

Barbara KALETA*
Politechnika Opolska

ANALIZA DRGAŃ WŁASNYCH BELEK NA PODŁOŻU WŁASOWA

Streszczenie. W pracy zastosowano zmodyfikowany model podłoża Własowa do analizy drgań własnych belek typu Bernoulliego-Eulera, spoczywających na sprężystym podłożu. Przeanalizowano wpływ grubości warstwy sprężystej gruntu oraz długości belki przy zmieniającej się podatności gruntu na rozwiązanie zagadnienia własnego.

ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF BEAMS ON THE VLASOV FOUNDATION

Summary. A modified Vlasov model has been used to analyse free vibrations of Bernoulli-Euler beams resting on elastic foundation. The effect of the depth of elastic layer and beam length on the natural frequency has been studied in detail.

1. Wstęp

Problemy dynamiki układu belka-podłoże mają już bogatą literaturę, której przytaczanie wykracza poza ramy niniejszej pracy. Ostatnie publikacje pochodzą z lat dziewięćdziesiątych ubiegłego stulecia i z roku 2001 ([1-6], [9]).

W niniejszej pracy zastosowano zmodyfikowany model podłoża Własowa do analizy drgań własnych belek typu Bernoulliego-Eulera, spoczywających na sprężystym podłożu, i przeanalizowano wpływ grubości warstwy sprężystej gruntu oraz długość belki na częstości drgań własnych. W tym celu sformułowano w MES algorytm obliczeń drgań własnych belki na podłożu Własowa, który następnie wdrożono w postaci programu komputerowego w języku FORTRAN.

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Zbigniew Zembaty, prof. Pol. Opolskiej

2. Model podłoża Własowa

Własow, opisując ośrodek gruntowy [8], przyjął następujące założenia: ciągłość ośrodka gruntowego, jednorodność i izotropowość, liniową sprężystość, oparcie na sztywnym podłożu warstwy o skończonej grubości H (rys.1). Na tak przyjęte założenia nałożył dodatkowe ograniczenia kinematyczne w podłożu: poziome przemieszczenie $\bar{u}(x, z) = 0$, pionowe przemieszczenie $\bar{w}(x, z) = w(x)\phi(z)$, gdzie: $w(x)$ - pionowe przemieszczenie powierzchni podłoża, $\phi(z)$ - przyjęta funkcja opisująca pole przemieszczeń w funkcji głębokości z , ($\phi(0)=1$, $\phi(H)=0$). Kreska oznacza przemieszczenia w podłożu.

Równanie modelu podłoża Własowa ma taką samą postać jak inne dwuparametrowe modele.

$$p(x) = k w(x) - 2t \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad (1)$$

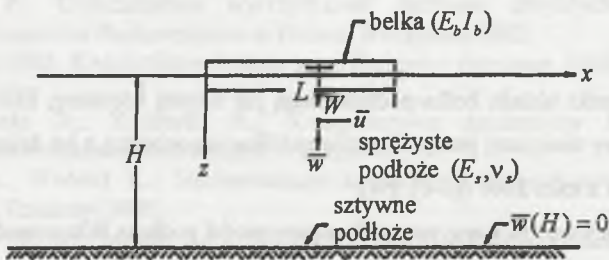
gdzie parametry k i t związane są w następujący sposób z parametrami podłoża :

$$k = \frac{E_s}{(1+\nu_s^2)} \int_0^H \left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 dz, \quad 2t = \frac{E_s b}{2(1+\nu_s)} \int_0^H \phi^2 dz, \quad (2)$$

gdzie b jest szerokością belki, a funkcja opisująca rozkład przemieszczeń ma postać

$$\phi(z) = \frac{\sinh\left(\gamma\left(1 - \frac{z}{H}\right)\right)}{\sinh \gamma}, \quad (3)$$

w której γ jest parametrem zanikania przemieszczeń na głębokości warstwy podłoża.



Rys.1. Belka spoczywająca na podłożu sprężystym
Fig. 1. Beam on Elastic Foundation (Vlasov Model)

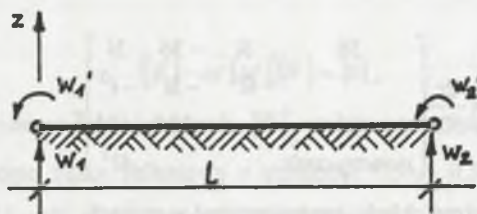
Uwzględniając przyjęty rozkład przemieszczeń w podłożu oraz równania konstytutywne, które dla podłoża przyjęto jak dla płaskiego stanu odkształcenia teorii sprężystości w przekroju x, z , można zapisać energię potencjalną układu belka podłożo Własowa w następującej postaci

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l E_b I_b \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k w^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l 2f \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx, \quad (4)$$

gdzie I_b jest momentem bezwładności belki.

3. Sformułowanie zagadnienia za pomocą MES

Do rozważań przyjęto typowy element skończony o 2 węzłach na jego końcach (rys. 2).



Rys. 2. Dwuwzłowy element układu belka – podłoże

Fig. 2. Two-nodal element of beam-soil system

Wektor przemieszczeń węzłowych elementu ma postać

$$\{w_e\} = [w_1, w_1', w_2, w_2']^T. \quad (5)$$

Pole przemieszczeń wewnątrz elementu opisuje zależność

$$w(x) = [N(x)]\{w_e\} = [N_1(x), N_2(x), N_3(x), N_4(x)]\{w_e\}, \quad (6)$$

gdzie: $[N(x)]$ - macierz funkcji kształtu.

Energia potencjalna układu belka – podłoże po uwzględnieniu przyjętych funkcji kształtu wyraża się następująco

$$V_e = \frac{1}{2} \{w_e\}^T \left([k_b]^e + [k_w]^e + [k_t]^e \right) \{w_e\} = \frac{1}{2} \{w_e\}^T [k]^e \{w_e\} \quad (7)$$

gdzie poszczególne macierze określają odpowiednio układ sztywności sprężystych belki $([k_b]^e)$ i podłoża Własowa $([k_w]^e + [k_t]^e)$, a macierz $[k]^e$ jest macierzą sztywności całego układu belka-podłoże. Powyższe macierze sztywności elementu przedstawiają się następująco:

$$[k_b]^e = \frac{E_b I_b}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{symetrycznie} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$[k_w]^e = \frac{kl}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ \text{symetrycznie} & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$[k_r]^e = \frac{2l}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ \text{symetrycznie} & & 36 & -3l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

Całkowitą energię kinetyczną układu można zapisać w postaci

$$T_e = \frac{1}{2} \int_0^l \{ \dot{w}_e \}^T [N(x)]^T [\mu] [N(x)] \{ \dot{w}_e \} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \{ \dot{w}_e \}^T [m]^e \{ \dot{w}_e \} dz dx, \quad (11)$$

gdzie: $[\mu]$ - macierz gęstości, $\{ \dot{w} \}$ - pochodna cząstkowa po czasie wektora uogólnionych przemieszczeń, $[m]^e$ oznacza macierz mas elementu, która jest sumą macierzy mas elementu belki (translacyjną $[m_{bt}]^e$ i rotacyjną $[m_{brO}]^e$) oraz macierz masy gruntu ($[m_s]^e$).

Powyższe macierze mas elementu przedstawiają się następująco:

$$[m_{bt}]^e = \frac{\rho_b b h l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ \text{symetrycznie} & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$[m_{brO}]^e = \frac{\rho_b b h^3}{360l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ \text{symetrycznie} & & 36 & -3l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$[m_s]^e = \frac{\rho_s b H l}{1260} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ \text{symetrycznie} & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

Otrzymane macierze sztywności i macierze mas elementu posłużą do utworzenia globalnych macierzy sztywności i macierzy mas potrzebnych do sformułowania równania ruchu.

4. Analiza numeryczna zagadnienia własnego

Wykorzystując równania na energię potencjalną i kinetyczną układu drgającego i standardowe metody dynamiki budowli [3], można równania zagadnienia własnego zapisać w następujący sposób

$$([K] - \omega^2[M])\{W\} = \{0\}, \tag{15}$$

gdzie: ω - częstość kołowa drgań własnych, $\{W\}$ - wektor postaci drgań własnych.

Do analizy przyjęto belkę żelbetową o przekroju 0.3×0.5 m wykonaną z betonu o module Younga 27.0×10^7 N/m² i gęstości objętościowej 2500 kg/m³ o długości 5.0m oraz grunt o module Younga 2.0×10^7 N/m², gęstości objętościowej 1700 kg/m³ i współczynniku Poissona 0.2. Analizowano drgania własne dla trzech rodzajów belek na podłożu Własowa. W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymanych pięć pierwszych częstości drgań własnych f zestawiono w tabelicy 1 ($f = \omega / 2\pi$).

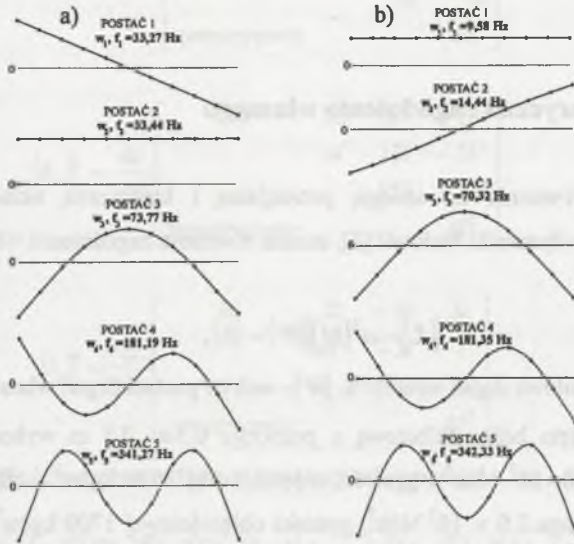
Tablica 1
Częstości drgań własnych belki na podłożu Własowa przy różnych sposobach jej podparcia

f [Hz]			
f ₁	32.7013	9.5776	12.2911
f ₂	119.2961	14.4366	20.0417
f ₃	260.7109	70.3172	72.1920
f ₄	450.6492	181.3493	181.7581
f ₅	682.7938	342.3333	264.0247

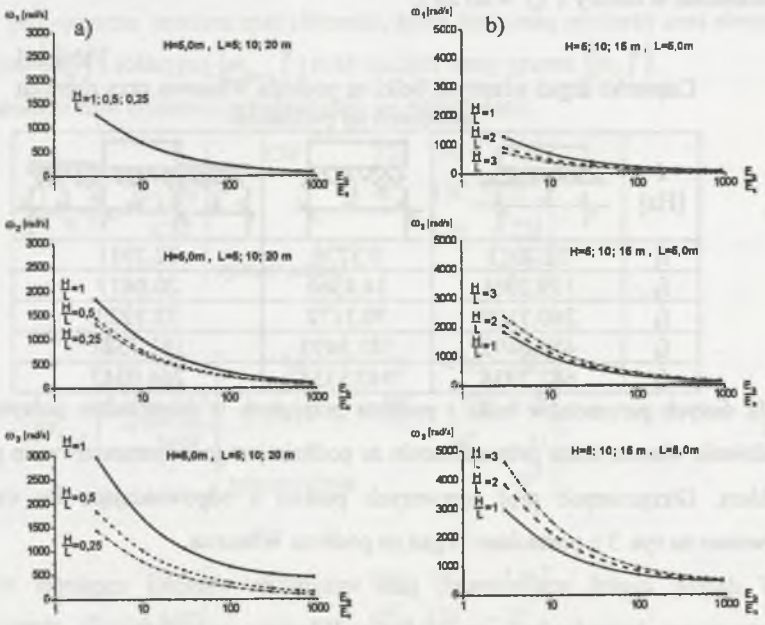
Dla danych parametrów belki i podłoża przyjętych w przykładzie powyżej rozwiązano zagadnienie własne, także przy założeniu że podłoże jest jednoparametrowym podłożem typu Winklera. Otrzymanych pięć pierwszych postaci i odpowiadające im częstości drgań porównano na rys. 3 z postaciami drgań na podłożu Własowa.

W dalszej części analizowano, jaki wpływ na wartości częstości własnych belki spoczywającej bezpośrednio na podłożu Własowa ma przyjęcie różnych stosunków sprężystości belki do podłoża (3, 30, 300, 600, 900) przy zmieniającym się stosunku H/L

(0.25, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0). Otrzymane w wyniku obliczeń częstotliwości drgań własnych zestawiono w postaci wykresów na rys.4.



Rys. 3. Postacie i częstotliwości drgań własnych belki: a) na podłożu Winklera, b) na podłożu Własowa
 Fig. 3. Five first modes of beam: a) on the Winkler foundation, b) on the Vlasov foundation



Rys. 4. Wpływ na częstotliwości drgań własnych: a) długość belki, b) grubość warstwy sprężystej
 Fig. 4. Influence of (a) beam length; b) thickness of elastic layer) on natural frequencies

5. Podsumowanie i wnioski

Analizując kształty postaci drgań własnych belki spoczywającej na podłożu Własowa oraz belki na podłożu Winklera, można zauważyć, że następuje zamiana dwóch pierwszych postaci drgań, tj. ruchu sztywnego z ruchem belkowym oraz wzrost pierwszych dwóch częstości drgań własnych belki spoczywającej na podłożu Winklera.

Porównując częstości drgań własnych dla dwóch przypadków: belki bezpośrednio spoczywającej na podłożu gruntowym (gruntu tylko pod belką) i z uwzględnieniem gruntu również poza belką (o wielkość równą długości belki), widać wzrost czterech pierwszych częstości drgań własnych belki w tym drugim przypadku. Zmniejszeniu ulegają jednak następne częstości drgań własnych.

Badając wpływ grubości warstwy podłoża H dla różnych stosunków modułu Younga E_b/E_s , widać, że wraz ze wzrostem H rosną częstości drgań własnych, przy czym wzrost ten jest znaczny dla gruntów „mocnych” i „średnich”, a dla gruntów bardzo słabych jest minimalny. Analizując wpływ L przy ustalonej H i zmieniającej się proporcji E_b/E_s , można zauważyć, że ze wzrostem L częstości drgań własnych belki zmniejszają się wyraźnie dla gruntów „mocnych” i „średnich”. Wyjątkiem jest pierwsza postać drgań (wpływ niewielki). Można zauważyć zdecydowanie większy wzrost częstości drgań własnych belki wraz ze wzrostem H przy zachowaniu stałej długości belki, co prowadzi do ogólnego wniosku, że zdecydowanie większy wpływ na drgania własne belki będzie miało zwiększanie grubości warstwy H niż zmiana długości belki L .

W przyszłej rozprawie doktorskiej planuje się rozwiązanie stochastyczne zagadnienia własnego analizowanej belki przy losowych własnościach podłoża gruntowego.

Podziękowania (Acknowledgements)

Praca powstała w Centrum Trwałości i Niezawodności Konstrukcji (Center of Structural Integrity) na Politechnice Opolskiej przy finansowym wsparciu Piątego Programu Ramowego Unii Europejskiej (with the support of the Commission of the European Communities under FP5, contract No. G1MA-CT-2002-04058 (CESTI)).

LITERATURA

1. Ayvaz Y., Daloglu A.: Earthquake analysis of beams resting on elastic foundations by using a modified Vlasov model. *J. of Sound & Vibration*, Vol.200, No.3, 1997, pp. 315-325.
2. Ayvaz Y., Özgan K.: Application of modified Vlasov model to free vibration analysis of beams resting on elastic foundations. *J. of Sound & Vibration*, Vol.255, No.1, 2002, pp. 111-127.
3. Chmielewski T., Zembaty Z.: *Podstawy Dynamiki Budowli*. Arkady, Warszawa 1998.
4. Franciosi C., Masi A.: Free vibrations of foundation beams on two-parameter elastic soil. *Computer & Structures*, Vol. 47, No. 3, 1993, pp. 419-426.
5. Naidu N.R., Rao G.V.: Vibrations of initially stressed uniform beams on two-parameter elastic foundation. *Computer & Structures*, Vol. 57, No.5, 1995, pp. 941-943.
6. Thambiratnam D., Zhuge Y.: Free vibration analysis of beams on elastic foundation. *Computer & Structures*, Vol. 60, No.6, 1996, pp. 971-980.
7. Vallabhan C.V.G., Das Y.C.: Modified Vlasov model for beams on elastic foundation. *J. of Geotechnical Engineering*, Vol.117, No. 6, 1991, pp. 956-966.
8. Vlasov V.Z., Loentiev U.N.: *Beams, plates and shells elastic foundation*. Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem 1966.
9. Yokoyama T.: Vibration analysis of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundation. *Computer & Structures*, Vol. 6, No. 6, 1996, pp. 995-1007.

Recenzent: Dr hab. Jan Gaszyński, prof. Pol. Krakowskiej