

Seweryn KOKOT*
Politechnika Opolska

ANALIZA EFEKTYWNOŚCI NUMERYCZNEJ WYBRANYCH METOD DETEKCYI USZKODZEŃ W KONSTRUKCJACH PRĘTOWYCH

Streszczenie. W referacie przedstawiono przykład numeryczny detekcji i lokalizacji uszkodzeń wspornika, wykorzystując dwie wybrane metody (oparte na: wrażliwości pomierzonych częstości własnych i odpowiedzi konstrukcji przy wymuszeniu harmonicznym). Celem pracy było porównanie efektywności numerycznej tych metod.

ANALYSIS OF NUMERICAL EFFECTIVENESS OF SOME DAMAGE DETECTION METHODS IN ROD STRUCTURES

Summary. A numerical example of a cantilever damage detection using natural frequency sensitivity method and harmonic amplitude sensitivity method is presented. The paper aimed at a comparison of numerical effectiveness of the two methods.

1. Wprowadzenie

Możliwość wczesnego ostrzeżenia o uszkodzeniach konstrukcji przy zastosowaniu zautomatyzowanych systemów pomiarowych uznać można za bardzo atrakcyjną przy dużych kosztach okresowych inspekcji konstrukcji. Często też, szczególnie dla dużych budowli inżynierskich (np. mosty, kominy, maszty), dostęp do krytycznych miejsc może być utrudniony. Większość badań w tej dziedzinie wykorzystuje fakt, że zwykle uszkodzenia konstrukcji pociągają za sobą wyraźne lokalne zmiany w ich sztywnościach, a te z kolei wpływają na właściwości dynamiczne układu konstrukcyjnego (zwłaszcza na częstotliwości drgań własnych). Od pracy Cawleya i Adamsa z 1979 r. [1] kierunek ten zaczął się bardzo rozwijać i obecnie ma już dużą liczbę publikacji (por. np. [2]).

*Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Zbigniew Zembaty, prof. Pol.Opolskiej

Jednak w budownictwie metody te ciągle znajdują niewielkie zastosowanie, choć mogłyby być z powodzeniem użyte do monitorowania budowli (np. mostów żelbetowych, eksploatowanych często w różnorodnych stanach zarysowania, por. [3]). Jak wykazują analizy teoretyczne (np. [4]) i badania eksperymentalne [5], zarysowanie konstrukcji żelbetowych powoduje wyraźne spadki ich sztywności i odpowiednie zmiany w częstotliwościach rezonansowych.

Jednym z kierunków zastosowań teorii identyfikacji konstrukcji jest lokalizacja i oszacowanie wielkości uszkodzeń na podstawie pomiarów dynamicznych. Od strony teoretycznej problemy te należą do zadań odwrotnych. Analityczne rozwiązania zagadnień odwrotnych istnieją jedynie dla niewielu prostych przypadków [6]. Natomiast praktyczne zadania dotyczące układów prętowych wymagają stosowania złożonych algorytmów optymalizacyjnych (np. [7], [8]).

Tematem niniejszego referatu jest przedstawienie dwóch metod lokalizacji uszkodzeń:

- a) metody opartej na wrażliwości częstości drgań własnych (np. [1, 9, 10],
 - b) metody opartej na zmianach amplitud drgań harmonicznym (np. [11]),
- a także przeanalizowanie ich i porównanie ich efektywności numerycznej.

2. Metoda wykorzystująca zmiany częstości własnych

Rozważa się zagadnienia własne nieuszkodzonego (indeks górny „ u ”) i uszkodzonego (indeks górny „ d ”) układu o N stopniach swobody:

$$(\mathbf{K}^u - \lambda_i^u \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_i^u = 0, \quad (\mathbf{K}^d - \lambda_i^d \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_i^d = 0, \quad (1), (2)$$

gdzie: $i=1, \dots, N$, natomiast $\mathbf{K}, \mathbf{M}, \lambda_i, \boldsymbol{\varphi}_i$ to odpowiednio: macierze sztywności i bezwładności, i -ta wartość własna, i -ty wektor własny.

Zakłada się, że efektem uszkodzeń są jedynie zmiany w macierzy sztywności:

$$\mathbf{K}^d = \mathbf{K}^u + \Delta \mathbf{K}, \quad (3)$$

które pociągają za sobą zmiany w wartościach i wektorach własnych:

$$\lambda_i^d = \lambda_i^u + \Delta \lambda_i, \quad \boldsymbol{\varphi}_i^d = \boldsymbol{\varphi}_i^u + \Delta \boldsymbol{\varphi}_i. \quad (4), (5)$$

Po podstawieniu zależności (3)-(5) do (2), wykonaniu przekształceń uwzględniających normalizację wektorów własnych (z wagą macierzy bezwładności) i pominięciu iloczynów dwóch przyrostów ($\Delta \lambda_i, \Delta \mathbf{K}, \Delta \boldsymbol{\varphi}_i$) otrzymuje się:

$$\Delta\lambda_i = \varphi_i^{uT} \Delta\mathbf{K} \varphi_i^u. \quad (6)$$

Jest to zależność między przyrostem wartości własnych (czyli kwadratem kołowych częstości własnych) a przyrostem macierzy sztywności.

Globalną macierz sztywności \mathbf{K} można przedstawić jako asemblację poszczególnych macierzy sztywności elementów \mathbf{K}_i^{ue} :

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{K}_i = \sum_{i=1}^{n_e} \alpha_i \mathbf{K}_i^{ue}, \quad (7)$$

w którym współczynniki α_i służą opisowi redukcji sztywności $0 \leq \alpha_i \leq 1$, a n_e jest liczbą elementów skończonych. Przyrost macierzy $\Delta\mathbf{K}$ można wyrazić wzorem

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K}^d - \mathbf{K}^u = \sum_{i=1}^{n_e} \Delta\alpha_i \mathbf{K}_i^{ue}. \quad (8)$$

Podstawiając (8) do (6) otrzymuje się zależność między wektorem przyrostów wartości własnych $\Delta\lambda$ a wektorem zmian współczynników redukcji sztywności $\Delta\alpha$:

$$\mathbf{S} \Delta\alpha = \Delta\lambda, \quad (9)$$

gdzie: \mathbf{S} oznacza tzw. macierz wrażliwości o elementach:

$$S_{ij} = \varphi_i^{uT} \mathbf{K}_j^{ue} \varphi_i^u, \quad i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,m, \quad (10)$$

przy czym n to liczba pomierzonych częstości własnych, natomiast m to liczba stopni swobody. Na ogół $n < m$ ze względu na to, iż w praktyce możliwe jest pomierzenie jedynie kilku pierwszych częstości własnych.

Poszukując niewiadomych przyrostów współczynników sztywności, przekształca się równanie (9), wykorzystując macierz pseudoodwrotną Penrose-Moora [12]. W efekcie otrzymuje się układ algebraicznych równań liniowych o na ogół znacznie mniejszej liczbie równań niż niewiadomych. W celu uzyskania jednoznaczności rozwiązania zastosowano kryterium minimalnych zmian sztywności elementów, które można wyrazić w postaci minimalizacji następującej formy kwadratowej:

$$\text{minimum } J = \frac{1}{2} \Delta\alpha^T \Delta\alpha. \quad (11)$$

Zatem, w metodzie tej poszukuje się wartości spadków sztywności $\Delta\alpha_i$, ($i=1,2,\dots,n_e$), mając dane rozwiązanie zagadnienia własnego badanej konstrukcji w stanie nieuszkodzonym (wartości własne λ_i^u i wektory własne φ_i^u) oraz n pomierzonych częstości własnych.

3. Metoda wykorzystująca zmiany amplitud przemieszczeń przy wymuszeniu harmonicznym

Rozważa się równanie ruchu układu dyskretnego (bez tłumienia) poddanego wymuszeniu harmonicznemu i jego znane rozwiązanie w postaci amplitud ustalonych drgań

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{P}_0 e^{ip^t}, \quad (\mathbf{K} - p^2\mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{P}_0, \quad (12), (13)$$

gdzie: $\mathbf{d}, \ddot{\mathbf{d}}, \mathbf{u}, \mathbf{P}_0, p$ to odpowiednio wektory przemieszczeń, przyspieszeń, amplitud odpowiedzi i wymuszenia harmonicznego oraz częstość kołowa siły harmoniczej.

Podstawiając zależność na globalną macierz sztywności (7) do równania (13), otrzymuje się zależność, z której będzie można obliczyć wektor amplitud przemieszczeń:

$$\left(\sum_i^{n_i} \alpha_i \mathbf{K}_i^{ue} - p^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_c(\alpha) = \mathbf{P}_0. \quad (14)$$

Zakłada się dalej wektor funkcji błędu $\mathbf{f}(\alpha)$, będący różnicą między wektorem amplitud obliczonych \mathbf{u}_c i pomierzonych \mathbf{u}_m

$$\mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{u}_c(\alpha) - \mathbf{u}_m. \quad (15)$$

Postuluje się, że istnieje pewien wektor współczynników α opisujących zmienione własności sprężyste konstrukcji (po jej uszkodzeniu), dla którego błędy wyrażone wzorem (15) będą zerowe:

$$\mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{0}. \quad (16)$$

Zależność (16) sprowadza się do rozwiązania układu równań algebraicznych. W tym celu wykorzystuje się uogólnioną metodę Newtona, poszukując rozwiązania na drodze kolejnych iteracji, zgodnie ze wzorem

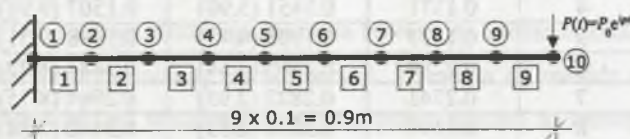
$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \mathbf{J}^{-1}(\alpha_k) \mathbf{f}(\alpha_k), \quad (17)$$

gdzie: α_k – wektor współczynników k -tej iteracji, $\mathbf{f}(\alpha_k)$ – wektor funkcji błędu dla α_k , natomiast $\mathbf{J}^{-1}(\alpha_k)$ – macierz odwrotna Jakobianu (w tym przypadku macierz pochodnych cząstkowych amplitud przemieszczeń względem współczynników sztywności). Proces iteracji przerywamy po osiągnięciu założonej dokładności obliczeń.

W metodzie tej poszukuje się wektora współczynników redukcji sztywności $\Delta\alpha_i$, ($i=1,2,\dots,n_e$), mając dane: analitycznie wyznaczone amplitudy przemieszczeń konstrukcji nieszkodzonej \mathbf{u}_c oraz pomierzone amplitudy przemieszczeń konstrukcji uszkodzonej \mathbf{u}_m .

4. Przykład numeryczny

W przykładzie numerycznym przyjęto wspornik o przekroju prostokątnym o wymiarach 50.75×6 mm (rys. 1), mający następujące parametry stanu nieuszkodzonego: moduł sprężystości $E=2,0 \times 10^{11}$ N/m², gęstość $\rho=7,67 \times 10^3$ kg/m³.



Rys. 1. Model obliczeniowy wspornika

Fig. 1. Computational model of cantilever

W analizie rozważono następujące przypadki uszkodzeń:

- przypadek A – uszkodzony jest tylko element nr 1 (10% redukcji sztywności),
- przypadek B – uszkodzone są wszystkie elementy, przy czym uszkodzenia zmieniają się skokowo co 1%, od wartości 10% redukcji sztywności w elemencie nr 1 do wartości 1% redukcji sztywności w elemencie nr 9.

W metodzie pierwszej danymi wejściowymi są wyniki zagadnienia własnego i częstości własne przyjęte tu jako wynik eksperymentu numerycznego. Natomiast na wyjściu otrzymuje się miejsce i wielkość uszkodzeń oraz dodatkowo poszukuje się minimalnej liczby częstości własnych koniecznych do prawidłowej lokalizacji uszkodzeń (por. rys. 2a i 3a).

W tablicy 1 przedstawiono wyniki zagadnienia własnego dla wspornika w stanie nieuszkodzonym, uszkodzonym (przypadki A, B) i względne różnice procentowe.

Tablica 1
Częstości własne badanej belki i ich względne zmiany po uszkodzeniu

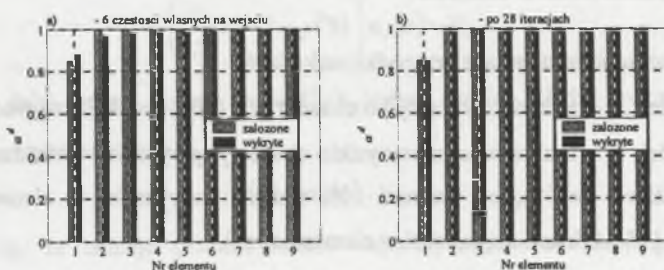
| Nr częstości | f_u [Hz] | f_{dA} [Hz], (%) | f_{dB} [Hz], (%) |
|--------------|------------|--------------------|--------------------|
| 1 | 6.11 | 5.92 (3.20) | 5.84 (4.47) |
| 2 | 38.30 | 37.52 (2.02) | 36.96 (3.48) |
| 3 | 107.26 | 105.82 (1.34) | 103.83 (3.20) |
| 4 | 210.41 | 208.36 (0.97) | 203.83 (3.13) |
| 5 | 348.63 | 345.66 (0.85) | 337.83 (3.10) |
| 6 | 522.95 | 518.32 (0.88) | 506.84 (3.08) |

W metodzie drugiej przyjęto do obliczeń, że pionowa siła harmoniczna działa w węźle nr 10 (por. rys. 1). Parametrami wymuszenia harmonicznego są: amplituda $P_0=100$ N i częstość $\rho=25$ rad/s. Amplitudy drgań harmonicznnych w stanie nieuszkodzonym i uszkodzonym wraz z

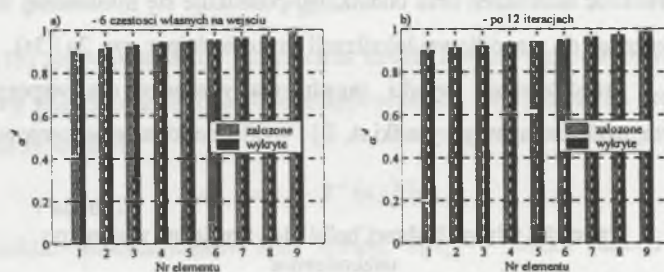
ich względnymi zmianami podano w tablicy 2. Natomiast wyniki lokalizacji uszkodzeń wraz z liczbą iteracji dla założonej dokładności obliczeń podano na rys. 2b i 3b.

Tablica 2
Amplitudy przemieszczeń oraz ich względne zmiany po uszkodzeniu

| Nr węzła | $u_u \times 10^{-3}$ [m] | $u_{dA} \times 10^{-3}$ [m], (%) | $u_{dB} \times 10^{-3}$ [m], (%) |
|----------|--------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 2 | 0.0457 | 0.0538 (17.66) | 0.0508 (11.12) |
| 3 | 0.0914 | 0.0994 (8.84) | 0.1010 (10.51) |
| 4 | 0.1371 | 0.1451 (5.90) | 0.1507 (9.91) |
| 5 | 0.1827 | 0.1908 (4.43) | 0.1998 (9.31) |
| 6 | 0.2284 | 0.2365 (3.54) | 0.2484 (8.73) |
| 7 | 0.2741 | 0.2822 (2.95) | 0.2964 (8.15) |
| 8 | 0.3197 | 0.3278 (2.53) | 0.3440 (7.58) |
| 9 | 0.3654 | 0.3734 (2.22) | 0.3910 (7.02) |
| 10 | 0.4110 | 0.4191 (1.97) | 0.4376 (6.47) |



Rys. 2. Wyniki lokalizacji uszkodzeń dla przypadku „A”: a) – metoda pierwsza, b) – metoda druga
Fig. 2. Results of damage location (case “A”): a) – the first method; b) – the second method



Rys. 3. Wyniki lokalizacji uszkodzeń dla przypadku „B”: a) – metoda pierwsza, b) – metoda druga
Fig. 3. Results of damage location (case “B”): a) – the first method; b) – the second method

5. Podsumowanie i wnioski

W referacie porównano efektywność numeryczną dwóch metod detekcji i lokalizacji uszkodzeń wspornika. Metoda pierwsza oparta na analizie wrażliwości częstotliwości własnych

pozwała lokalizować uszkodzenia konstrukcji w sposób stosunkowo prosty, na postawie łatwych do precyzyjnego, eksperymentalnego określenia parametrów, jakimi są częstotliwości drgań własnych. Jak pokazał przykład numeryczny, metoda ta wymaga jednak wykorzystania stosunkowo dużej liczby zidentyfikowanych częstotliwości własnych, co w praktyce może być trudne do osiągnięcia. W analizowanym przykładzie lokalizacja uszkodzeń wymagała znajomości pierwszych sześciu częstotliwości własnych.

Metoda druga jest bardziej efektywna. Pozwala bowiem na bardzo dokładne oszacowanie wielkości uszkodzeń po niewielkiej liczbie iteracji. Przewaga tej metody nad poprzednią wynika ze znacznie większej wrażliwości amplitud przemieszczeń na zmiany w sztywności elementów (por. tabl. 1 i 2). Wadą tej metody jest jednak konieczność użycia dużej liczby czujników drgań, w liczbie wynikającej z postulowanej dokładności lokalizacji uszkodzeń.

W przyszłej rozprawie doktorskiej planuje się rozwinięcie istniejących lub zaproponowanie nowych metod detekcji i lokalizacji uszkodzeń w konstrukcjach żelbetowych, wykorzystujących różne rodzaje obciążeń dynamicznych.

Podziękowania (Acknowledgements)

Praca powstała w Centrum Trwałości i Niezawodności Konstrukcji (Center of Structural Integrity) na Politechnice Opolskiej finansowanym przy wsparciu Piątego Programu Ramowego Unii Europejskiej (with the support of the Commission of the European Communities under FP5, contract No. G1MA-CT-2002-04058 (CESTI)).

LITERATURA

1. Cawley P., Adams R. D.: The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. *Journal of Strain Analysis*, 14(2), 1979, p. 49-57.
2. Doebling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M. B., Shevitz, D. W.: Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review. Los Alamos National Laboratory Report, 1996.
3. Ryżyński A.: Serviceability problems of locally damaged concrete bridges. *Archives of Civil Engineering*, XL(3-4), 1994, p. 437-452.

4. Jędrzejczak M., Knauff M.: Flexural rigidity of RC elements with randomized concrete tensile strength. *Archives of Civil Engineering*, 43(1), 1997, p. 7-22.
5. Zembaty Z., Kowalski M.: Badania charakterystyk dynamicznych zarysowanych ram żelbetowych. *Inżynieria i Budownictwo*, nr 9, 2001, s. 530-533.
6. Gladwell G.M.L.: *Inverse Problems in Vibration*. Martinus Noordhoff 1986.
7. Łakota W.: *Detekcja i lokalizacja uszkodzeń konstrukcji belkowych*. Oficyna Wyd. Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1999.
8. Glabisz W., Koźbiał T., Napiórkowska M.: Falki w wybranych zagadnieniach mechaniki. *Materiały XLVI Konf. Naukowej "Krynica 2000"*, s. 59-66.
9. Hassiotis S., Jeong G. D.: Identification of Stiffness Reductions Using Natural Frequencies. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(10), 1995, p. 1106-1013.
10. Vestroni F., Capecchi D.: Damage evaluation in cracked vibrating beams using experimental frequencies and FE models. *Journal Of Vibration and Control*, 2, 1996, p. 69-86.
11. Liu G. R., Chen, S. C.: A Novel Technique for Inverse Identification of Distributed Stiffness Factor in Structures. *Journal of Sound and Vibration*, 254(5), 2002, p. 823-835.
12. Penrose, R., A Generalized Inverse for Matrices. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, vol. 51, 1955, p. 406-413.

Recenzent: Dr hab. inż. Wojciech Glabisz, prof. Pol. Wrocławskiej