ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004
Seria: BUDOWNICTWO z. 102 Nr kol. 1644

Witold BASIŃSKI*
Politechnika Śląska

OSZACOWANIE SZTYWNOŚCI OBROTOWEJ DOCZOŁOWYCH POŁĄCZEŃ ODKSZTAŁCALNYCH NA PODSTAWIE DYNAMIKI KONSTRUKCJI

Streszczenie. W pracy pokazano możliwość wyznaczania sztywności obrotowej doczołowych połączeń odkształcalnych na podstawie pomiaru amplitudy, prędkości kołowej i tłumienia drgań harmonicznie wzbudzonych. Przedstawiono również (ze względu na współczynnik dynamiczny) dynamiczne modele materiału Hooke'a, Maxwella, Voigta-Kelvina oraz standardowy. Na podstawie tychże modeli można wyznaczyć przemieszczenia konstrukcji poddanej wpływom dynamicznym, służące do określenia związku M(φ).

ESTIMATE ROTARY RIGIDITY OF THE SEMIRIGID JOINTS BASED ON THE DYNAMIC CONSTRUCTION

Summary. This article has shown the method of calculation of rotary rigidity of the semirigid joints on the basis of measurements of amplitude, circular speed and vibration damping. Dynamic Hook, Maxwell, Voigt-Kelvin and standard models have been analysed (in respect of the dynamic coefficient). On their basis we can calculate dislocation of the construction necessary to define M(φ) connection.

1. Wprowadzenie

Z dotychczasowych opisywanych w literaturze, np. [1], [2], [3], doświadczeń wiadomo, że wszystkie doczołowe połączenia śrubowane są odkształcalne. Ich właściwości mechaniczne wykazują znaczne rozproszenie, zwłaszcza sztywność obrotowa i nośność graniczna. Przyczyną znacznego rozproszenia sztywności połączeń są imperfekcje geometryczne doczołowych płaszczyzn styku, które generują w elementach konstrukcji znaczące montażowe naprężenia własne.

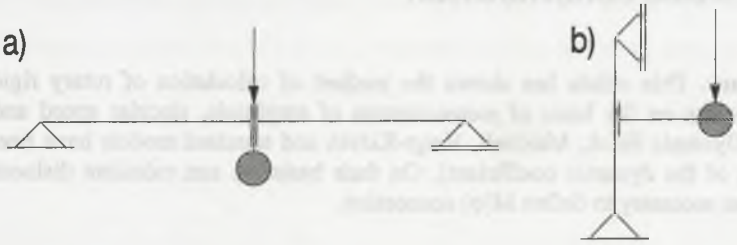
* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Zbigniew Kowal

Do obliczeń numerycznych przemieszczeń i sił przekrojowych elementów konstrukcyjnych potrzebne są matematyczne modele sztywności obrotowej. Powinny być one zgodne z fizycznymi modelami statycznymi opisanymi za pomocą współrzędnych pomiarowych M i φ (rys. 2a).

W pracy kierowano się tezą, iż możliwe jest wyznaczenie współrzędnych M(φ) połączenia odkształcalnego metodami dynamicznymi. Przedstawiono metodę wyznaczania sztywności obrotowej doczołowych połączeń odkształcalnych na podstawie pomiaru amplitudy, prędkości kołowej i tłumienia drgań harmonicznie wzbudzonych. Przeanalizowano również (ze względu na współczynnik dynamiczny) dynamiczne modele materiału Hooke'a, Maxwella, Voigta-Kelvina oraz standardowy. Na ich podstawie możemy wyznaczyć przemieszczenia konstrukcji poddanej wpływom dynamicznym, służące do określenia związku M(φ).

2. Wyznaczanie sztywności obrotowej na podstawie drgań ustalonych

Do wyznaczenia sztywności obrotowej połączeń doczołowych wybrano model układu dynamicznego o jednym stopniu swobody dynamicznej. W rachubę wzięto modele fizyczne występujące w konstrukcjach stalowych: belkę wolnopodpartą oraz wspornik (rys.1)

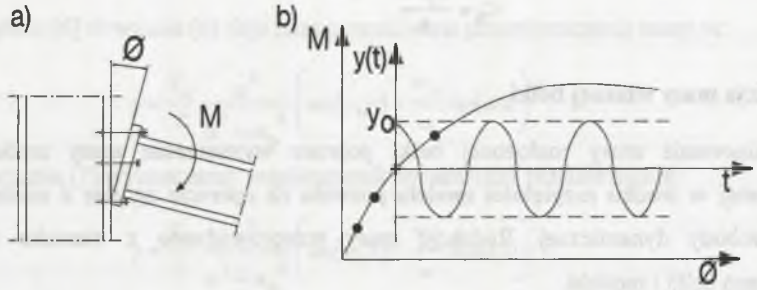


Rys.1. Modele fizyczne: a) belka wolnopodparta, b) wspornik
Fig.1. Physical models a) beam, b) bracket

Na tychże modelach możemy testować ścieżkę równowagi statycznej M(φ) (rys.2b) stopniowo zwiększając masowe obciążenie modelu generujące wstępne ugięcie elementu. W kolejnych etapach zwiększania obciążenia masą m_i wprowadzamy siłę wzbudzającą P(t), która powoduje powstanie drgań harmonicznie wzbudzonych (rys. 2). W trakcie kolejnych etapów obciążeń dokonujemy pomiaru prędkości kołowych drgań oraz przemieszczeń.

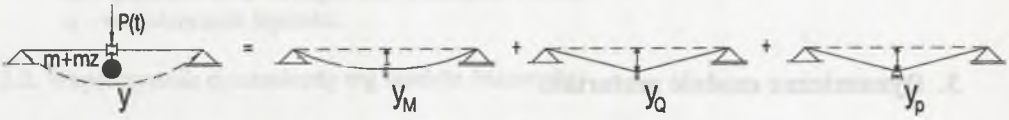
Algorytm oszacowania sztywności obrotowej C_φ połączenia pokażemy na przykładzie belki wolnopodpartej (rys.3). Na podstawie pomierzonych: amplitudy y, przemieszczeń oraz

prędkości kołowej drgań ustalonych możemy wyznaczyć z równania (1) przemieszczenie y_p. Na bazie y_p wyznaczymy sztywność liniową połączenia C_p, a następnie jego sztywność obrotową C_φ.



Rys.2 a) Współrzędne M i φ, b) testowanie M(φ) za pośrednictwem pomiaru drgań ustalonych
Fig.2 a) Co-ordinates M and φ, b) testing M(φ) trough measurement of set vibration

Łączne przemieszczenie y należy wyznaczyć biorąc pod uwagę zarówno zredukowaną masę belki m_z, jak i obciążenie masą skupioną m.



Rys.3. Składowe y_M, y_Q, y_p przemieszczenia y
Fig.3. Components y_M, y_Q, y_p of dislocation y

$$y = y_M + y_Q + y_P \,, \tag{1}$$

gdzie:

y_M – przemieszczenie od zginania,
y_Q – przemieszczenie od siły poprzecznej,
$y_P = \varphi * L/2$ – przemieszczenie wywołane obrotem połączenia φ.

Na podstawie sumy przemieszczeń możemy oszacować sztywność łączną ze wzoru (2):

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_M} + \frac{1}{C_Q} + \frac{1}{C_P} \,, \tag{2}$$

gdzie:

$C = P/y$ - sztywność łączna,
$C_M = P/y_M$ - sztywność giętna,
$C_Q = P/y_Q$ - sztywność postaciowa,
$C_P = P/y_P$ - sztywność liniowa połączenia,
$C_\varphi = M*L/2*y_P$ - sztywność obrotowa połączenia.

Z równania (2) wyznaczamy sztywność liniową połączenia C_p. Następnie przyrównując do siebie przemieszczenie y_P związane ze sztywnością obrotową C_φ oraz liniową C_p

uzyskamy sztywność obrotową C_φ połączenia doczołowego. Dla belki swobodnie podpartej sztywność obrotową C_φ wyznaczymy ze wzoru:

$$C_\phi = \frac{C_p \cdot L^2}{8} . \tag{3}$$

2.1. Redukcja masy własnej belki

Wyeliminowanie masy rozłożonej belki poprzez wyznaczenie masy zredukowanej zlokalizowanej w środku rozpiętości modelu pozwala na operacje zgodne z modelem o 1 stopniu swobody dynamicznej. Redukcję masy przeprowadzono z warunku równości przemieszczeń belki i modelu.

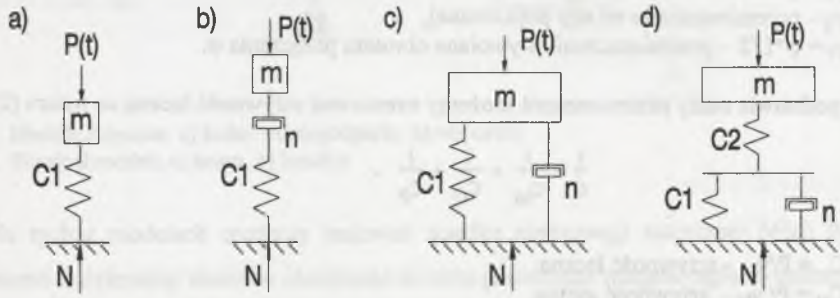
$$y_M + y_Q = y_{Mz} + y_{Qz} , \tag{4}$$

Dla belki swobodnie podpartej zastępcza masa skupiona wynosi :

$$m_z = \frac{5 \cdot q \cdot L}{8 \cdot g} . \tag{5}$$

3. Dynamiczne modele materiału

W celu oszacowania wpływu tłumienia na dynamikę konstrukcji rozpatrzymy cztery podstawowe dynamiczne modele materiału: Hooke'a, Maxwella, Voigta-Kelvina oraz standardowy (rys. 4 a,b,c,d), umożliwiające wyznaczenie przemieszczeń dla układów o 1 ssd. Wpływ tłumienia możemy oszacować porównując współczynniki dynamiczne.



Rys.4. Dynamiczne modele materiału: a) Hooke'a, b) Maxwella, c)Voigta-Kelvina, d)standardowy
Fig.4. Dynamics models of material: a) Hook, b) Maxwell, c)Voigt-Kelvin, d)standard

3.1. Współczynnik dynamiczny wg modelu Hooke'a

Jest to najprostszy model odpowiadający układowi o 1 ssd. W modelu tym nie uwzględnia się tłumienia konstrukcji (rys.4a).

Równanie różniczkowe [4] nietłumionego ruchu drgającego wymuszonego siłą $P_o \sin\alpha_o t$ ma postać:

$$m \cdot y'' + C \cdot y = P_o \cdot \sin(\alpha_o \cdot t) \ , \tag{6}$$

Całka ogólna [6] równania (6) daje nam poszukiwane przemieszczenie masy m:

$$y = \frac{P_o}{C} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \alpha_o^2} \cdot \left(\sin(\alpha_o \cdot t) - \frac{\alpha_o}{\alpha} \cdot \sin(\alpha \cdot t) \right) \ , \tag{7}$$

Z równania (7) wyznaczamy współczynnik dynamiczny przemieszczeń:

$$y = \frac{P_o}{C} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \alpha_o^2} \cdot \left(\sin(\alpha_o \cdot t) - \frac{\alpha_o}{\alpha} \cdot \sin(\alpha \cdot t) \right) \ , \tag{8}$$

gdzie:

α – prędkość kołowa drgań własnych w rad/s,
C – sztywność,
m – masa,
α_o – prędkość kołowa drgań wzbudzonych w rad/s,
η – współczynnik lepkości.

3.2. Współczynnik dynamiczny wg modelu Maxwella

Szeregowe powiązanie sztywności i tłumienia daje w tym modelu możliwość generowania wstępnego ugięcia elementu przy jednoczesnym uwzględnieniu tłumienia (rys. 4b)

Równanie różniczkowe [6] ruchu harmonicznie wzbudzonego ma postać:

$$y'' + \frac{m}{\eta} \cdot \frac{C}{m} \cdot y' + \frac{C}{m} \cdot y = \frac{C}{m} \cdot P_o \cdot \sin(\alpha_o \cdot t) \ , \tag{9}$$

Przemieszczenie w ruchu ustalonym [6] wynosi :

$$y = \frac{P_o}{C} \cdot \left(\frac{\alpha^2}{\alpha_o} \right) \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot \rho_M^2 \cdot \alpha^4 + \alpha^4 \cdot \alpha_o^2}{4 \cdot \rho_M^2 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha_o^2 + \alpha^4 \cdot (\alpha^2 - \alpha_o^2)^2}} \cdot \sin(\alpha_o \cdot t - \lambda - \beta) \ , \tag{10}$$

gdzie:

$$\tan(\lambda) = \frac{2 \cdot \alpha_o \cdot \rho_M}{\alpha^2 - \alpha_o^2} \qquad \tan(\beta) = \frac{2 \cdot \rho_M}{\alpha_o^2} \ , \tag{11}$$

Z kolei tłumienie w modelu Maxwella opisuje zależność:

$$\rho_M = \frac{C}{2 \cdot \eta} \ , \tag{12}$$

Zatem współczynnik dynamiczny [6] odnoszący się do przemieszczenia masy m w modelu Maxwella obliczamy ze wzoru:

$$v_M = \frac{\alpha^2}{\alpha_o} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot \rho_M^2 \cdot \alpha^4 + \alpha^4 \cdot \alpha_o^2}{4 \cdot \rho_M^2 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha_o^2 + \alpha^4 \cdot \left(\alpha^2 - \alpha_o^2\right)^2}} \quad . \tag{13}$$

3.3. Współczynnik dynamiczny wg modelu Voigta –Kelvina

Model ten (rys. 4c) powszechnie stosowany w dynamice konstrukcji nie zezwala na generowanie natychmiastowego ugięcia elementu. Ponadto, występuje opóźnienie przemieszczenia względem obciążenia, a amplituda drgań jest mniejsza niż w modelach Hooke'a i Maxwella.

Równanie różniczkowe [4] ruchu drgającego wymuszonego siłą $P_o \sin\alpha_o t$ ma postać:

$$m \cdot y'' + \eta \cdot y' + C \cdot y = P_o \cdot \sin\left(\alpha_o \cdot t\right) \quad , \tag{14}$$

Całka ogólna [6] po uwzględnieniu wartości początkowych wyznaczona przy użyciu transformacji Laplace`a daje nam wartość przemieszczenia masy m:

$$y = \frac{P_o \cdot \alpha^2}{C \cdot \left[4 \cdot \rho_v^2 \cdot \alpha^2 + \left(\alpha^2 - \alpha_o^2\right)^2\right]} \cdot \left[\begin{array}{l} \left[\left(\alpha^2 - \alpha_o^2\right) \cdot \sin\left(\alpha_o \cdot t\right) - 2 \cdot \rho \cdot \alpha_o \cdot \cos\left(\alpha_o \cdot t\right)\right] \ldots \\ + \dfrac{\alpha_o^2 \cdot e^{-\rho_v \cdot t}}{\sqrt{\alpha^2 - \rho_v^2}} \cdot \left[2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\alpha^2 - \rho_v^2} + \tau_1\right) + \left(4\rho_v^2 + \alpha_o^2 - \alpha^2\right) \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\alpha^2 - \rho_v^2}\right)\right] \end{array}\right] . \tag{15}$$

Tłumienie w modelu Voigta opisuje zależność:

$$\rho_v = \frac{\eta}{2 \cdot m} \quad , \tag{16}$$

Współczynnik dynamiczny [6] przemieszczenia masy m dla ruchu ustalonego wynosi:

$$v_v = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\left(\alpha^2 - \alpha_o^2\right)^2 + 4 \cdot \rho_v^2 \cdot \alpha_o^2}} \quad , \tag{17}$$

Porównując współczynniki dynamiczne dla modelu Maxwella i Voigta–Kelvina dla belki swobodnie podpartej z przykładu liczbowego wg pkt. 3.5. przy zmiennym ciężarze podwieszonej masy m: 1000, 2000 i 3000 kg otrzymamy wartości:

$$v_M / v_V = (0.179, 0.534, 0.676) \, . \tag{18}$$

3.4. Model standardowy

Jest to model łączący w sobie cechy modeli Maxwella i Hooke'a (rys. 4d). Umożliwia on ujęcie natychmiastowego przemieszczenia konstrukcji przy jednoczesnym poprawniejszym` określeniu tłumienia.

Równanie różniczkowe [6] ruchu drgającego wymuszonego siłą $P_o \sin\alpha_o t$ ma postać:

$$y''' + \frac{\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)}{2\cdot\rho_v}\cdot y'' + \alpha_1^2\cdot y' + \frac{\alpha_1^2\cdot\alpha_2^2}{2\cdot\rho_v}\cdot y = \frac{P_o}{m}\cdot\left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2\cdot\rho_v}\cdot\sin(\alpha_o\cdot t) + \alpha_o\cdot\cos(\alpha_o\cdot t)\right). \tag{19}$$

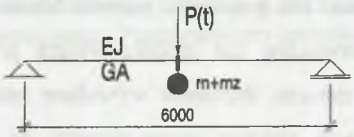
gdzie:

$$\alpha 1^2 = C1/m, \quad \alpha 2^2 = C2/m. \tag{20}$$

Rozwiązania dla modelu standardowego będą przedmiotem dalszych rozważań.

3.5. Przykład liczbowy

Obliczyć sztywność obrotową doczołowego połączenia kalenicowego w środku rozpiętości belki swobodnie podpartej WTA500 (z falistym środnikiem gr.2 mm) o rozpiętości 6 m. Skorzystać z modelu Hooke'a. Ciężar belki g_b=80.1 kg/m, I_x=59692.5 cm^4, μ=11.76 . Do belki podwieszono masę m=1000 kg.



Rys.5. Schemat belki
Fig.5. Diagram of beam

Siłę wymuszającą generuje silnik o częstości technicznej n=1200 obr/s. Daje to wartość siły wzbudzającej P_{ow}=19 kN i częstości kołowej wymuszenia α_o=125 1/s.

Obliczamy ugięcie od momentów zginających i sił poprzecznych y_{MQ}, uwzględniające zredukowany ciężar belki (wg wzoru 5). Następnie wyznaczamy sztywność belki oraz częstość kołową drgań własnych α.

$$y_{MQ} = \frac{1}{48}\cdot\frac{(P_o + m_z\cdot g)\cdot L_b^3}{E\cdot I_x}\cdot\left(1 + 12\cdot\mu\cdot\frac{E\cdot I_x}{G\cdot A\cdot L_b^2}\right) = 0.75\,\text{mm} \quad C_{MQ} = \frac{P_o + m_z\cdot g}{y_{MQ_i}} = 16997363\frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \quad \alpha = \sqrt{\frac{C_{MQ_i}}{m_i}} = 114.3\frac{1}{\text{s}}$$

W kolejnym kroku obliczamy współczynnik dynamiczny dla modelu Hooke'a wg (8), a na jego podstawie przemieszczenie całkowite oraz sztywność układu C.

$$v_H = 5.641 \quad y = v_H\left[\frac{1}{48}\cdot\frac{P_{ow}\cdot L_b^3}{E\cdot I_x}\cdot\left(1 + 12\cdot\mu\cdot\frac{E\cdot I_x}{G\cdot A\cdot L_b^2}\right)\right] = 6.414\,\text{mm} \quad C = \frac{P_o + m_z\cdot g}{y} = 1988170\frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

Ostatecznie korzystając z zależności (2) i (3) wyznaczamy sztywność liniową C_p oraz obrotową C_φ połączenia dla modelu Hooke'a:

$$C_P = 2251530\frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \qquad C_\phi = 10132\,\text{kNm}$$

Natomiast wyliczona wg [1] sztywność obrotowa połączenia wynosi 12782 kNm. Model Hooke'a ze względu na brak uwzględnienia tłumienia zawyża przemieszczenia, czyli daje lekko zaniżone wartości sztywności obrotowej połączenia.

4. Wnioski

Przedstawiona metoda może posłużyć do sprawdzania sztywności obrotowej doczołowych połączeń odkształcalnych w konstrukcjach już zrealizowanych, jak również do weryfikacji algorytmów szacowania sztywności połączeń odkształcalnych wyznaczanych na modelach statycznych.

Dynamiczne modele materiału, na bazie których istnieje możliwość określenia związku M(φ), mają swoje ograniczenia. Na podstawie modelu Maxwella należy oczekiwać zbyt dużych przemieszczeń, w przypadku zaś modelu Voigta przemieszczeń o wartościach zaniżonych. Gdy występują znaczne tłumienia wywołane połączeniami odkształcalnymi, trzeba spodziewać się lepszych efektów numerycznych na podstawie analizy modelu standardowego.

LITERATURA

1. EUROCODE 3
2. Bródka J., Kozłowski A.: Sztywność i nośność węzłów podatnych. Białystok 1996.
3. Bródka J.: Kierunki rozwoju konstrukcji stalowych o węzłach podatnych. Międzynarodowe Sympozjum Warszawa 2000: „Węzły podatne w konstrukcjach metalowych i zespolonych."
4. Langer J.: Dynamika budowli. Wrocław 1980.
5. Chmielewski T., Zembaty Z.: Podstawy dynamiki budowli. „Arkady", Warszawa 1998.
6. Kowal Z.: Dynamika nieważkiej belki na podporach lepkosprężystych. Archiwum Inżynierii Lądowej, tom XII, 1/1966.

Recenzent: Prof. dr inż. Roman Jankowiak