ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004
Seria: BUDOWNICTWO z. 102 Nr kol. 1644

Krzysztof KULA*
Uniwersytet Zielonogórski

ANALIZA PŁYT WARSTWOWYCH Z ZASTOSOWANIEM MES

Streszczenie. W pracy przedstawiono elementy numerycznych badań własnych zginanych płyt warstwowych zbrojonych włóknami ciągłymi. Zaprezentowano związki konstytutywne dla kompozytu w zakresie liniowo sprężystym i równanie różniczkowe płyty anizotropowej. Przedstawiono przyrostowe równanie równowagi MES uwzględniające wpływ nieliniowości geometrycznej na statyczne ugięcia pod wpływem obciążenia, kryteria niszczenia i sposób modelowania zniszczenia poprzez modyfikacje macierzy sztywności.

ANALYSIS OF LAYERED PLATES BY FEM

Summary. The paper presents the author's research on behaviour of the bending of laminated plates reinforced with unidirectional fibres. It shows the constitutive equations for fibre-composite in the linear-elastic range and the differential equation for an anisotropic plate. An incremental equation of equilibrium, which takes into account the influence of geometric nonlinearity on static deflection, is described in the last part of this article as well as failure criteria and the failure modes.

1. Wstęp

Niniejsza praca jest kontynuacją badań nad właściwościami mechanicznymi płyt włóknokompozytowych, a zarazem wstępem do obliczeń wytrzymałościowych w zakresie nieliniowym i uszkadzania. Przez element kompozytowy rozumiemy materiał utworzony z dwóch lub większej liczby składników, który w skali makroskopowej daje się modelować jako jednorodne ciało anizotropowe. Nowoczesne materiały kompozytowe mają duże możliwości w zakresie kształtowania ich właściwości wytrzymałościowych, sztywności w interesującym nas kierunku. Dzięki swoim właściwością i coraz większej powszechności dostępu i zastosowania materiał kompozytowi stanowi bardzo ważną część mechaniki materiałowej. W wielu pracach rozwiązuje się elementy konstrukcyjne wykonane z

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Mieczysław Kuczma, prof. Uniw. Zielonogórskiego

materiałów kompozytowych w zakresie sprężystym [1,3,4,5,7], wielu autorów wykorzystuje do tego celu metodę elementów skończonych (MES) [2,3,4] i zwraca uwagę na istotny wpływ geometrycznej nieliniowości na zachowanie się kompozytów włóknistych [3,4].

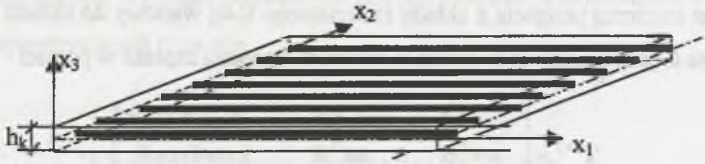
Przedmiotem rozważań w tej pracy jest problem brzegowy zginanej warstwowej płyty kompozytowej, której typowa warstwa składa się z matrycy wykonanej z nowoczesnych materiałów sztucznych i zbrojonej jednokierunkowo włóknami ciągłymi, na przykład borowymi, szklanymi czy tytanowymi. We wcześniejszych pracach [2,6] rozwiązano zginane płyty warstwowej w zakresie sprężystym i sprawdzono wpływ usytuowania włókien na wielkości fizyczne (przemieszczenia, momenty zginające i skręcające). Celem tej pracy jest przedstawienie sposobu obliczania wielkości fizycznych z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej z wykorzystaniem metody Newtona-Raphsona, a następnie, wykorzystując znane kryteria wytrzymałości dla kompozytów włóknistych, zidentyfikować i przeanalizować postęp zniszczenia (zarysowanie matrycy, zerwanie włókien, ścięcie matrycy i włókna).

W pierwszej części pracy przedstawiono związki konstytutywne, sposób wyznaczenia stałych sprężystości oraz rozwiązanie prostego przykładu płyty warstwowej w zakresie liniowym z wykorzystaniem własnego programu i porównanie z rozwiązaniem analitycznym. W drugiej części zaprezentowano przegląd kryteriów wytrzymałościowych i opisano sposób modelowania postępu zniszczenia i degradacji materiału z wykorzystaniem MES. Rozwiązania własne w postaci przykładów z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej i niszczenia zostaną przedstawione na konferencji.

2. Związki konstytutywne dla kompozytu warstwowego

Charakterystyczny przekrój poprzeczny analizowanych płyt uwarstwionych pokazano na rys. 1, gdzie dla przejrzystości zaznaczono tyko dwie warstwy symetryczne względem płaszczyzny środkowej płyty. Położenie typowej warstwy k, (k=1...N) i jej grubość h_k określają dwie sąsiednie rzędne z_k i z_{k+1}. Zakłada się, że każda z warstw jest, z uwagi na zbrojenie włóknami, ośrodkiem ortotropowym. Wyróżnia się dwa układy odniesienia. Układ globalny xyz jest układem współrzędnych, w którym rozwiązywany jest postawiony problem brzegowy zginania płyty, natomiast każda z warstw ma swój własny układ materialnych osi głównych x_1 x_2 x_3, przy czym osie x_3 i z pokrywają się.

Rys. 1. Płyta warstwowa
Fig. 1. Layered plate



Rys. 2. Typowa warstwa k, k=1,...,N
Fig. 2. Typical layer k, k=1,...,N

Związek konstytutywny dla k-tej warstwy włóknokompozytu ortotropowego w układzie osi materialanych x_1 x_2 x_3 można zapisać następująco:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = \mathbf{C}^{(k)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}^{(k)} \tag{1'}$$

We wzorze (1) zastosowano uproszczony zapis macierzowy relacji tensorów, grupując składowe tensora naprężenia σ_{ij} i tensora odkształcenia ε_{ij} w wektory, a składowe tensora sprężystości w macierz **C**, co wyjaśnia związek macierzowy (1)'. Elementy macierzy sprężystości **C** dla warstwy włóknokompozytu ortotropowego można obliczyć wg zależności przedstawionych w pracach [1,4], gdzie również zaprezentowano wzory umożliwiające obliczenie modułów Younga i współczynników Poissona w odpowiednich kierunkach w układzie materialnym.

W układzie osi globalnych xyz ortotropowy związek konstytutywny (1) staje się związkiem anizotropowym scharakteryzowanym macierzą $\tilde{C}^{(k)}$,

$$\tilde{\sigma}^{(k)} = \tilde{\mathbf{C}}^{(k)}\tilde{\varepsilon}^{(k)} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{16} \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{26} \\ \tilde{C}_{16} & \tilde{C}_{26} & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} \tag{3}$$

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)}\mathbf{C}^{(k)}\left(\mathbf{T}^{(k)}\right)^{T} \tag{4}$$

gdzie $\mathbf{T}^{(k)}$ jest macierzą przejścia z układu materialnego k-tej warstwy do układu globalnego, zależną od kąta θ, jaki tworzy oś x_1 z osią x. Macierz **T** można zapisać w postaci

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{5}$$

gdzie $\theta = \theta_k$ jest kątem, jaki tworzy oś x_1 k-tej warstwy z osią x.

3. Płyta warstwowa anizotropowa w zakresie liniowo sprężystym

Różniczkowe równanie płyty anizotropowej da się zapisać w postaci

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(2D_{12} + 4D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} = p \tag{6}$$

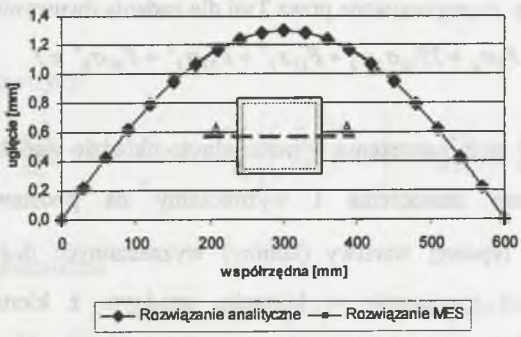
gdzie $w = w(x,y)$ jest ugięciem płaszczyzny środkowej płyty $\Omega \subset R^2$, $p = p(x,y)$ stanowi obciążenie płyty. Współczynniki D_{ij} (i,j=1,2,6) reprezentują sztywności płyty na zginanie i skręcanie. Można je zestawić w postaci symetrycznej macierzy

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} \tilde{C}_{ij}^{(k)}\left(z_{k+1}^3 - z_k^3\right), \tag{7}$$

w analizowanym przypadku sprężystych płyt Kirchhoffa. Równanie (6) jest prawdziwe w przypadku płyt kompozytowych, w których włókna są rozmieszczone symetrycznie względem płaszczyzny środkowej płyty [7].

Sformowanie wariacyjne równania różniczkowego (7) i aproksymacje metodą elementów skończonych przedstawiono w pracy [2], gdzie również zamieszczono funkcje kształtu i macierz sztywności dla czterowęzłowego, płytowego elementu skończonego-Q4 (12 stopni swobody).

Na rysunku 3 przedstawiono ugięcia w płycie warstwowej, złożonej z pięciu warstw [0/45/90/-45/90/0] z kompozytu E-szkło/poliester, swobodnie podpartej o grubości 3,43 mm i wymiarach 600 mm na 600 mm obciążonej równomiernie (p=0,1kPa). Porównano tu ugięcia w przekroju A-A przez środek płyty wyznaczone własnym programem MES z rozwiązaniem analitycznym Naviera w postaci podwójnego szeregu Fouriera przedstawione w pracy [7] dla laminatów symetrycznych typu *ply*.



Rys. 3. Ugięcia w przekroju A-A
Fig. 3. Deflection in the cross-section A-A

4. Nieliniowość geometryczna oraz kryteria i sposób modelowania zniszczenia

W przypadku uwzględniania nieliniowości geometrycznej i/lub fizycznej analiza płyt włóknokompozytowych odbywa się przyrostowo. W ramach typowego przyrostu od chwili t_{n-1} do t_n dla znanego wektora stanu układu $\mathbf{q}_{n-1}$ wyznaczamy przyrost $\Delta\mathbf{q}_n = \sum_i d\mathbf{q}_n^i$, stosując metodę Newtona-Raphsona, w której iteracyjne przyrosty $d\mathbf{q}_n^i$ wyznaczamy rozwiązując liniowy układ równań

$$\mathbf{K}_T\left(\mathbf{q}_n^i\right) d\mathbf{q}_n^i = \mathbf{r}^i \tag{8}$$

W równaniu (8) $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_\sigma$ jest styczną macierzą sztywności składającą się, oprócz „klasycznej" (liniowej) macierzy sztywności $\mathbf{K}_L$, ze składników wynikających z nieliniowości związków konstytutywnych i geometrycznych, otrzymywanych w procesie linearyzacji [1]. Macierz styczna $\mathbf{K}_T(\mathbf{q}_n^i)$ jest obliczana na każdym kroku iteracyjnym i dla wektora stanu $\mathbf{q}_n^i = \mathbf{q}_{n-1}^i + \sum_k^i \mathbf{q}_n^k$.

W dalszej części pracy przedstawione zostaną proponowane w literaturze [3,4] kryteria zniszczenia dla kompozytu. Możemy wyróżnić dwie klasy kryteriów zniszczeń: niezależne i interakcyjne. Różnica między nimi polega na uwzględnianiu bądź nie interakcji naprężeń w mechanizmie zniszczenia.

Większość kryteriów zniszczenia interakcyjnego dla kompozytów przedstawiona jest w postaci nierówności, jak np. zaproponowana przez Tsai dla zadania dwuwymiarowego:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 \geq 1 \tag{9}$$

gdzie σ_1, σ_2 i σ_6 ($\sigma_6 = \sigma_{12}$) są to naprężenia w materialnym układzie współrzędnych, a F_i i F_{ij} nazywamy wskaźnikami zniszczenia i wyznaczamy na podstawie parametrów wytrzymałościowych dla typowej warstwy (laminy) wyznaczonych doświadczalnie: X_T - wytrzymałość warstwy na rozciąganie w kierunku zgodnym z kierunkiem ułożenia włókien, X_C -wytrzymałość warstwy na ściskanie w kierunku zgodnym z kierunkiem ułożenia włókien, Y_T -wytrzymałość warstwy na rozciąganie w kierunku prostopadłym do kierunku ułożenia włókien, Y_C -wytrzymałość warstwy na ściskanie w kierunku prostopadłym do kierunku ułożenia włókien, SC -wytrzymałość warstwy na ścinanie. Wskaźniki zniszczenia liczymy na podstawie wzorów zgodnych z przyjętym kryterium:

1. Kryterium Tsai-Wu

$$F_1 = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}, F_2 = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}, F_{11} = \frac{1}{X_T X_C}, F_{22} = \frac{1}{Y_T Y_C}, F_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{F_{11}F_{22}}, F_{66} = \frac{1}{SC^2} \tag{10}$$

2. Kryterium maksymalnego naprężenia

$$F_1 = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}, F_2 = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}, F_{11} = \frac{1}{X_T X_C}, F_{22} = \frac{1}{Y_T Y_C}, F_{12} = -\frac{F_1 F_2}{2}, F_{66} = \frac{1}{SC^2} \tag{11}$$

3. Kryterium Tsai-Hilla

$$F_1 = 0, F_2 = 0, F_{11} = \frac{1}{X^2}, F_{22} = \frac{1}{Y^2}, F_{12} = -\frac{1}{2X^2}, F_{66} = \frac{1}{SC^2}, \text{ gdzie } X = X_T, \text{ jeśli}$$
$$\sigma_1 > 0, \text{ poza } X = X_c . Y = Y_T, \text{ jeśli } \sigma_2 > 0, \text{ poza } Y = Y_c . \tag{12}$$

4. Kryterium Hashina

Kryterium Hashina dla zadania dwuwymiarowego przyjmuje inną formę niż wyżej przedstawione kryteria, osobno się tu rozpatruje zniszczenie włókna, a osobno matrycy.

5. Zniszczenie włókna:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_T}\right)^2 + \frac{\sigma_{12}^2}{SC^2} = 1, \sigma_1 > 0$$
$$\sigma_1 = -X_C, \sigma_1 < 0 \tag{13}$$

6. Zniszczenie matrycy:

$$\left(\frac{\sigma_1}{Y_T}\right)^2 + \frac{\sigma_{12}^2}{SC^2} = 1, \quad \sigma_1 > 0, \quad \frac{1}{Y_C}\left[\left(\frac{Y_C}{2SC}\right)^2 - 1\right]\sigma + \frac{\sigma_2^2}{4SC^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{SC^2} = 1 \quad , \sigma_1 < 0 \tag{14}$$

7. Zniszczenie niezależne

$$\sigma_1 \geq X_C, \sigma_2 \geq Y_C, \sigma_{12} \geq SC, \text{dla } \sigma_1 < 0$$
$$\sigma_1 \geq X_T, \sigma_2 \geq Y_T, \sigma_{12} \geq SC, \text{dla } \sigma_1 > 0 \tag{15}$$

Analiza postępu zniszczenia jest podstawowym zadaniem, którego efektem jest określenie rodzaju i wielkości degradacji właściwości materiału na skutek przyrostu obciążenia. Określenie degradacji właściwości materiału zgodnie z rzeczywistością nie jest łatwym zadaniem. Dużo czynników mających wpływ na gęstość zarysowania znacznie komplikuje numeryczne metody makroskopowego modelowania zniszczenia. Jednym z efektownych sposobów jest redukowanie do zera odpowiednich modułów korespondujących z dominującym uszkodzeniem, które ustalamy na podstawie następujących zależności:

$$H_1 = F_1\sigma_1 + F_{11}\sigma_1^2, \quad H_2 = F_2\sigma_2 + F_2\sigma_2^2, \quad H_6 = F_{66}\sigma_6^2 \tag{16}$$

Gdzie H_1 jest to parametr związany z uszkodzeniem włókien (zerwaniem) i jeśli przekroczy dopuszczalną wartość, należy zredukować E_1 w odpowiedniej warstwie, H_2 – zarysowanie matrycy, redukcja E_2, a H_3 ścięcie włókna i matrycy – G_{12}. Zastosowanie

kryteriów zniszczenia i propagacja uszkodzeń z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej dla konkretnych przypadków zostaną zaprezentowane na konferencji.

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2003-2005 jako projekt badawczy (projekt badawczy własny nr 5 T07A 042 24) pt. „Analiza i modelowanie adaptacyjne konstrukcji niejednorodnych z uwzględnieniem więzów nierównościowych", pod kierownictwem dra hab. inż. M.S. Kuczmy, prof. UZ.

LITERATURA

1. Ganapathy S., Biswajit Tripathy, Rao K.P., Daamage and its growth In laminatem compositee circular/rectangular plater undergoing large deformations, Composite Structures vol.32, 1995, p. 367-373.
2. Kuczma M.S., Kula K.: Zastosowanie metody elementów skończonych w mechanice płyt włóknokompozytowych. Problemy budownictwa. (Księga pamiątkowa z okazji 70-lecia prof. T.Bilińskiego), Zielona Góra 2003, s. 349-369.
3. Padhi G.S., Shenoi R.A., Moy S.S.J., Hawkins G.L.: Progressive failure and ultimate collapse of laminated composite plates in bending, Composite Structures,vol.40, 1998, p. 227-291.
4. Reddy J.N.: Mechanics of Laminated Composite Plates. Theory and Analysis, CRC Press, 1997.
5. Świtka R.: Equations of the fibre composite plates, Engng.Trans., 40, 2, 187-201, 1992.
6. Świtka R., Kuczma M.S., Kula K.: Analiza sprężystych płyt włóknokompozytowych metodą elementów skończonych. VI Konferencja Naukowa Konstrukcje Zespolone, Zielona Góra 2002.
7. Woźniak Cz. (red.): Mechanika sprężystych płyt i powłok. PWN, Warszawa 2001.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Kubik