

Izabela MAJOR*
Politechnika Częstochowska

ANALIZA FAL BIEGNĄCYCH W CIENKIM PRĘCIE KOŁOWYM OPARTA NA WŁAŚCIWOŚCIACH PŁASZCZYZNY FAZOWEJ

Streszczenie. W niniejszej pracy rozpatrujemy nieliniowe fale biegnące w cienkim pręcie zbudowanym z materiału Zahorskiego. Uśredniając równania ruchu, otrzymujemy rozwiązanie w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych. Do analizy fal biegnących wykorzystujemy właściwości płaszczyzny fazowej.

ANALYSIS OF THE TRAVELING WAVES IN CIRCULAR THIN ROD BASED ON TECHNIQUE OF THE PHASE PLANE

Summary. This paper describes the studies of propagation of the nonlinear dispersive waves in elastic thin rod. The results are specialized to Zahorski material [4]. First we derive an approximation of one-dimensional rod equation, and then show that traveling wave solutions are determined by a dynamical system of ordinary differential equations. The technique of phase planes is used to study of such solutions.

1. Wprowadzenie

Nieliniowe fale biegnące są ciągle przedmiotem wielu badań i analiz. Transport energii, będący wynikiem drgań ośrodka ciągłego, którym jest także rozpatrywany w niniejszej pracy pręt kołowy, zbudowany z jednorodnego, izotropowego i nieliniowego materiału hipersprężystego Zahorskiego, nadal pozostaje zagadnieniem o dużych walorach poznawczych. Potwierdzeniem tego jest praca [3], w której prezentowana jest analiza nieliniowych fal biegnących w kołowym pręcie zbudowanym z nieściśliwego i hipersprężystego materiału Mooneya – Rivlina.

W niniejszej pracy zastosowano analizę rozwiązań opartą na właściwościach płaszczyzny fazowej. Ustalono warunki istnienia fizycznie akceptowalnych rozwiązań w postaci nieliniowych fal biegnących. Podobnie opierając się na właściwościach płaszczyzny fazowej,

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Sławomir Kosiński, prof. Pol. Częstochowskiej

rozpatrzono w pracy [1] (w kontekście teorii pręta przyjętej przez autora) warunki rozwiązań w postaci fal biegnących dla przypadku pręta zbudowanego z nieliniowego materiału Mooneya – Rivlina.

2. Podstawowe zależności

Ruch ogólny ciała sprężystego przyjmujemy jako równy:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (1)$$

We wzorze (1) t oznacza czas, przez \mathbf{X} i \mathbf{x} oznaczamy zarówno punkt materialny, jak też położenie, które on zajmuje, odpowiednio w konfiguracji odniesienia B_R oraz w konfiguracji bieżącej B .

Gradient odkształcenia oznaczmy używając tradycyjnego zapisu:

$$\mathbf{F} = \text{grad } \mathbf{x} \quad (2)$$

Lewy tensor deformacji Cauchy'ego – Greena będzie więc odpowiednio równy:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (3)$$

Między tensorem naprężenia Pioli – Kirchhoffa \mathbf{T}_R a tensorem naprężenia Cauchy'ego \mathbf{T} zachodzi związek:

$$\mathbf{T}_R = \mathbf{T}\mathbf{F}^{-T} \quad (4)$$

W pracy rozważamy osiowo-symetryczny ruch pręta, przyjmując układ współrzędnych walcowych zarówno w konfiguracji B_R , jak też w B . Ponadto zakładamy, że układy współrzędnych $\{x_i\}$ - przestrzenny oraz $\{X_\alpha\}$ - materialny, parametryzują tę samą przestrzeń i wzajemnie się pokrywają. Zakładamy ruch ośrodka opisany równaniami:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(R, Z, t), \quad \vartheta = \Theta, \quad z = z(R, Z, t) \quad (5)$$

Gradient deformacji ma postać:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} r_R & 0 & r_z \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ z_R & 0 & z_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

gdzie dolne indeksy R i Z w składowych gradientu wskazują na różniczkowanie po określonej współrzędnej.

Dla materiałów nieściśliwych zachodzi warunek $J = \det \mathbf{F} = 1$, z którego wynika poniższy związek:

$$r_R z_Z - r_Z z_R = \frac{R}{r} = \varepsilon^{-1} \quad (7)$$

Zgodnie z (3) lewy tensor deformacji Cauchy'ego – Greena ma postać:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} r_R^2 + r_Z^2 & 0 & r_R z_R + r_Z z_Z \\ 0 & \frac{r^2}{R^2} & 0 \\ r_R z_R + r_Z z_Z & 0 & z_R^2 + z_Z^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Materiał Zahorskiego opisany jest następującym potencjałem sprężystym, (por. [4]):

$$\begin{aligned} W(I_1, I_2) &= \rho_R \Sigma(I_1, I_2) = \tilde{C}_1(I_1 - 3) + \tilde{C}_2(I_2 - 3) + \tilde{C}_3(I_1^2 - 9) = \\ &= \mu C_1(I_1 - 3) + \mu C_2(I_2 - 3) + \mu C_3(I_1^2 - 9) \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie μ jest modułem Kirchhoffa, a $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ i C_1, C_2, C_3 oznaczają stałe sprężyste. Zgodnie z [3] tensor Cauchy'ego zapiszemy jako odpowiednio równy:

$$\mathbf{T} = -q\mathbf{1} + \alpha_1 \mathbf{B} + \alpha_{-1} \mathbf{B}^{-1} \quad (10)$$

gdzie dla rozpatrywanego materiału Zahorskiego ($W_i = \partial W / \partial I_i$):

$$\alpha_1 = 2W_1 = 2\mu C_1 + 4\mu C_3 I_1, \quad \alpha_{-1} = -2W_2 = -2\mu C_2 \quad (11)$$

Podstawiając funkcje (11) do równania (10), tensor Cauchy'ego zapiszemy jako równy:

$$\mathbf{T} = -q\mathbf{1} + (2\mu C_1 + 4\mu C_3 I_1) \mathbf{B} - 2\mu C_2 \mathbf{B}^{-1} \quad (12)$$

gdzie q jest nieokreślonym ciśnieniem (dowolną funkcją skalarną).

Zgodnie z (4) tensor naprężenia Pioli – Kirchhoffa będzie odpowiednio równy:

$$\mathbf{T}_R = -q\mathbf{F}^{-T} + (2\mu C_1 + 4\mu C_3 I_1) \mathbf{B}\mathbf{F}^{-T} - 2\mu C_2 \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}^{-T} \quad (13)$$

gdzie
$$I_1 = \mathbf{B}_{(ii)} = B_{11} + B_{22} + B_{33} = r_R^2 + r_Z^2 + \varepsilon^2 + z_R^2 + z_Z^2 \quad (14)$$

Gdy $C_3 = 0$, otrzymujemy wyniki dla materiału Mooneya - Rivlina (patrz [3]). Zgodnie z (13) tensor naprężenia Pioli - Kirchhoffa w materiale Zahorskiego będzie odpowiednio równy:

$$\mathbf{T}_R = \hat{\mathbf{T}}_R + 4\mu C_3 I_1 \begin{bmatrix} r_R & 0 & r_Z \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ z_R & 0 & z_Z \end{bmatrix} \quad (15)$$

gdzie $\hat{\mathbf{T}}_R$ jest tensorem naprężenia Pioli – Kirchhoffa dla deformacji (5) w materiale Mooneya – Rivlina. Zakładamy, że dla założonego ruchu w osiowo symetrycznym cienkim pręcie kołowym, przekroje poprzeczne pręta pozostają płaskie, a normalna do powierzchni przekrojów pokrywa się z osią pręta.

Założenia takie wprowadzono w pracach [2] i [3]. Zgodnie z (5)₁ równanie ruchu w cienkim pręcie ma postać:

$$z = z(Z, t) \quad (16)$$

Z równania (7), przy warunku dla $R = 0$, $r = 0$ (symetria ruchu), otrzymujemy:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{z_z(Z, t)} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon(Z, t) \quad (17)$$

przy czym zachodzi tożsamość:

$$\varepsilon^2 \lambda = 1, \quad \text{gdzie} \quad \lambda = z_z(Z, t) \quad (18)$$

Z tożsamości tej wynika jednoznacznie, że tylko jeden parametr, tj. ε lub λ definiuje deformację pręta, przy czym ε i λ są odpowiednio deformacjami wzdłuż promienia i wzdłuż osi pręta.

Korzystając z procedury uśrednienia równań ruchu, równanie ruchu w kierunku podłużnym pręta przydatne do analizy fal w pręcie wykonanym z materiału Zahorskiego:

$$\begin{aligned} & 2C_1 z_{zz} - \left(2C_1 \varepsilon^4 + 2C_2 \varepsilon^6 - \frac{a^2}{2} C_1 \varepsilon^3 \varepsilon_{zz} + \right. \\ & \left. - \frac{a^2}{2} C_2 (\varepsilon^2 \varepsilon_{zz} + \varepsilon^4 \varepsilon_z^2) + \frac{a^2}{4} \nu_o^{-2} \varepsilon^3 \varepsilon_{zz} \right)_z + \\ & + C_3 \left(-4(2\varepsilon^2 + \lambda^2)(\varepsilon^4 - \lambda) + \right. \\ & \left. + \varepsilon^2(2\varepsilon^2 \varepsilon_z^2 + \varepsilon \varepsilon_{zz}(2\varepsilon^2 + \lambda^2) - 2\lambda^2 \varepsilon_z^2(2\varepsilon^2 \lambda - 1))a^2 + \right. \\ & \left. + 2\varepsilon^3 \varepsilon_z^2 \varepsilon_{zz} a^4 \right)_z = \\ & = \nu_o^{-2} z_{zz} \end{aligned} \quad (19)$$

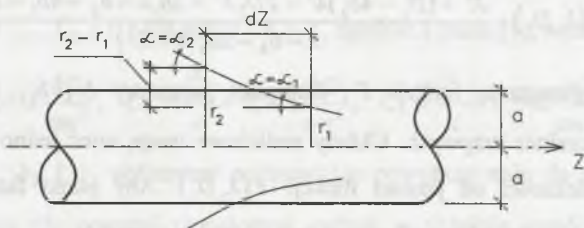
Równanie to wraz z tożsamością (18)₁ stanowi podstawę do dalszej nieliniowej analizy zagadnień dynamicznych w cienkich prętach prostych. Otrzymane równania są zgodne z równaniami wyprowadzonymi w pracy [3] dla materiału Mooneya – Rivlina, w przypadku gdy $C_3 = 0$.

3. Fale biegnące i analiza rozwiązań na płaszczyźnie fazowej

Równanie (19) zawiera nieliniowe człony w wyższych potęgach oraz pochodne trzeciego rzędu i jest bardzo trudne do dyskusji. Z tego powodu rozwiązanie równania (19) ograniczymy do analizy rozwiązań w postaci fal biegnących, tzn. zakładamy, że $z(Z, t)$ i $\varepsilon(Z, t)$ są funkcjami pojedynczego parametru ξ (fazy) zdefiniowanego następująco:

$$\xi = Z - Vt \quad \text{tj.} \quad z(Z, t) = z(\xi), \quad \varepsilon(Z, t) = \varepsilon(\xi) \quad (20)$$

Dla rozpatrywanej w niniejszej pracy propagacji fal biegnących w cienkim pręcie kołowym dokonano aproksymacji przy założeniu małego kąta nachylenia powierzchni bocznej pręta do jego osi (rys.1).



Rys. 1. Pręt kołowy o promieniu a i kącie α nachylenia powierzchni bocznej przy odkształceniu w czasie propagacji fali biegnącej

Fig. 1. Circular rod with radius a and slope angle α of lateral area at deformation during the propagation of travelling wave

Zgodnie z (7) korzystając z założenia, że $T_{rR}|_{R=a} = 0$ (patrz rys.1) zapiszemy, że:

$$r = \varepsilon(Z, t)R = \varepsilon(Z, t)a \quad (21)$$

$$r_1 = \varepsilon_1(Z, t)a, \quad r_2 = \varepsilon_2(Z, t)a$$

zatem:

$$tg\alpha \approx \alpha = \lim_{\Delta Z} \frac{r_2 - r_1}{\Delta Z} = \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\Delta Z} a = \frac{d\varepsilon}{dZ} a = \varepsilon_z a \quad (22)$$

Zakładając, że zachodzi tylko niewielka zmiana w nachyleniu powierzchni bocznej pręta do jego osi otrzymujemy z (22), że:

$$|\varepsilon_z a| \ll 1 \quad (23)$$

Wprowadzając następujące oznaczenia:

$$b_1 = \frac{2C_1}{\nu - 2C_1}, \quad b_2 = \frac{2C_2}{\nu - 2C_1}, \quad b_3 = \frac{2C_3}{\nu - 2C_1}, \quad D_1 = \frac{2d_1}{\nu - 2C_1}, \quad D_2 = \frac{2d_2}{\nu - 2C_1} \quad (24)$$

oraz dla wygody obliczeń transformację $\zeta = (\sqrt{8/a})z(\xi)$, otrzymujemy przybliżoną postać równania (19):

$$\begin{aligned} & -4b_3\lambda_\zeta^4 + (\lambda - b_2 - 2b_3(2 + \lambda^3))\lambda_\zeta^2 = \\ & = \lambda^4 + (D_1 - 4b_3)\lambda^3 - 2D_2\lambda^2 - 2b_1\lambda - b_2 - 4b_3 - b_3\lambda^6 \end{aligned} \quad (25)$$

Z zależności między pochodnymi dla małego kąta nachylenia powierzchni bocznej pręta (por. (23)) wynika, że:

$$\lambda_{\zeta}^4 = \frac{a^4 \lambda_{\varepsilon}^4}{64 \lambda^4} = \frac{a^4}{64 \lambda^4} 16 \lambda^6 \varepsilon_{\zeta}^4 = \frac{\lambda^2}{4} (a \varepsilon_{\zeta})^4 = \frac{\lambda^2}{4} a^4 \varepsilon_z^4 \quad (26)$$

Ponieważ λ_{ζ}^4 jest nieskończenie małą wyższego rzędu mniejszą niż $a \varepsilon_z$ (por. (23)), zatem (25) upraszcza się do postaci:

$$\lambda_{\zeta}^2 = F(\lambda, D_2) = \frac{\lambda^4 + (D_1 - 4b_3)\lambda^3 - 2D_2\lambda^2 - 2b_1\lambda - b_2 - 4b_3 - b_3\lambda^6}{\lambda - b_2 - 2b_3(2 + \lambda^3)} \quad (27)$$

Stała D_2 jest argumentem funkcji F , natomiast parametry b_1 , b_2 , b_3 i D_1 określają jednoznacznie charakter krzywych. Układy nieliniowe mogą mieć jedno lub kilka położeń równowagi w zależności od postaci funkcji $F(\lambda, D_2)$. Aby punkt fazowy był punktem równowagi na płaszczyźnie fazowej, muszą być spełnione warunki:

$$F(\lambda, D_2) = 0, \quad F'(\lambda, D_2) = 0 \quad (28)$$

Spełniając warunek konieczny równowagi (28), zgodnie z (27) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \lambda^4 + (D_1 - 4b_3)\lambda^3 - 2D_2\lambda^2 - 2b_1\lambda - b_2 - 4b_3 - b_3\lambda^6 &= 0 \quad (29) \\ \frac{4\lambda^3 + 3(D_1 - 4b_3)\lambda^2 - 4D_2\lambda - 2b_1 - 6b_3\lambda^5}{\lambda - b_2 - 2b_3(2 + \lambda^3)} + \\ \frac{(\lambda^4 + (D_1 - 4b_3)\lambda^3 - 2D_2\lambda^2 - 2b_1\lambda - b_2 - 4b_3 - b_3\lambda^6)(1 - 6b_3\lambda^2)}{(\lambda - b_2 - 2b_3(2 + \lambda^3))^2} &= 0 \end{aligned}$$

Powyższy układ po przekształceniach sprowadzamy do równania, z którego została wyeliminowana stała D_2 :

$$-4b_3\lambda^6 + 2\lambda^4 + (D_1 - 4b_3)\lambda^3 + 2b_1\lambda + 2b_2 + 8b_3 = 0 \quad (30)$$

Krzywą na płaszczyźnie fazowej otrzymujemy przez wyciągnięcie pierwiastka kwadratowego z funkcji $F(\lambda, D_2)$. Gdy wykres funkcji $F(\lambda, D_2)$ osiąga lokalne maksimum (tj. $F'(\lambda, D_2) = 0$, $F''(\lambda, D_2) < 0$), na osi λ pojawia się punkt centrum, podobnie gdy wykres funkcji $F(\lambda, D_2)$ osiąga lokalne minimum (tj. $F'(\lambda, D_2) = 0$, $F''(\lambda, D_2) > 0$), na osi λ pojawia się punkt siodłowy.

4. Analiza numeryczna dla płaszczyzn fazowych w materiale Zahorskiego

Analizę numeryczną przeprowadzimy dla funkcji $F(\lambda, D_2)$ w oparciu o równanie (27) wyprowadzone dla materiału Zahorskiego.

Stałe D_1 i D_2 określimy zgodnie z (30) i (28)₁. Wynoszą odpowiednio:

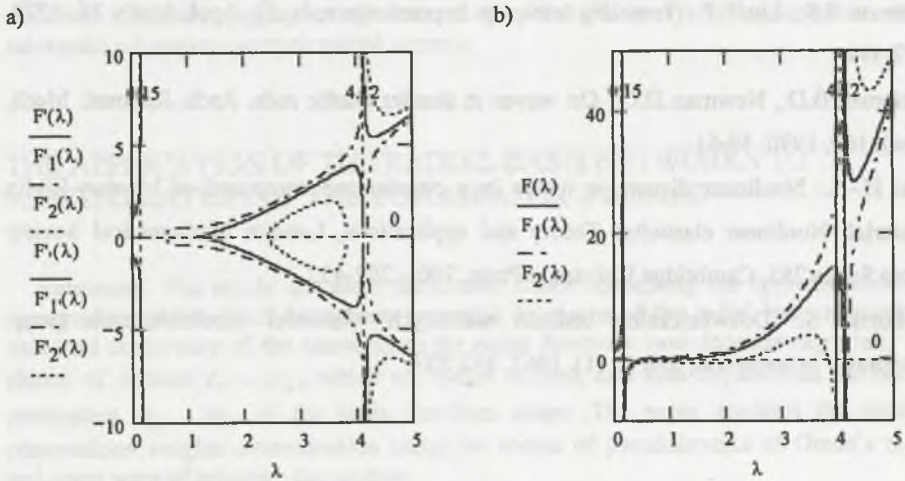
$$D_1(\lambda) = \frac{4b_3\lambda^6 - 2\lambda^4 + 4b_3\lambda^3 - 2b_1\lambda - 2b_2 - 8b_3}{\lambda^3}; \tag{31}$$

$$D_2(\lambda) = \frac{-b_3\lambda^6 + \lambda^4 + (D_1(\lambda) - 4b_3)\lambda^3 - 2b_1\lambda - b_2 - 4b_3}{2\lambda^2}$$

Z warunku (9) stałe C_1 , C_2 i C_3 dla gumy OKA-1, zgodnie z pracą [4], wynoszą:

$$C_1 = \frac{\tilde{C}_1}{\mu} = 0,438 \frac{kG}{cm^2}, \quad C_2 = \frac{\tilde{C}_2}{\mu} = 0,062 \frac{kG}{cm^2}, \quad C_3 = \frac{\tilde{C}_3}{\mu} = 0,048 \frac{kG}{cm^2} \tag{32}$$

natomiast stałe b_1 , b_2 i b_3 obliczymy podstawiając powyższe stałe do (24). Płaszczyzny fazowe sporządzimy dla powyżej określonych stałych w układzie współrzędnych (λ, λ_c) . Poniższy rysunek przedstawia trzy rozkłady funkcji, tj. odpowiednio $F(\lambda) \equiv F(\lambda, D_2)$, $F_1(\lambda) \equiv F_1(\lambda, D_2)$ oraz $F_2(\lambda) \equiv F_2(\lambda, D_2)$ dla stałej D_2 obliczonej zgodnie z (31)₂.



Rys. 2. Wykresy w materiale Zahorskiego, guma OKA-1 ($\mu = 1,46 \text{ kG/cm}^2$, $\rho = 1190 \text{ kg/m}^3$) dla $V = 22,65 \text{ m/s}$ oraz stałych $b_1 = 0,259$, $b_2 = 0,036$, $b_3 = 0,028$, $D_1 = -2,590$, gdy $\lambda = \langle 0;5 \rangle$
 a) trajektorii fazowych dla funkcji $F(\lambda) - D_2 = -1,199$, $F_1(\lambda) - D_2 = -1,3$, $F_2(\lambda) - D_2 = -0,95$,
 b) rozkładów funkcji dla $F(\lambda) - D_2 = -1,199$, $F_1(\lambda) - D_2 = -1,3$, $F_2(\lambda) - D_2 = -0,95$.

Fig. 2. The diagram in Zahorski material, rubber OKA-1 ($\mu = 1,46 \text{ kG/cm}^2$, $\rho = 1190 \text{ kg/m}^3$) for $V = 22,65 \text{ m/s}$ and constants $b_1 = 0,259$, $b_2 = 0,036$, $b_3 = 0,028$, $D_1 = -2,590$ when $\lambda = \langle 0;5 \rangle$
 a) the trajectory in the phase space for functions $F(\lambda) - D_2 = -1,199$, $F_1(\lambda) - D_2 = -1,3$, $F_2(\lambda) - D_2 = -0,95$,
 b) a graph of functions $F(\lambda) - D_2 = -1,199$, $F_1(\lambda) - D_2 = -1,3$, $F_2(\lambda) - D_2 = -0,95$

5. Wnioski

Z rys. 2 wynika, że fizycznie akceptowalny rozkład funkcji mieści się w przedziale $\lambda \in \langle 1, 2; 4, 1 \rangle$. W zależności od prędkości propagacji fal biegnących V otrzymujemy punkt siodłowy poniżej lub powyżej wartości $\lambda = 1$. Zatem, możliwa jest propagacja fal biegnących w cienkim pręcie zarówno przy osiowym rozciągnięciu, jak też osiowym ściśnięciu. Należy przypuszczać, że wyniki uzyskane dla rozpatrywanego w pracy materiału Zahorskiego są bardziej zbliżone do rzeczywistości niż dla materiału Mooneya – Rivlina (por [3]), bowiem w tym przypadku potencjał sprężysty Σ jest nieliniową funkcją niezmienników.

LITERATURA

1. Antman S.S., Liu T.P.: Traveling waves in hyperelastic rods. Q. Appl. Math. 36, 1979, 377-399.
2. Coleman B.D., Newman D.C.: On waves in slender elastic rods. Arch. Rational. Mech. Anal. 109, 1990, 39-61.
3. Dai H.-H.: Nonlinear dispersive waves in a circular rod composed of Mooney-Rivlin material, Nonlinear elasticity: Theory and applications, London Mathematical Society Note Series 283, Cambridge University Press, 2001, 392-432.
4. Zahorski S.: Doświadczalne badania niektórych własności mechanicznych gumy. Rozprawy inżynierskie, tom 10 (1), 1962, 193-207.

Recenzent: Prof. dr hab. Józef Nizioł