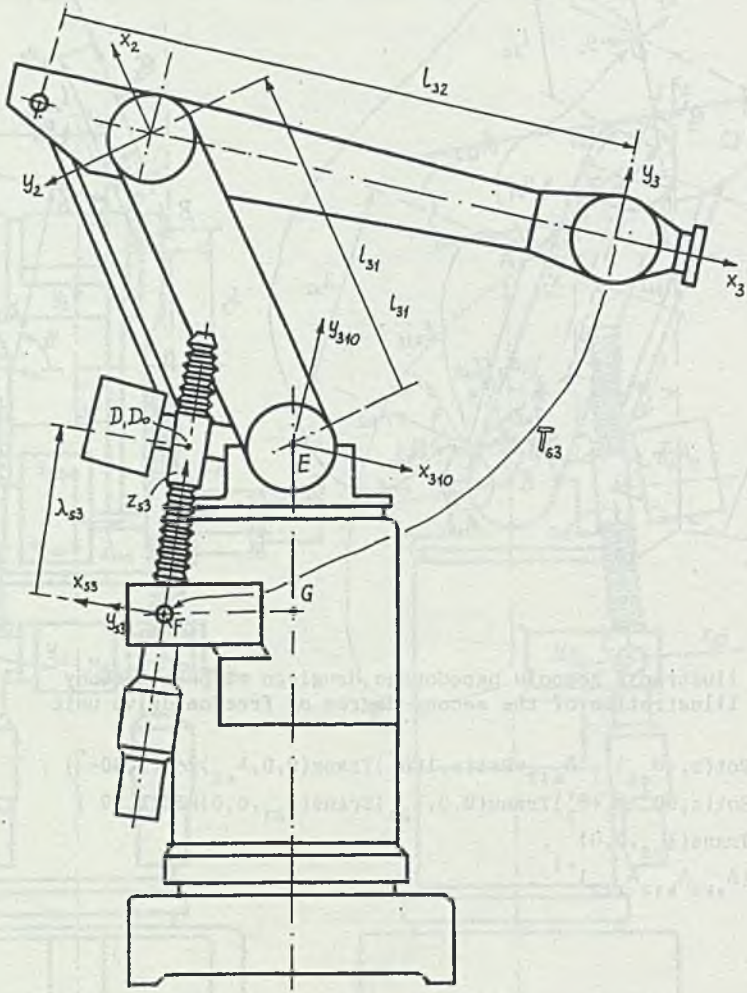
Rys.D.2. Ilustracja zespołu napędowego drugiego stopnia swobody
Fig.D.2. Illustration of the second degree of freedom drive unit

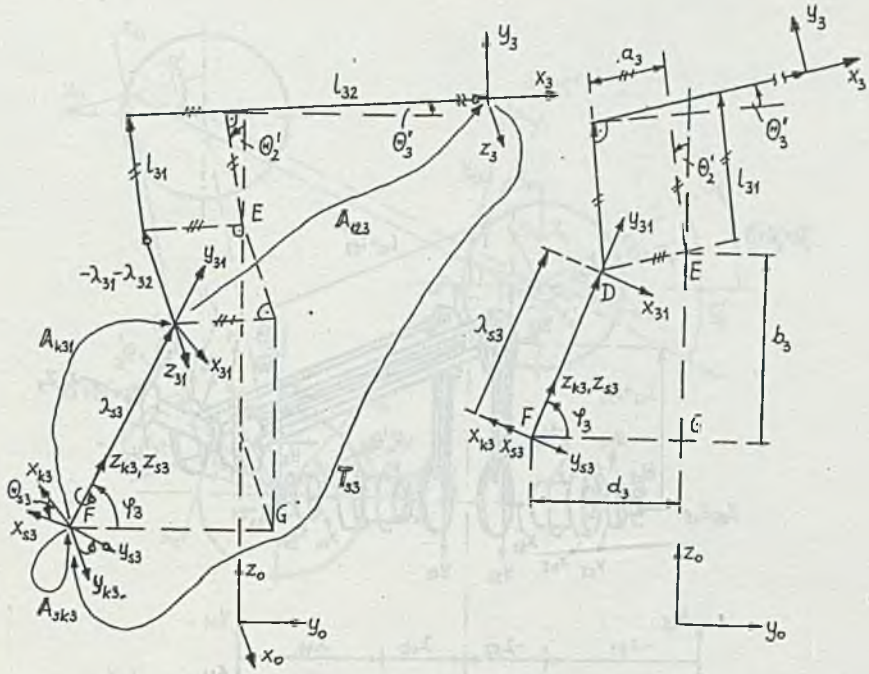
$$A_{sk2}=Rot(z,-\Theta_{s2}) \ , \ A_{k12}=Rot(z,180^\circ)Trans(0,0,\lambda_{s2})Rot(x,90^\circ) \ ,$$

$$A_{122}=Rot(z,90^\circ-\varphi_2+\Theta_2')Trans(0,0,\lambda_{21})Trans(l_{21},0,0)Rot(z,90^\circ)$$
$$Trans(l_{22},0,0) \ ,$$

$$T_{s2}=(A_{sk2}A_{k12}A_{122})^{-1} \ .$$

Zespół napędowy trzeciego stopnia swobody





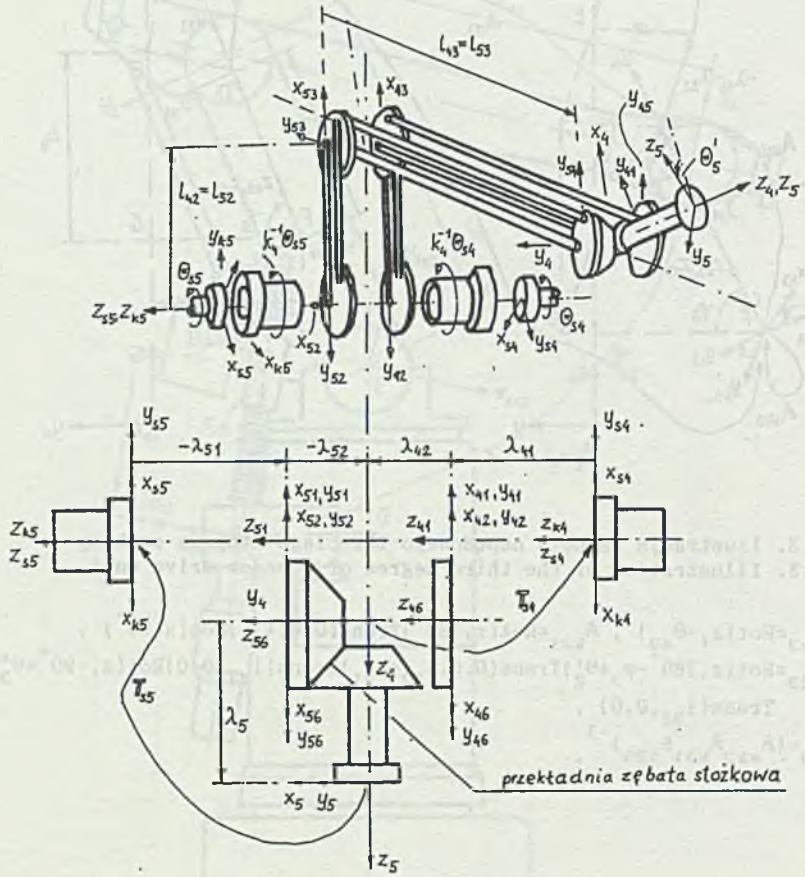
Rys.D.3. Ilustracja zespołu napędowego trzeciego stopnia swobody
Fig.D.3. Illustration of the third degree of freedom drive unit

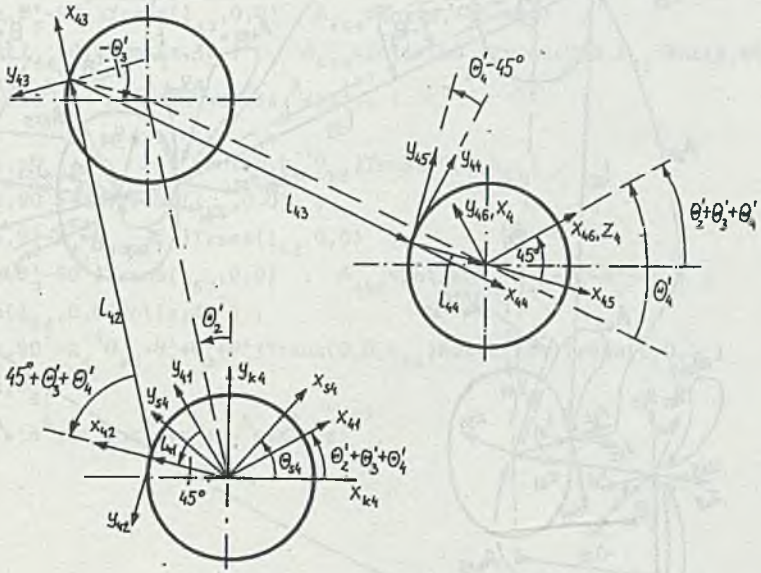
A_{sk3}=Rot(z,$-\theta_{s3}$) , A_{k31}=Rot(z,180°)Trans(0,0,λ_{s3})Rot(x,90°) ,

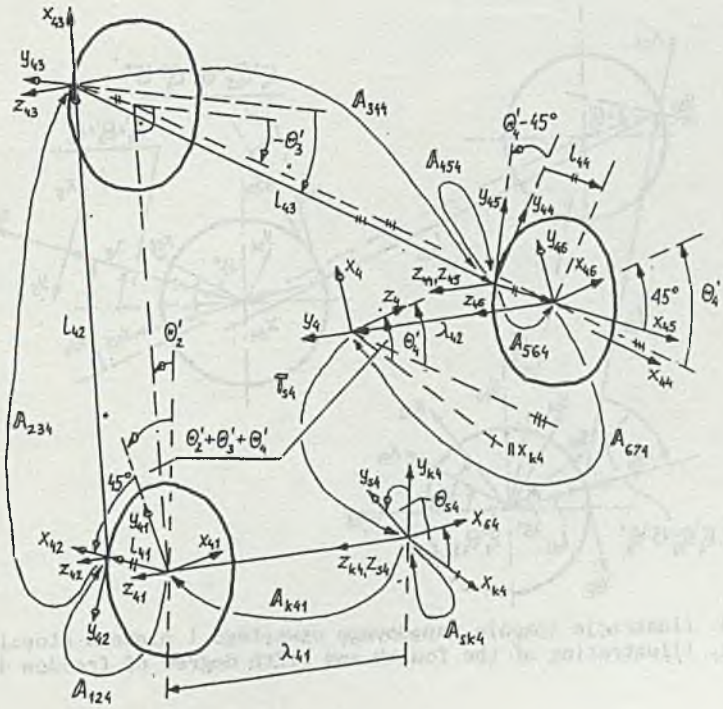
A_{123}=Rot(z,180°$-\varphi_3+\theta_2'$)Trans(0,0,$\lambda_{32}+\lambda_{31}$)Trans($l_{31}$,0,0)Rot(z,-90°$+\theta_3'$)
Trans(l_{32},0,0) ,

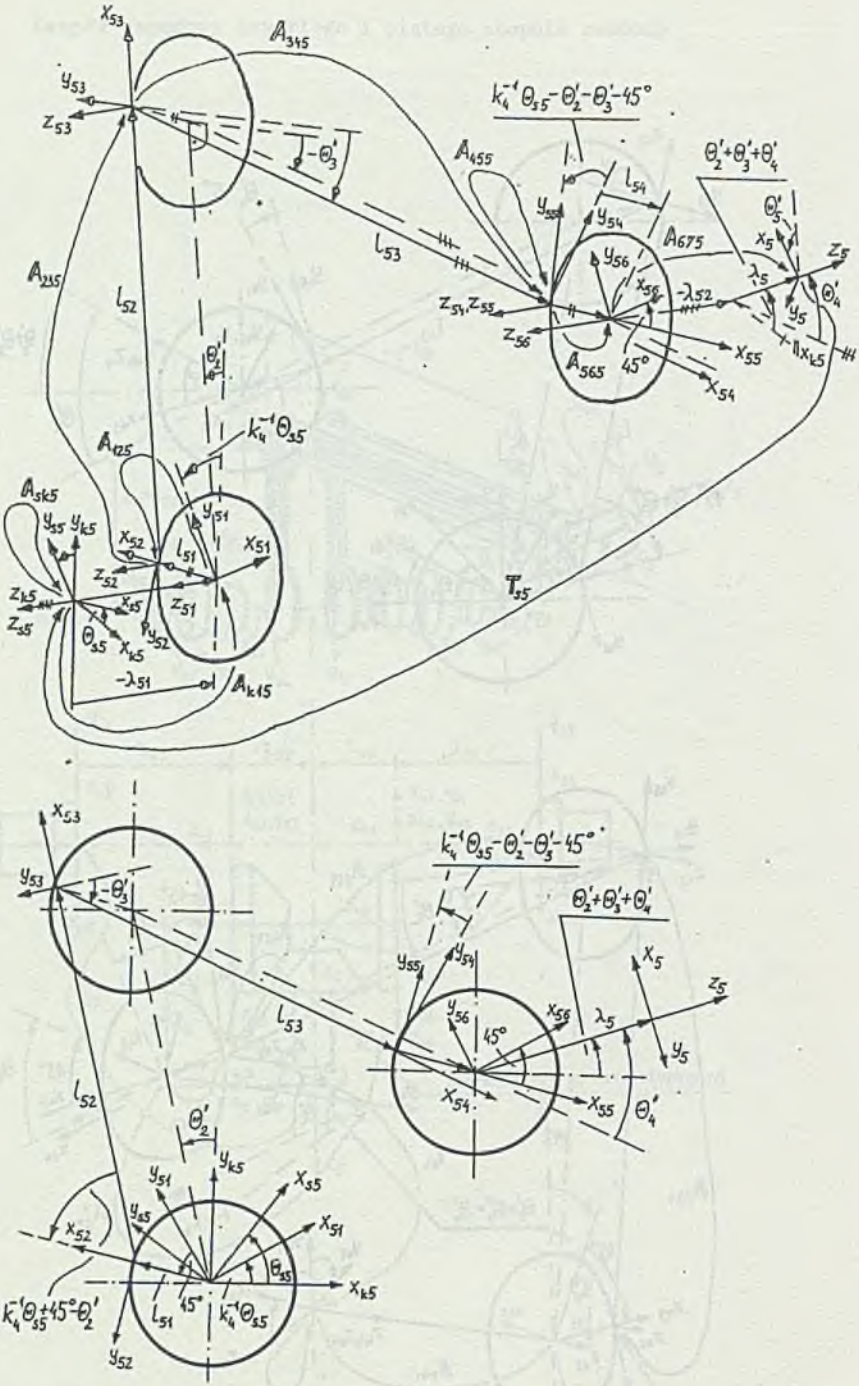
$T_{c3}=(A_{sk3}A_{k31}A_{123})^{-1}$.

Zespół napędowy czwartego i piątego stopnia swobody




x_{43}
y_{43}
$-\theta_3'$
$\theta_4'-45°$
y_{45}
y_{44}
y_{46}, x_4
x_{46}, z_4
$\theta_2'+\theta_3'+\theta_4'$
l_{43}
$45°$
l_{44}
x_{44}
x_{45}
θ_4'
l_{42}
θ_2'
$45°+\theta_3'+\theta_4'$
y_{41}
y_{k4}
x_{54}
y_{54}
x_{41}
x_{42}
l_{41}
θ_{54}
$\theta_2'+\theta_3'+\theta_4'$
$45°$
x_{k4}
y_{42}


x_{43}
y_{43}
z_{43}
A_{344}
$-\theta_3'$
$\theta_4'-45°$
A_{454}
l_{44}
l_{43}
y_{45}
y_{44}
y_{46}
x_{46}
x_4
z_{44}, z_{45}
z_4
z_{46}
$45°$
θ_4'
y_4
λ_{42}
x_{45}
l_{42}
θ_4'
A_{564}
x_{44}
θ_2'
T_{54}
A_{234}
$\theta_2'+\theta_3'+\theta_4'$
$\parallel x_{k4}$
A_{674}
y_{k4}
y_{54}
θ_{54}
x_{54}
$45°$
y_{41}
x_{42}
l_{41}
x_{41}
z_{42}
z_{41}
z_{k4}, z_{54}
x_{k4}
A_{k41}
y_{42}
A_{5k4}
λ_{41}
A_{124}



Rys.D.4. Ilustracja zespołu napędowego czwartego i piątego stopnia swobody
Fig.D.4. Illustration of the fourth and fifth degree of freedom drive unit

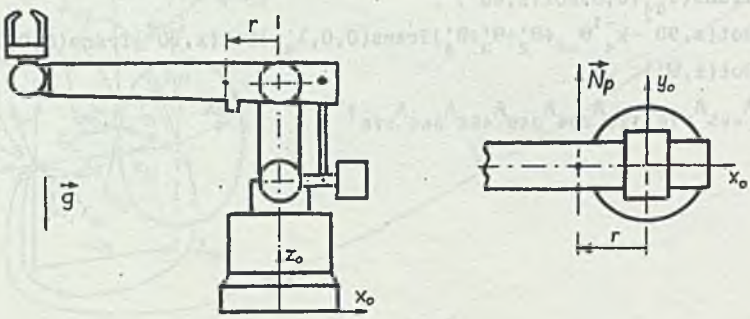
$A_{sk4}=Rot(z,-\theta_{s4})$, $A_{k14}=Rot(z,\theta'_2+\theta'_3+\theta'_4)Trans(0,0,\lambda_{41})$,
$A_{124}=Rot(z,90^\circ+45^\circ)Trans(l_{41},0,0)$, $A_{234}=Rot(z,-45^\circ-\theta'_3-\theta'_4)Trans(l_{42},0,0)$
$A_{344}=Rot(z,\theta'_3-90^\circ)Trans(l_{43},0,0)$, $A_{454}=Rot(z,-45^\circ+\theta'_4)$,
$A_{564}=Trans(l_{44},0,0)Rot(z,45^\circ)$, $A_{674}=Rot(z,90^\circ)Trans(0,0,\lambda_{42})Rot(x,90^\circ)$,
$T_{s4}=(A_{sk4}A_{k14}A_{124}A_{234}A_{344}A_{454}A_{564}A_{674})^{-1}$.

$A_{sk5}=Rot(z,-\theta_{s5})$, $A_{k15}=Rot(z,k_4^{-1}\theta_{s5})Trans(0,0,\lambda_{51})$,
$A_{125}=Rot(z,90^\circ+45^\circ)Trans(l_{51},0,0)$,
$A_{235}=Rot(z,\theta'_2-k_4^{-1}\theta_{s5}-45^\circ)Trans(l_{52},0,0)$,
$A_{345}=Rot(z,\theta'_3-90^\circ)Trans(l_{53},0,0)$, $A_{455}=Rot(z,k_4^{-1}\theta_{s5}-\theta'_2-\theta'_3-45^\circ)$,
$A_{565}=Trans(l_{54},0,0)Rot(z,45^\circ)$,
$A_{675}=Rot(z,90^\circ-k_4^{-1}\theta_{s5}+\theta'_2+\theta'_3+\theta'_4)Trans(0,0,\lambda_{52})Rot(x,90^\circ)Trans(0,0,\lambda_5)$
$Rot(z,\theta'_5)$,
$T_{s5}=(A_{sk5}A_{k15}A_{125}A_{235}A_{345}A_{455}A_{565}A_{675})^{-1}$.

UZUPEŁNIENIE E

WYZNACZANIE MOMENTÓW TARCIA SUCHEGO SIŁOWNIKÓW MANIPULATORA IRb-6 NA PODSTAWIE BADAŃ LABORATORYJNYCH QUASI-STATYCZNYCH RUCHÓW CZŁONÓW, DLA KTÓRYCH POMINIEMY REAKCJE BEZWŁADNE

E.1. Pierwszy siłownik (tylko $\dot{\theta}_{s1} \neq 0$)



Rys.E.1. Pomiar sił tarcia pierwszego siłownika
Fig.E.1. Measurement of friction force of first actuator

Rys.E.1 ilustruje sposób pomiaru momentu tarcia w pierwszej parze. Zmierzona siła $N_p \cong 8 \cdot 9.81$ N, ramię działania $r \cong 0.14$ m. Z równania momentów wokół osi z_0 otrzymamy

$$-N_p \cdot r + M_{01} = 0 \Rightarrow M_{01} = N_p \cdot r \cong 11 \text{ Nm} .$$

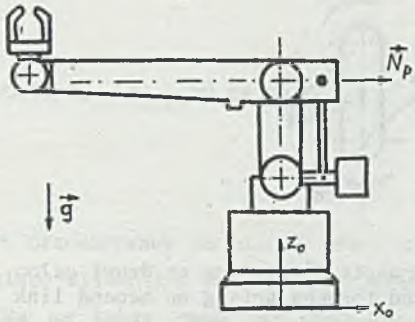
Z kinematyki napędu pierwszego członu (patrz rys.D.1, w uzupełnieniu D. oraz formuła (4.8)) wynika

$$F_{s1t} = \frac{M_{01}}{|k_1|} = \frac{11}{158} \cong 0.07 \text{ Nm} .$$

Zmierzona siła nie zmieniła się po rozpoczęciu ruchu i dlatego

$$F_{s1ts} = F_{s1tr} = 0.07 \text{ Nm} .$$

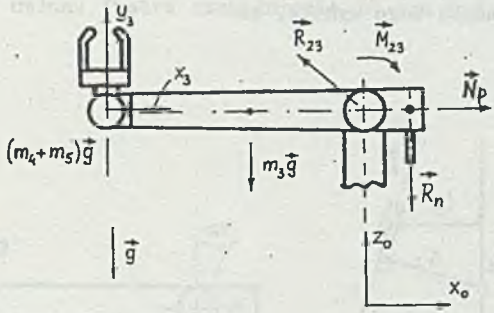
E.2. Drugi siłownik (tylko $\dot{\theta}_{s2} \neq 0$)



Rys.E.2. Pomiar sił tarcia drugiego siłownika
Fig.E.2. Measurement of friction force of second actuator

Rys.E.2 ilustruje sposób pomiaru momentu tarcia w drugiej parze. Zmierzona siła przy starcie była równa $N_s \cong 8 \cdot 9.81$ Nm, w czasie ruchu $N_r \cong 7 \cdot 9.81$ N, $r_{13} = 0.14$ m.

Równania sił trzeciego członu zilustrowanego na rys.E.3 mają postać



Rys.E.3. Siły i momenty działające na trzeci człon
Fig.E.3. Forces and torques acting on third link

$$-(m_4+m_5)g - m_3 g + R_{23z} - R_n = 0 \quad ,$$

$$-R_{23x} + N_p = 0$$

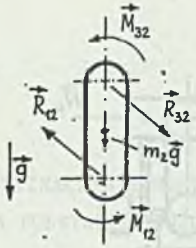
Równanie momentów względem osi trzeciej pary ma postać

$$(m_4 + m_5)gl_3 + m_3(l + \bar{x}_3)g - M_{23} - R_n \cdot r_{13} = 0 \quad .$$

Równanie momentów dla drugiej pary (zilustrowanej na rys.E.4) względem jej osi ma postać

$$M_{32} + M_{12} - R_{32x} \cdot l_2 = 0 \quad ,$$

$$M_{32} = -M_{23} \quad , \quad \vec{R}_{32} = -\vec{R}_{23} \quad .$$



Rys.E.4. Siły i momenty działające na drugi człon
Fig.E.4. Forces and torques acting on second link

Z kinematyki napędów manipulatora IRb-6 wynika, że dominującym oporem ruchu jest M_{12} i dlatego $M_{23} = -M_{32}$ można pominąć. Po tych uproszczeniach i podstawieniu wartości mas członów $m_3 + m_5$, współrzędnych środków ich mas, (wynikających z macierzy pseudobezwładności) oraz parametrów l_2, l_3 (opisanych w tabeli 4.1) otrzymamy $M_{12} = N_p \cdot l_2$.

Z kinematyki napędów drugiego członu (patrz uzupełnienie D, rys.D.2) wynika, że M_{12} wytwarza siłę oporu ruchu R_t drugiego siłownika, którą ilustruje rys.E.5. Z rysunku tego wynika, że

Rys.E.5. Siła oporu ruchu drugiego siłownika
Fig.E.5. Opposite force move of second actuator.

$$M_{12} = R_t \cdot r_s \ .$$

Siłę oporu wyrazimy poprzez moment tarcia F_{ts} siłownika. Po uwzględnieniu skoku przekładni śrubowej h = 0.008 m otrzymamy

$$R_t = F_{ts} \frac{2\pi}{h} \ .$$

Zatem

$$F_{ts} = \frac{h}{2\pi} \frac{N_p \cdot l_2}{r_s} .$$

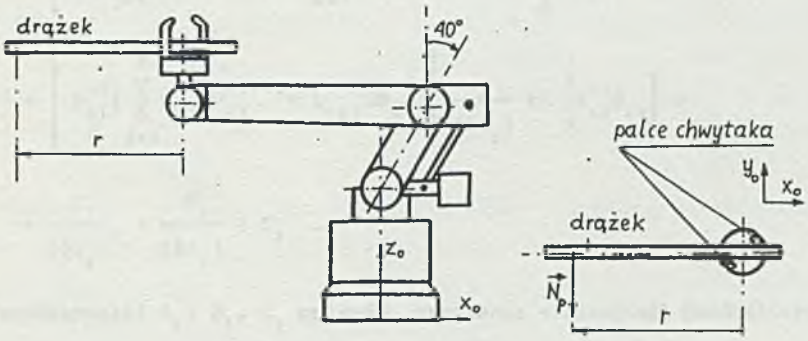
Po obliczeniu otrzymujemy $F_{s2ts} \cong 0.33$ Nm , $F_{s2tr} \cong 0.28$ Nm.

E.3. Trzeci siłownik

Napęd trzeciego siłownika jest przekazywany na człony przez przekładnię śrubową tak samo jak napęd drugiego siłownika. Dlatego przyjmiemy, że momenty tarcia trzeciego siłownika są takie same jak drugiego siłownika $F_{s3ts} \cong 0.33$ Nm, $F_{s3tr} \cong 0.28$ Nm.

E.4. Piąty siłownik (tylko $\dot{\theta}_{s5} \neq 0$ i $\dot{\theta}'_5 \neq 0$)

Rys.E.6 ilustruje sposób pomiaru momentu tarcia w piątej parze. Siła naciągu drążka włożonego między palce chwytaka nie zmieniała się po rozpoczęciu ruchu. $N_p = 6 \cdot 9.81$ N, ramię działania $r \cong 0.08$ Nm. Po uwzględnieniu kinematyki napędu piątego członu (patrz uzupełnienie D, rys.D.4 oraz formuła (4.8)) otrzymamy



Rys.E.6. Pomiar sił tarcia piątego siłownika
Fig.E.6. Measurement of friction force of fifth actuator

$$F_{s5ts} = F_{s5tr} = \frac{N_p \cdot r}{|k_4 \cdot k_5|} = \frac{N_p \cdot r \cdot 32}{128 \cdot 19} = 0.06 \text{ Nm} .$$

E.5. Czwarty siłownik

Napęd czwartego siłownika jest przekazywany na człony podobnie jak napęd piątego siłownika. Dlatego przyjmiemy momenty tarcia czwartego siłownika równe momentom tarcia piątego siłownika.

$$F_{s4ts} = F_{s4tr} = 0.06 \text{ Nm} .$$

UZUPEŁNIENIE F

POSTAĆ ANALITYCZNA WSPÓŁCZYNNIKÓW A_l, B_l, C_l WYSTĘPUJĄCYCH W RÓWNANIU (9.2), WYKORZYSTANYM DO PLANOWANIA STEROWAŃ i_{kl}

Współrzędne $\theta_{sj}^{(i+1)}$, $\dot{\theta}_{sj}^{(i+1)}$ i $\ddot{\theta}_{sj}^{(i+1)}$ opisują i+1-szy, aktualny stan manipulatora i są znane. Szukanymi są nieznane $\dot{\theta}_{sj}^{(i)}$ i $\ddot{\theta}_{sj}^{(i)}$ opisujące stan poprzedni.

$$\theta_{sj}^{(i+1)} = \theta_{sj}^{(i)} + \Delta\theta_{sj} \quad , \tag{F1}$$

$$\dot{\theta}_{sj}^{(i)} = \frac{\Delta\theta_{sj}}{\Delta t_i} \quad , \quad \ddot{\theta}_{sj}^{(i)} = \frac{\dot{\theta}_{sj}^{(i+1)} - \dot{\theta}_{sj}^{(i)}}{\Delta t_i} = \frac{\dot{\theta}_{sj}^{(i+1)}}{\Delta t_i} - \frac{\Delta\theta_{sj}}{(\Delta t_i)^2} \quad . \tag{F2}$$

Z formuł (9.1), (5.2), (F1) i (F2) wynika

$$i_{kl} = \left[k_{sl}^{-1} \sum_{j=1}^{N} \left(-D_{sij}\Delta\theta_{sj} + \sum_{k=1}^{N} D_{sijk}\,\Delta\theta_{sj}\Delta\theta_{sk}\right)\right] \frac{1}{(\Delta t_i)^2} +$$

$$+ \left[k_{sl}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{N} D_{sij}\dot{\theta}_{sj}^{(i+1)} + k_{vsl}\Delta\theta_{sl}\right)\right] \frac{1}{(\Delta t_i)} + \left[k_{sl}^{-1}D_{sl}\right] =$$

$$= \frac{A_l}{(\Delta t_i)^2} + \frac{B_l}{(\Delta t_i)} + C_l \quad . \tag{F3}$$

Współczynniki A_l, B_l, C_l opisują wyrażenia w nawiasach kwadratowych.

LITERATURA

[1] Banaszkiewicz M., Guzowski M.: Algorytm rozwiązywania problemu kinematyki odwrotnej dla robota dowolnego typu. II K.K. Robotyki,t.2, Wrocław 1988.

[2] Baraniec T.: Planowanie trajektorii minimalnoczasowych z dowolną kinematyką dla robota IRb-6. Praca dyplomowa, Instytut Automatyki, Politechnika Śląska, Gliwice 1991.

[3] Beer F.P.,Johnston E.R.: Vector Mechanics for Engineers, Dynamics, Mc Graw-Hill Book Company 1977.

[4] Bejczy A., Paul R.P.: Simplified robot arm dynamics for control in Proceedings. 20th Conf. Devision and Control .Dec.1981.

[5] Bronstejn I.N., Siemiendiajew K.A.: Matematyka - Poradnik encyklopedyczny. PWN, Warszawa 1976.

[6] Byron F.W., Fuller R.W.: Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej. PWN, Warszawa 1973.

[7] Chang H.: Closed form solution for inverse kinematics of robot manipulators with redundancy. IEEE Int. Journ. Robotics and Automation, vol.3, 1987.

[8] Craig J.J.: Introduction to Robotics. Mechanics and Control. Addison - Wesey Publ. Comp., New York 1989.

[9] Dulęba I.,Jacak W., Łysakowska B.:Efektywność metod planowania trajektorii prostoliniowych manipulatora robota IRb-6. II K.K.Robotyki, t.2, Wrocław 1988.

[10] Dulęba I.,Łysakowska B.: Zmodyfikowana metoda R.M.Taylora parametryzacji ścieżek prostoliniowych ruchu robota IRb-6. III K.K.Robotyki, t.2, Wrocław 1990.

[11] Dyrda M.:Kinematyka i macierze pseudobezwładności manipulatora IRb-6. Praca dyplomowa, Instytut Automatyki, Politechnika Śląska, Gliwice 1987.

[12] Einstein A.:O szczególnej i ogólnej teorii względności. Książnica Towarzystwa Nauczycieli Szkół Wyższych, Lwów-Warszawa 1922.

[13] Findeisen W. i inni: Poradnik inżyniera automatyka. WNT,Warszawa 1973.

[14] Galicki M.: Zastosowanie algorytmu ARMIJO do planowania zadań kinematycznych. II K.K. Robotyki, t.2, Wrocław 1988.

[15] Gerke W.: Collision - free and Shorted Path for Industrial Robots Found by Dynamic Programing. Robotosysteme 1, 1985.

[16] Gosiewski A. i inni: Badania własności dynamicznych oraz projekt regulacji nadążnej dla robotów IRb-6 oraz IRb-60. Raport IA Polit. Warszawskiej Probl. Węzł. 06. 6, 1984.

[17] Gousenes L.: Strategies for Soling Collision free Trajectories. Problem for Mobile and Manipulator Robots, Intern. J. Robotics Res. 3 (4), 1984.

[18] Góral A.:Meandry fizyki, Wydawnictwo MON, Warszawa 1987.

[19] Grodecki A., Gosiewski A.: Sprzężenia Typu "Feedforward" w Regulatorze Położenia Ramion Robota IRp-6. III K.K.Robotyki, t.2, Wrocław 1990.

[20] Hartenberg R.S., Denavit J.: A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices. Transactions of ASME .J. Applied Mechanics June 1955.

[21] Irzeński W., Trybus L.: Stałowzmocnieniowy serwomechanizm PID dla robotów przemysłowych. CPBR 7.1 "Roboty przemysłowe ", cel 203.

[22] Izaquirre A.,Paul R.: Automatic Generation of the Dynamic Equations of the robot manipulators using LISP program. IEEE Intern. Conf. on Robotic and Automation. Apr. San Francisco 1986.

[23] Jacak W.: Strategies of Searching for Collision - Free Manipulators Motions : Automata Theory Approach, Robotica 7(2) ,1989.

[24] Jacak W.,Łysakowska B.: Dyskretne metody modelowania kinematyki robota. III K.K.Robotyki, t.2, Wrocław 1990.

[25] Jacak W., Płaszewski W.,Sierocki I.: Planowanie toru ruchu robota wykorzystujące dyskretny model jego kinematyki. II K.K.Robotyki, t.3, Wrocław 1988.

[26] Jacak W., Rogaliński P., Łysakowska B.: Planowanie optymalnych trajektorii ruchu robota. III K.K.Robotyki, t.1, Wrocław 1990.

[27] Knapczyk J., Kisiel J.: Analiza wpływu parametrów schematu kinematycznego manipulatora na jego możliwości realizacji zadanego ruchu śrubowego chwytaka II K.K.Robotyki, t.4, Wrocław 1988.

[28] Knapczyk J., Kisiel I.: Wektorowa metoda wyznaczania ruchu członów manipulatora z sześcioma parami obrotowymi (zadanie odwrotne) Z.N.Pol. Śl., s. Mechanika nr 86, Gliwice 1987.

[29] Knapczyk J., Stępniewski A.: Analiza kinematyczna i dynamiczna manipulatora z pięcioma parami obrotowymi metodą macierzową dla zadanej trajektorii ruchu. Z.N.Pol.Śl. s.Mechanika nr 85. Gliwice 1985.

[30] Koch T.: Wyznaczanie transformacji odwrotnej metodą charakterystycznej pary przegubów dla dowolnej kinematyki robota. III K.K.Robotyki, t.2, Wrocław 1990.

[31] Kostrzewski J., Łysakowska B.: Zmodyfikowana metoda obliczania równań kinematyki odwrotnej robota IRb-6. II K.K.Robotyki,t.2, Wrocław 1988.

[32] Kowalowski H.:Maszyny i napęd elektryczny, PWN, Warszawa 1983.

[33] Kowalowski H., Szkodny T.: Kinematyka robota - modele matematyczne robota IRb-6, praca NB-400/Rau-2/Rau-1/88/2.4, Gliwice 1990.

[34] Kowalowski H.,Szkodny T. i inni: Laboratorium robotów przemysłowych, Skrypt Pol.Śl. nr 1507, Gliwice 1989.

[35] Kucharski D.: Mikrokomputerowe projektowanie trajektorii manipulatora robota IRb-6. Praca dyplomowa, Instytut Automatyki, Polit.Śl., Gliwice 1989.

[36] Lozano-Perez T.: Spatial Planing: Configuration Space Approach. IEEE Trans. on Computers 32(2), 1983.

[37] Luch J.J., Walker M. W., Paul R.P.: On - line Computation Scheme for Mechanical Manipulators ASME, J.Dyn. Syst. 102, 1980.

[38] Niederliński A.: Roboty przemysłowe, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1981.

[39] Niederliński A.: Układy wielowymiarowej automatyki., WNT, Warszawa 1974.

[40] Olędzki A.: Podstawy teorii maszyn i mechanizmów. PWN, Warszawa 1987.

[41] Paul R. P.: Robot Manipulators: Mathematic, Programing and Control. MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London 1983.

[42] Ranky P.G., Ho C.Y.: Robot Modelling Control and Applications with Software IFS, Springer-Verlag, Berlin, Heidenberg, New York Tokyo 1985.

[43] Shin K.G., McKay M.D.: A dynamic programming approach to trajectory planning of robotic manipulators, IEEE Transactions on AC-31, No.6, 1986.

[44] Skalmierski B.: Kinematyka i dynamika dla automatyków. Skrypt Pol. Śl. nr 224 Gliwice 1968.

[45] Skalmierski B.: Mechanika z wytrzymałością materiałów. PWN, Warszawa 1983.

[46] Skalmierski B.: Mechanika z wytrzymałością dla Automatyków. PWN, Warszawa 1973.

[47] Szkodny T.: Dynamika manipulatorów robotów przemysłowych. II K.K.Robotyki, Wrocław, 1988.

[48] Szkodny T.: Dynamika manipulatorów, praca nie publikowana.

[49] Szkodny T.: Kinematyczna dekompozycja różniczkowa ruchu członu roboczego robota IRb-6. Z.N.Pol.Śl.nr 96. Gliwice 1988.

[50] Szkodny T.: Kinematyczna dekompozycja ruchu członu roboczego robota IRb-60. K.K.Robotyki, Wrocław, 1990.

[51] Szkodny T.: Manipulatory robotów przemysłowych - Modele matematyczne. Skrypt Pol.Śl.nr 1507, Gliwice 1989.

[52] Szkodny T.: Sterowanie robotem IRb-6 K.K.BIOMECHANIKA 91, Zakopane 1991, Z.N.Pol.Śl.s.Mechanika, nr 112, Gliwice 1992.

[53] Szynawa T.: Komputerowe planowanie trajektorii minimalnoczasowych z zadaną kinematyką dla manipulatora IRb-6. Praca dyplomowa Instytut Automatyki Pol.Śl., Gliwice 1991.

[54] Szynkiewicz A.,Gosiewski A.,Janecki D.: Weryfikacja doświadczalna na modelu dynamiki manipulatora IRb-6. III K.K.Robotyki, Wrocław 1990.

[55] Taylor R. M.: Planning and execution of straight - line manipulator trajectories, Robotmotion: planning and control red. M.Brady i in. MIT Press Cambridge 1983.

[56] Trybus L.: Dobór nastaw serwomechanizmów PID o strukturze jak w robotach IRb. II K.K.Robotyki, Wrocław 1988.

[57] Wajs K.: Linie pierwiastkowe w automatyce. WNT, Warszawa 1973.

[58] Wojnarowski J., Nowak A.: Mechanika manipulatorów - robotów w opisie motorów. Skrypt Pol. Śl.Gliwice 1992.

[59] Węgrzyn S.: Podstawy automatyki WNT, Warszawa 1978.

[60] Wolovich W.A.: Robotic; Basis Analysis and Design CBS College Publishing, 1987.

[61] Zmilczak P.: Dobór nastaw regulatorów serwomechanizmów sterujących manipulatorem IRb-6. Praca dyplomowa, Instytut Automatyki Pol.Śl., Gliwice 1991.

[62] Yang A.,T.: Application of Quaternion Algebra and Dual Numbers for the Analysis of Spatial Mechanisms. Doctoral Diss. Columbia Univ. 1963.

MODELE MATEMATYCZNE RUCHU MANIPULATORÓW ROBOTÓW PRZEMYSŁOWYCH NA POTRZEBY STEROWANIA

S t r e s z c z e n i e

W pracy tej skupiono się na modelach matematycznych ruchu typowych manipulatorów robotów przemysłowych, tworzących szeregowe otwarte łańcuchy kinematyczne. Przeanalizowano aktualny stan opisu kinematyki i dynamiki ruchu manipulatorów ze szczególnym uwzględnieniem skutków stosowanych powszechnie uproszczeń.

Zaproponowano modele kinematyki prostej i odwrotnej w postaci ciągłej i różniczkowej z uwzględnieniem równań więzów członów roboczych. Opracowano ogólne postacie równań Newtona i Lagrange'a dla manipulatorów z siłownikami zamocowanymi poza osiami par łączących sąsiednie człony. Bazując na tych modelach kinematyki i dynamiki zilustrowano skrótowo w charakterze przykładów problemy związane z: algorytmami generacji i planowania trajektorii zadanych, doborem nastaw regulatorów serwomechanizmów o znanej strukturze, algorytmem symulującym ruch manipulatora i badaniami wrażliwościowymi serwomechanizmów.

Zaproponowano oryginalny algorytm planowania PLAN2 generujący trajektorie ruchu o dowolnie zdefiniowanym kształcie. Także zaproponowano oryginalny algorytm STER symulacji ruchu manipulatora sterowanego serwomechanizmami o dowolnych znanych strukturach na przykładzie manipulatora IRb-6.

MATHEMATICAL MODELS OF MOTION
OF INDUSTRIAL ROBOT MANIPULATORS ON CONTROL

S u m m a r y

Mathematical models of motion of typical industrial robot manipulators which from open series kinematic chains are in focus of the paper. The description of kinematics and dynamics of the manipulators motion has been analyzed here with special regardto the effects of commonly used simplifications.

Models of direct and inverse kinematics in continuous and differential form have been suggested, with regard to equations of effector contrains. General forms of Newton and Lagrange equations for the manipulators with actuators fixed beyond the axes of pairs joining the adjacent links, have been worked out.

Basing upon those models of kinematics and dynamics, problems connected with algorithms of generation and requred trajectory planning, with selecting of sets controllers of servos whose structure is known, and with algorithm simulating motion of the manipulator as those erising during tests of servo sensibility have been briefly illustrated.

PLAN2, an original planning algorithm to generate a motion trajectory of an arbitrary shape has been proposed, and also STER, an original algorithm simulating the motion of a manipulator controlled by seros of arbitrary known structures has been suggested an the example of the IRb-6 manipulator.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРОВ ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ ПРИМЕНЯЕМЫЕ ДЛА УПРАВЛЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе внимание сосредоточено на математические модели движения типичных манипуяторов промышленных роботов, создающих последовательхые открытые кинематические цепи. Рассмотрено современное состояние описания кинематики и динамики движения манипуляторов с особым учетом последствий повсеместно применяемых упрощений.

Предложены кинематические модели (простые и обратные) в непрерывном и дифференциальном виде с учетом уравнений связей рабочих звеньеб. Разработан общий вид уравнений Нютона и Лагранжа для манипуляторов с сервомоторами закрепленными вне осей пар соединяющих соседние звенья.

Опираясь на ети модели кинематыки и динамики проиллюстрированы в сокращении проблемы связанные с: алгоритмами генерирования и планирования определенных траекторий, подбопом настроек регуляторов сервомеханизмов с известнсй структурой, с алгоритмом имитирующим движение манипулятора и исследованиями чувствительности сервомеханизмов.

Предложен оригинальный алгоритм планирования PLAN2 генерирующий траектории движения произвольной формы. Предложен также оригинальный алгоритм STER имитационного моделирования движения манипулятора упраляемого сепвомеханизмами с произвольными определенными структурами на примере манипулятора IRb-6.