

Piotr KOZIOL*
Politechnika Koszalińska

DRGANIA POWIERZCHNI GRUNTU WYMUSZONE PRZEZ POCIĄG PORUSZAJĄCY SIĘ W TUNELU

Streszczenie. W pracy przedstawiono dwuwymiarowy model tunelu kolejowego, składający się z belki typu Eulera-Bernoulliego zanurzonej w gruncie, na pewnej głębokości, równoległe do jego powierzchni. Wyznaczono wartość prędkości krytycznej dla zaproponowanego modelu. Dokonano analizy drgań powierzchni gruntu dla stałego obciążenia poruszającego się jednostajnie wzdłuż belki, przy zmieniającej się gęstości oraz module Younga warstw leżących nad i pod belką. Zaprezentowano numeryczne wyniki dla wartości przemieszczeń na powierzchni oraz dokonano parametrycznej analizy w przestrzeni transformacji dla prędkości poniżej i powyżej wartości krytycznej.

SURFACE GROUND VIBRATION GENERATED BY A TRAIN MOVING IN A TUNNEL

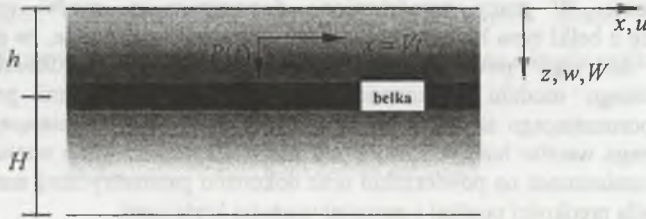
Summary. A two-dimensional model of the tunnel with an Euler-Bernoulli beam located in the ground, parallel to the surface at some depth, is considered. Critical velocity of the moving load in the presented model is calculated. The surface vibrations of elastic layer are analysed under constant load moving uniformly along the beam. The analysis is carried out with changing mass densities and Young's moduli of the layers, above and under the beam. The displacements at the surface are obtained numerically and parametric study in the frequency domain in the sub-critical and the super-critical velocity cases is done.

1. Wstęp

Podczas budowy kolei i tuneli podziemnych bardzo często zachodzi potrzeba dokonania analizy drgań powierzchni gruntu wywołanych przemieszczającym się obciążeniem. Opis zagadnień związanych z ruchem pociągów na powierzchni gruntu i w tunelach można znaleźć w pracach wielu autorów [1,2,3].

* Opiekun naukowy: Dr hab. Zdzisław Hryniewicz, prof. Pol. Koszalińskiej

W artykule zaprezentowano teoretyczny dwuwymiarowy model tunelu. Badane są drgania powierzchni elastycznego ośrodka, generowane przez punktowe, stałe obciążenie przemieszczające się jednostajnie wzdłuż belki o nieskończonej długości, umieszczonej pod powierzchnią gruntu, równoległe do jego powierzchni. Belka jest opisana równaniem Eulera-Bernoulliego. Zostały przedstawione numeryczne wyniki w przestrzeni transformacji oraz wartości przemieszczeń dla powierzchni gruntu. Głównym celem pracy jest analiza wpływu tłumienia ośrodka otaczającego belkę na poziom drgań na powierzchni gruntu, przy założeniu zmieniających się gęstości oraz modułu Younga warstw ośrodka. Została wyznaczona również pewna wartość krytyczna prędkości obciążenia.



Rys. 1. Schemat modelu

Fig. 1. Geometry of the problem

2. Równania i warunki opisujące model

Rozważany dwuwymiarowy model składa się z belki umieszczonej pod powierzchnią gruntu, równoległe do jego powierzchni, z jednostajnie przemieszczającym się wzdłuż niej obciążeniem (rys.1). Górna i dolna warstwa mają grubości odpowiednio h i H . Rozważamy równanie belki typu Eulera-Bernoulliego:

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho_B \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = P(t) \delta(x - Vt) + a[\sigma_z(x, h^-, t) - \sigma_z(x, h^+, t)]. \quad (1)$$

$P(t)$, $W(x, t)$, $\sigma_z(x, z, t)$, EI , ρ_B , $\delta(\cdot)$ oraz a oznaczają odpowiednio: punktowe pionowe obciążenie, pionowe przemieszczenie belki, pionowe naprężenie, sztywność na zginanie, gęstość belki, funkcję delta Diraca [4,5] oraz długość charakterystyczną belki w kierunku y . Przy założeniu niewielkiej lepkości ośrodka równanie ruchu można zapisać w postaci [4]:

$$(\hat{\lambda} + \hat{\mu})\nabla_{x,z}(\nabla_{x,z}\mathbf{u}) + \hat{\mu}\nabla_{x,z}^2\mathbf{u} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{u}(x, z, t) = [u(x, z, t), 0, w(x, z, t)]$ jest wektorem przemieszczenia, $\hat{\lambda} = \lambda + \lambda^* \partial / \partial t$ oraz $\hat{\mu} = \mu + \mu^* \partial / \partial t$ są operatorami opisującymi lepko-sprężysty charakter ośrodka, λ i μ są stałymi Lamego, ρ jest gęstością ośrodka.

Zakładamy następujące warunki brzegowe i warunki ciągłości:

$$u(x, h^-, t) = 0, \quad u(x, h^+, t) = 0, \quad w(x, h^-, t) = W(x, t), \quad w(x, h^+, t) = W(x, t) \quad (3)$$

$$\sigma_{xz}(x, 0, t) = 0, \quad \sigma_{xz}(x, 0, t) = 0, \quad u(x, H^-, t) = 0, \quad w(x, H^-, t) = 0. \quad (4)$$

Warunki początkowe nie są konieczne, ponieważ rozważany typ obciążenia prowadzi do stanu ustalonego. Stałe obciążenie $P(t) = P_0$ można traktować jako graniczny przypadek obciążenia harmonicznego $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$ dla częstotliwości $\Omega = 0$.

3. Rozwiązanie problemu

Wykorzystując potencjały Lamego $\varphi = \varphi(x, z, t)$ i $\tilde{\psi} = [0, -\psi(x, z, t), 0]$, równanie (2) można zastąpić dwoma następującymi równaniami:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left(c_L^2 + \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(c_T^2 + \frac{\mu^*}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (6)$$

gdzie $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$, $c_T = \sqrt{\mu / \rho}$ są prędkościami odpowiednio fali dylatacyjnej i fali poprzecznej dla ośrodka. Składowe przemieszczenia i naprężenia przyjmują postać:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\sigma_{xz} = \hat{\lambda} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\hat{\mu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right), \quad \sigma_{xx} = \hat{\mu} \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right). \quad (8)$$

Definiujemy następujące całkowe transformacje Fouriera:

$$\tilde{f}(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) e^{i(\omega t - kx)} dx dt, \quad f(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k, \omega) e^{-i(\omega t - kx)} d\omega dk. \quad (9)$$

Stosując te transformaty do równań (1) - (8), otrzymujemy:

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}}{dz^2} - R_L^2 \tilde{\varphi} = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{\psi}}{dz^2} - R_T^2 \tilde{\psi} = 0 \quad (10)$$

$$(EIk^4 - \rho_B \omega^2) \tilde{W}(k, \omega) = \tilde{P}(\omega - Vk) + \alpha (\tilde{\sigma}_z(k, h^-, \omega) - \tilde{\sigma}_z(k, h^+, \omega)) \quad (11)$$

$$\tilde{w}(k, h^-, \omega) = \tilde{w}(k, h^+, \omega) = \tilde{W}(k, \omega), \quad \tilde{u}(k, h^-, \omega) = \tilde{u}(k, h^+, \omega) = 0, \quad (12)$$

$$\tilde{\sigma}_z(k, 0, \omega) = \tilde{\sigma}_z(k, 0, \omega) = 0, \quad \tilde{u}(k, H^-, \omega) = \tilde{w}(k, H^-, \omega) = 0,$$

gdzie

$$R_L^2 = k^2 - \omega^2 / (c_L^2 - i\omega(\lambda^* + 2\mu^*) / \rho), \quad R_T^2 = k^2 - \omega^2 / (c_T^2 - i\omega\mu^* / \rho) \quad (13)$$

$$\tilde{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{i\omega t} dt \quad (14)$$

$$\tilde{u}(k, z, \omega) = ik\tilde{\varphi} + \frac{d\tilde{\psi}}{dz}, \quad \tilde{w}(k, z, \omega) = \frac{d\tilde{\varphi}}{dz} - ik\tilde{\psi} \quad (15)$$

$$\tilde{\sigma}_z(k, z, \omega) = \hat{\lambda} \left(\frac{d^3 \tilde{\varphi}}{dz^3} - k^2 \tilde{\varphi} \right) + 2\hat{\mu} \left(\frac{d^3 \tilde{\psi}}{dz^3} - ik \frac{d\tilde{\psi}}{dz} \right) \quad (16)$$

$$\tilde{\sigma}_{xz}(k, z, \omega) = \hat{\mu} \left(2ik \frac{d\tilde{\varphi}}{dz} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2} + k^2 \tilde{\psi} \right).$$

Zakładając różne gęstości i wartości modułu Younga dla warstw powyżej ($j=1, n=0$) i poniżej ($j=2, n=4$) belki, rozwiązanie równań (10) można zapisać w postaci:

$$\tilde{\varphi}_j = A_{1+n} e^{R_L^j z} + A_{2+n} e^{-R_L^j z}, \quad \tilde{\psi}_j = A_{3+n} e^{R_T^j z} + A_{4+n} e^{-R_T^j z} \quad (17)$$

gdzie R_T^j, R_L^j oznaczają pierwiastki równań charakterystycznych dla (10) w górnej warstwie ($j=1$) oraz w warstwie ośrodka leżącej pod belką ($j=2$):

$$R_L^j = \sqrt{k^2 - \omega^2 / ((c_L^j)^2 - i\omega(\lambda_j^* + 2\mu_j^*) / \rho_j)}, \quad R_T^j = \sqrt{k^2 - \omega^2 / ((c_T^j)^2 - i\omega\mu_j^* / \rho_j)}. \quad (18)$$

Podstawiając równania (17) do równań (15) i (16), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j &= ik(A_{1+n} e^{R_L^j z} + A_{2+n} e^{-R_L^j z}) + R_T^j (A_{3+n} e^{R_T^j z} - A_{4+n} e^{-R_T^j z}) \\ \tilde{w}_j &= R_L^j (A_{1+n} e^{R_L^j z} - A_{2+n} e^{-R_L^j z}) - ik(A_{3+n} e^{R_T^j z} + A_{4+n} e^{-R_T^j z}) \\ \tilde{\sigma}_z^j &= ((\hat{\lambda}_j + 2\hat{\mu}_j)(R_L^j)^2 - \hat{\lambda}_j k^2)(A_{1+n} e^{R_L^j z} + A_{2+n} e^{-R_L^j z}) - 2ik\hat{\mu}_j R_T^j (A_{3+n} e^{R_T^j z} - A_{4+n} e^{-R_T^j z}) \\ \tilde{\sigma}_{xz}^j &= \hat{\mu}_j [2ikR_L^j (A_{1+n} e^{R_L^j z} - A_{2+n} e^{-R_L^j z}) + (k^2 + (R_T^j)^2)(A_{3+n} e^{R_T^j z} + A_{4+n} e^{-R_T^j z})]. \end{aligned} \quad (19)$$

Podstawiając z kolei otrzymane wyrażenia do równań (11) i (12) oraz wprowadzając następujące oznaczenia: $\gamma = EIk^4 - \rho_B \omega^2$, $g_L^1 = e^{hR_L^1}$, $g_T^1 = e^{hR_T^1}$, $g_L^2 = e^{hR_L^2}$, $g_T^2 = e^{hR_T^2}$, $\bar{g}_L^2 = e^{(h+H)R_L^2}$, $\bar{g}_T^2 = e^{(h+H)R_T^2}$, otrzymujemy układ ośmiu równań algebraicznych (20) ze względu na $A_{m+n}, (m=1, \dots, 4)$. Układ ten można rozwiązać stosując twierdzenie Cramera.

$$\begin{aligned} &(\hat{\lambda} k^2 - (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})(R_L^1)^2) g_L^1 A_1 + (\hat{\lambda} k^2 - (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})(R_L^1)^2) (g_L^1)^{-1} A_2 + 2\hat{\mu} ik R_T^1 g_T^1 A_3 - 2\hat{\mu} ik R_T^1 (g_T^1)^{-1} A_4 \\ &+ (-\hat{\lambda} k^2 + (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})(R_L^2)^2 + R_T^2 \gamma / \alpha) g_L^2 A_5 + (-\hat{\lambda} k^2 + (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})(R_L^2)^2 - R_T^2 \gamma / \alpha) (g_L^2)^{-1} A_6 + (-2\hat{\mu} R_T^2 \\ &- \gamma / \alpha) ik g_T^2 A_7 + (-2\hat{\mu} R_T^2 - \gamma / \alpha) ik (g_T^2)^{-1} A_8 = \tilde{P}(\omega - Vk), \quad R_L^1 g_L^1 A_1 - R_L^1 (g_L^1)^{-1} A_2 - ik g_T^1 A_3 - ik (g_T^1)^{-1} A_4 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 & -R_L^2 g_L^2 A_5 - R_L^2 (g_L^2)^{-1} A_6 + ik g_L^2 A_7 + ik (g_L^2)^{-1} A_8 = 0; \quad ik g_L^1 A_4 + ik (g_L^1)^{-1} A_5 + R_T^1 g_T^1 A_3 - R_T^1 (g_T^1)^{-1} A_4 = 0; \\
 & ((\hat{\lambda}_1 + 2\hat{\mu}_1)(R_L^1)^2 - \hat{\lambda}_1 k^2) A_1 + ((\hat{\lambda}_1 + 2\hat{\mu}_1)(R_L^1)^2 - \hat{\lambda}_1 k^2) A_2 - 2\hat{\mu}_1 ik R_T^1 A_3 + 2\hat{\mu}_1 ik R_T^1 A_4 = 0; \quad 2ik R_L^1 A_5 \\
 & - 2ik R_L^1 A_6 + (k^2 + (R_T^1)^2) A_3 + (k^2 + (R_T^1)^2) A_4 = 0; \quad ik (g_L^2)^{-1} A_5 + ik (g_L^2)^{-1} A_6 + R_T^2 g_T^2 A_7 - R_T^2 (g_T^2)^{-1} A_8 = 0; \\
 & R_L^2 g_L^2 A_5 - R_L^2 (g_L^2)^{-1} A_6 - ik g_T^2 A_7 - ik (g_T^2)^{-1} A_8 = 0; \quad ik g_L^2 A_3 + ik (g_L^2)^{-1} A_4 + R_T^2 g_T^2 A_7 - R_T^2 (g_T^2)^{-1} A_8 = 0.
 \end{aligned}$$

Oznaczając przez D wyznacznik macierzy głównej układu (19), a przez D_j wyznacznik zmodyfikowanej macierzy głównej z j -tą kolumną zastąpioną wektorem $F = [1, 0, 0, 0, 0, 0]^T$, można rozwiązanie układu (20) zapisać w postaci

$$A_j = \tilde{P}(\omega - Vk) D_j(k, \omega) / D(k, \omega). \tag{21}$$

Podstawiając równania (21) do wyrażeń (19), otrzymujemy dla $j = 1$ i $z = 0$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_1(k, 0, \omega) &= \tilde{P}(\omega - Vk) \tilde{u}_0^1(k, \omega) = \tilde{P}(\omega - Vk) (ik(D_1 + D_2) + R_T^1(D_3 - D_4)) / D \\
 \tilde{w}_1(k, 0, \omega) &= \tilde{P}(\omega - Vk) \tilde{w}_0^1(k, \omega) = \tilde{P}(\omega - Vk) (R_L^1(D_1 - D_2) - ik(D_3 + D_4)) / D.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Stosując transformatę odwrotną zdefiniowaną w (9) do równań (22) otrzymujemy:

$$u(x, 0, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(k, 0, \omega) e^{-i(\omega t - kx)} dk d\omega \tag{23}$$

gdzie $\tilde{u}(k, 0, \omega) = [\tilde{u}_1(k, 0, \omega), \tilde{w}_1(k, 0, \omega)]$ oznacza wektor przemieszczenia w dziedzinie transformacji. W celu zbadania drgań powierzchni w stanie ustalonym wystarczy wziąć pod uwagę dowolny punkt na powierzchni. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x = 0$. Stąd

$$u(0, 0, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}(\omega - Vk) \tilde{u}_0(k, \omega) e^{-i\omega t} dk d\omega \tag{24}$$

oraz konsekwentnie dla widma amplitudowego drgań w tym punkcie:

$$u_j(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(0, 0, t) e^{-2\pi i f t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}(-2\pi i f - Vk) \tilde{u}_0(k, -2\pi i f) dk. \tag{25}$$

4. Wyniki numeryczne oraz wnioski dla przypadku obciążenia stałego

Rozważmy obciążenie o wartości stałej $P(t) = P_0$. Możemy wówczas zapisać [2,5]:

$$\tilde{P}(\omega - kV) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_0 e^{i(\omega - kV)t} dt = 2\pi P_0 \delta(\omega - kV). \tag{26}$$

Stąd wyrażenia (24) i (25) przyjmują następującą formę:

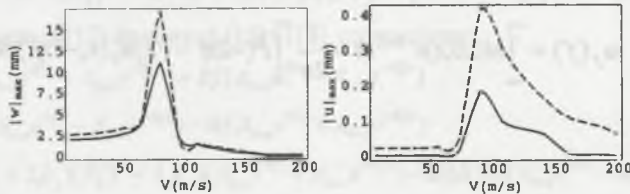
$$\mathbf{u}(0,0,t) = \frac{P_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{u}}_0(k, kV) e^{-ikVt} dk \quad (27)$$

$$\mathbf{u}_f(f) = \frac{P_0}{V} \tilde{\mathbf{u}}_0\left(\frac{-2\pi f}{V}, -2\pi f\right) = \frac{P_0}{V} [\tilde{u}_0^i\left(\frac{-2\pi f}{V}, -2\pi f\right), \tilde{w}_0^i\left(\frac{-2\pi f}{V}, -2\pi f\right)]. \quad (28)$$

Aby otrzymać przemieszczenie, wystarczy policzyć numerycznie wyrażenie (27). Do obliczeń numerycznych przyjmujemy następujące wartości [2]: $E_1 = c_E E_2$, $E_2 = 3 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$, $\rho_1 = c_\rho \rho_2$, $\rho_2 = 1700 \text{ kg/m}^3$, $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 3 \cdot 10^4 \text{ kg/ms}$, współczynnik Poissona $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$, $\mu_1^* = \mu_2^* = 3 \cdot 10^4 \text{ kg/ms}$, odpowiednio dla warstwy górnej i dolnej; oraz dla belki: $\rho_b/a = 3 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^2$; $EI/a = 10^9 \text{ Nm}$; $a = 4 \text{ m}$; $P_0 = 4 \cdot 10^4 \text{ N}$; $V = 30 \text{ m/s}$.

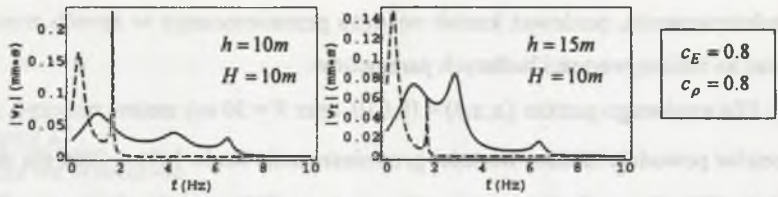
W celu wykonania numerycznych obliczeń oraz sporządzenia rysunków zostały ułożone specjalne programy działające w systemie MATHEMATICA. Głównym zadaniem analizy jest przebadanie wpływu zmiany parametrów h , c_ρ i c_E oraz prędkości poruszającego się obciążenia na zakres drgań powierzchni gruntu.

Zdefiniujemy prędkość krytyczną obciążenia jako prędkość, przy której wartość bezwzględna składowych u i w przemieszczenia w punkcie $(0,0,t)$ osiąga maksimum. Można zauważyć (rys. 2 ($H = 150 \text{ m}$)), że prędkość ta jest bliska prędkości $c_T^* \approx 81,4 \text{ m/s}$. Prędkość krytyczna nie zależy od wartości parametrów c_ρ i c_E . Dla prędkości niższych od krytycznej widmo amplitudowe posiada dwa maksima, dla wyższych pojawia się trzecie (rys. 3, rys. 4).

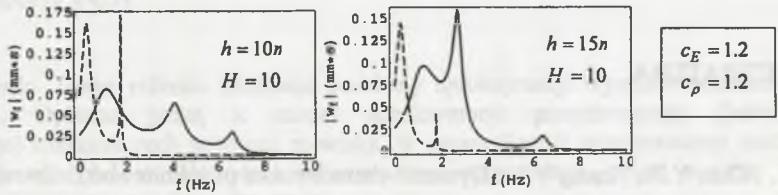


Rys. 2. Maksymalne przemieszczenia (linia przerywana - $h = 10 \text{ m}$, linia ciągła - $h = 100 \text{ m}$)
 Fig. 2. The maximum displacements (dashed line - $h = 10 \text{ m}$, solid line - $h = 100 \text{ m}$)

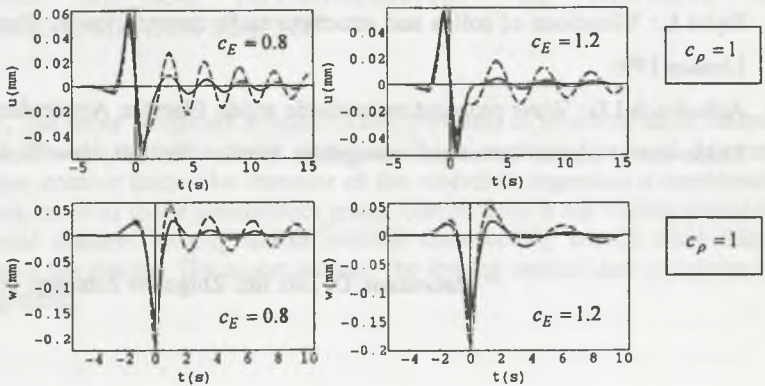
Rysunki 3 i 4 pokazują, że przy wzroście wartości parametrów c_ρ i c_E wzrastają wartości ekstremów położonych bliżej zera. Należy zaznaczyć, że większa część widma jest ulokowana w dolnym zakresie częstotliwości i tendencja ta umacnia się zarówno przy wzrastających c_ρ i c_E , jak też przy rosnącej grubości h górnej warstwy ośrodka. Przy malejącej grubości h widmo się poszerza oraz wyrównują się wartości ekstremów.



Rys. 3. Widma amplitudowe (linia przerywana - $V = 30$ m/s, linia ciągła - $V = 85$ m/s)
 Fig. 3. The amplitude spectra (dashed line - $V = 30$ m/s, solid line - $V = 85$ m/s)



Rys. 4. Widma amplitudowe (linia przerywana - $V = 30$ m/s, linia ciągła - $V = 85$ m/s)
 Fig. 4. The amplitude spectra (dashed line - $V = 30$ m/s, solid line - $V = 85$ m/s)



Rys. 5. Przeszczenia dla $V = 30$ m/s (linia przerywana - $h = 10$ m, linia ciągła - $h = 15$ m)
 Fig. 5. The displacements for $V = 30$ m/s (dashed line - $h = 10$ m, solid line - $h = 15$ m)

Wraz z malejącą grubością h górnej warstwy rośnie amplituda przemieszczeń (rys. 5). Przy stałym c_ρ i rosnącym c_E maleją wartości bezwzględne przemieszczeń oraz następujące szybsze tłumienie drgań (analogiczny proces zachodzi przy jednoczesnym jednakowym wzroście tych parametrów). Przy stałym c_E i rosnącym c_ρ wartości przemieszczeń nieznacznie wzrastają. Dla prędkości większych od krytycznej podobne zjawiska są trudne do

zaobserwowania, ponieważ kształt wykresu przemieszczenia w sposób znaczny zmienia się wraz ze zmianą wartości badanych parametrów.

Dla ustalonego punktu $(x, z, t) = (0, 0, 0)$ oraz $V = 30 \text{ m/s}$ można obliczyć, że wzrost h o 5 metrów powoduje zmianę wartości przemieszczenia około $10\% \div 20\%$ dla składowej w oraz około 70% dla u . Zmiana parametrów c_ρ i c_E 20%, w zakresie $c_\rho, c_E \in [0.8, 1.2]$, pociąga za sobą zmianę wartości u około $50\% \div 70\%$ oraz w około 10% .

LITERATURA

1. Chen Y.H., Huang Y.H.: Dynamic characteristics of infinite and finite railways to moving load. J. Eng. Mech., 129, 9, 2003, 987 – 995.
2. Metrikine A.V. and Vrouwenvelder A.C.W.M.: Surface ground vibration due to a moving train in a tunnel: two – dimensional model. J. of Sound and Vibr., 234(1), 2000, 43 – 66.
3. Fryba L.: Vibrations of solids and structures under moving loads. Thomas Telford Ltd., London 1999.
4. Achenbach J.D.: Wave propagation in elastic solids. Elsevier, Amsterdam 1984.
5. Miklowitz J.: Elastic waves and waveguides. North – Holland, New York 1978.

Recenzent: Dr hab. inż. Zbigniew Zembaty, prof. Pol. Opolskiej