

Paulina OBARA*
Politechnika Świętokrzyska

WPLYW BEZWŁADNOŚCI OBROTOWEJ NA ROZKŁAD OBSZARÓW NIESTATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ

Streszczenie. W referacie, który jest kontynuacją referatu wygłoszonego na konferencji w 2003 roku [1], zostały przedstawione obszary rezonansu parametrycznego (niestateczności dynamicznej) pręta krępego poddanego działaniu zmiennej harmonicznie w czasie siły osiowej.

THE ROTATIONAL INTERIA EFFECT ON THE PARAMETRIC RESONANCE AREAS DISTRIBUTION

Summary. When the shear strain and the rotational inertia effect take into consideration, the parametric resonance areas decrease. The effects depend on the slenderness ratio (fig. 2), but for the prismatic rod it is not big. Larger effects could be expected for another applied section (for example – I-section).

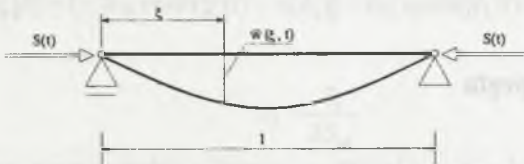
1. Wstęp

Przedmiotem rozważań jest pręt prosty swobodnie podparty (rys. 1) poddany działaniu zmiennej harmonicznie w czasie siły osiowej:

$$S(t) = S_1 \cos \theta t \quad (1)$$

gdzie:

S_1 – amplituda funkcji harmonicznej.



Rys. 1. Pręt swobodnie podparty ściskany siłą osiową zmienną harmonicznie w czasie
Fig. 1. The simple-supported rod compressed by harmonic time-dependent axial force

Pomijając przypadki rezonansu harmonicznego, które teoretycznie mogą wystąpić, jeżeli częstość zmian siły wymuszającej pokryje się z częstością drgań własnych podłużnych pręta, pręt wykonuje podłużne drgania harmoniczne o stałych (a więc nie rosnących w czasie) amplitudach. Ruch taki jest stabilny, a więc rozważany układ (pręt plus harmonicznie zmieniającą się w czasie siła osiowa) jest stateczny w dynamicznym tego słowa znaczeniu. Zachodzi jednak pytanie, czy, podobnie jak pręt ściskany stałą siłą osiową, pręt drgający podłużnie zachowa w każdych warunkach swą prostoliniową postać równowagi dynamicznej. Innymi słowy, czy i w jakich warunkach mogą zostać wzbudzone drgania giętne, o amplitudach prostopadłych do osi pręta i od czego zależy, czy będą to drgania stabilne czy niestabilne. W tym ostatnim przypadku mówimy o niestateczności dynamicznej albo o rezonansie parametrycznym omawianego pręta. Analiza tego zjawiska prowadzi do określenia rezonansowych częstości własnych harmonicznie zmiennej siły osiowej oraz wyznaczenia granic obszarów rezonansu zależnych od intensywności tej siły.

Analizie został poddany pręt krępy (pręt *Timoshenki*) o następujących charakterystykach: E, G – stałe materiałowe, A – pole przekroju, J – moment bezwładności, l – długość pręta, $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$ – zmienna bezwymiarowa, κ – współczynnik zależny od kształtu przekroju, $\mu = \rho A$ – masa równomiernie rozłożona na jednostkę długości, ζ – parametr uwzględniający wpływ odkształcenia postaciowego.

Drgania poprzeczne analizowanego pręta, przy uwzględnieniu odkształcalności postaciowej i bezwładności obrotowej masy równomiernie rozłożonej [1], opisane są cząstkowym równaniem różniczkowym o postaci:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \xi^4} - \chi^4 \zeta \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{n} \right) \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \xi^2 \partial t^2} + \varepsilon^2 \chi^8 \zeta^2 \frac{1}{n} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial t^4} + \varepsilon^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \chi^4 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

gdzie:

$$\sigma^2 = \frac{SI^2}{EJ}; \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{1 - \zeta \sigma^2}; \quad \chi^4 = \frac{\mu l^4}{EJ}; \quad \zeta = \frac{\kappa EJ}{GA l^2}; \quad n = \kappa \frac{E}{G} \quad (3)$$

przy czym

$\tilde{w} = \tilde{w}(\xi, t)$ – funkcja określająca rozkład przemieszczeń wzdłuż osi pręta.

2. Równanie ruchu pręta

Przyjmując rozwiązanie równania (2) w postaci nieskończonego szeregu *Fouriera*, którego każdy wyraz spełnia warunki brzegowe swobodnego podparcia:

$$\tilde{w}(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin(k\pi\xi), \quad k=1,2,\dots \quad (4)$$

uzyskaliśmy równanie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\varepsilon^2 \chi^8 \zeta^2 \frac{1}{n} f_k^{(4)}(t) + \left(\chi^4 \zeta \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{n} \right) k^2 \pi^2 + \varepsilon^2 \chi^4 \right) f_k''(t) + \right. \\ \left. + (k^2 \pi^2 - \varepsilon^2 \sigma^2) k^2 \pi^2 f_k(t) \right] \sin k\pi\xi = 0, \quad k=1,2,\dots \quad (5)$$

które może być spełnione tylko wówczas, gdy zeruje się każdy wyraz szeregu. Otrzymujemy więc nieskończony układ rozseparowanych równań różniczkowych:

$$\varepsilon^2 \chi^8 \zeta^2 \frac{1}{n} f_k^{(4)}(t) + \left(\chi^4 \zeta \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{n} \right) k^2 \pi^2 + \varepsilon^2 \chi^4 \right) f_k''(t) + (k^2 \pi^2 - \varepsilon^2 \sigma^2) k^2 \pi^2 f_k(t) = 0, \\ k=1,2,\dots \quad (6)$$

który po odpowiednich przekształceniach przyjmie postać:

$$f_k^{(4)}(t) + \omega_k^2 \left(\vartheta_k^2 + 1 - \frac{S}{S_{ek}} \right) f_k''(t) + \omega_k^4 \delta_k^2 \left(1 - \frac{S}{S_{ek}} \right) f_k(t) = 0, \quad k=1,2,\dots \quad (7)$$

gdzie:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k^4 \pi^4 EJ}{(k^2 \pi^2 \zeta + 1) \mu l^4}}, \\ S_{ek} = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{(k^2 \pi^2 \zeta + 1) I^2} \quad (8)$$

są odpowiednio częstością drgań własnych i siłą krytyczną pręta krępego swobodnie podpartego, natomiast parametry:

$$\delta_k^2 = \frac{(k^2 \pi^2 \zeta + 1)^2 n}{k^4 \pi^4 \zeta^2}, \quad \vartheta_k^2 = \delta_k^2 + \frac{1}{k^2 \pi^2 \zeta} \quad (9)$$

zależą od charakterystyk przyjętego przekroju.

Podstawiając do (7) wyrażenie (1) otrzymamy układ równań parametrycznych drgań poprzecznych pręta krępego poddanego działaniu zmiennej harmonicznie w czasie siły osiowej:

$$f_k^{(4)}(t) + \omega_k^2 [\vartheta_k^2 + 1 - 2\nu_k \cos \theta t] f_k''(t) + \omega_k^4 \delta_k^2 [1 - 2\nu_k \cos \theta t] f_k(t) = 0, \quad k=1,2,\dots \quad (10)$$

gdzie:

$$\nu_k = \frac{S_t}{2S_{ek}} \quad (11)$$

3. Wyznaczanie obszarów niestateczności metodą bilansu harmoniczych

Na podstawie równania (10) zostaną wyznaczone obszary niestateczności dynamicznej na płaszczyźnie parametrów ν , η , przy czym:

ν – współczynnik pulsacji (wzbudzenia) opisany za pomocą wzoru (11),

η – parametr opisujący stosunek częstości zmian siły wymuszającej θ do częstości drgań własnych belki ω .

(Problem ten dla prętów smukłych został rozpatrzony m. in. w pozycjach [2], [3] oraz [4]).

3.1. Granica pierwszego obszaru niestateczności

W celu wyznaczenia pierwszego obszaru niestateczności funkcję $f(t)$ rozkładamy w szereg Fouriera dla rozwiązania granicznego z okresem $2T$:

$$f(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right) \quad (12)$$

Po przekształceniach i wykorzystaniu odpowiednich wzorów trygonometrycznych formułę (10) możemy zapisać w postaci:

$$\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ C_k \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right) + D_k \nu \cdot \left(a_k \sin \frac{2+k}{2} \theta t - a_k \sin \frac{2-k}{2} \theta t + b_k \cos \frac{2+k}{2} \theta t + b_k \cos \frac{2-k}{2} \theta t \right) \right\} = 0 \quad (13)$$

gdzie:

$$C_k = \left(\frac{k^4}{16} \eta^4 - \frac{k^2}{4} g_k^2 \eta^2 - \frac{k^2}{4} \eta^2 + \delta_k^2 \right), \quad D_k = \left(\frac{k^2}{4} \eta^2 - \delta_k^2 \right), \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (14)$$

Równanie (13) możemy przedstawić również jako kombinację liniową funkcji trygonometrycznych:

$$A_1 \sin \frac{\theta t}{2} + B_1 \cos \frac{\theta t}{2} + A_3 \sin \frac{3\theta t}{2} + B_3 \cos \frac{3\theta t}{2} + A_5 \cos \frac{5\theta t}{2} + \dots = 0 \quad (15)$$

gdzie A_i oraz B_i są to współczynniki powstałe po zbilansowaniu wyrazów przy odpowiednich harmonikach:

$$\begin{aligned} A_1 &= (C_1 a_1 - D_1 \nu a_1 + D_3 \nu a_3) & B_1 &= (C_1 b_1 + D_1 \nu b_1 + D_3 \nu b_3) \\ A_3 &= (D_1 \nu a_1 + C_3 a_3 + D_5 \nu a_5) & B_3 &= (D_1 \nu b_1 + C_3 b_3 + D_5 \nu b_5) \\ A_5 &= (D_3 \nu a_3 + C_5 a_5 + D_7 \nu a_7) & B_5 &= (D_3 \nu b_3 + C_5 b_5 + D_7 \nu b_7) \end{aligned} \quad (16)$$

Równanie (15) będzie spełnione dla każdego t , pod warunkiem że:

$$A_1 = B_1 = A_3 = B_3 = A_5 = \dots = 0 \quad (17)$$

co prowadzi do powstania dwóch nieskończonych układów liniowych równań jednorodnych, które są rozseparowane ze względu na współczynniki a_i oraz b_i , przy czym budowa tych układów jest identyczna z wyjątkiem pierwszych równań każdej grupy.

Warunek istnienia niezerowych rozwiązań prowadzi do zerowania się nieskończonego wyznacznika o postaci:

$$\begin{vmatrix} (C_1 + D_1\nu) & D_3\nu & 0 & 0 \\ D_1\nu & C_3 & D_5\nu & 0 \\ 0 & D_3\nu & C_5 & D_7\nu \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

W celu wyznaczenia granic pierwszego obszaru niestateczności wystarczające jest rozpatrzenie wyznacznika pierwszego stopnia:

$$C_1 \mp D_1\nu = 0 \quad (19)$$

co po wykorzystaniu zależności (14) dla $k=1$ i wykonaniu odpowiednich przekształceń prowadzi do równania dwukwadratowego:

$$\eta^4 - 4(\mathcal{G}_1^2 + (1 \pm \nu))\eta^2 + 16\delta_1^2(1 \pm \nu) = 0 \quad (20)$$

które będzie miało dwa rozwiązania:

$$\begin{aligned} \eta_1^2 &= 2 \left[\mathcal{G}_1^2 + (1 \pm \nu) + \sqrt{(\mathcal{G}_1^2 - (1 \pm \nu))^2 + 4a_1(1 \pm \nu)} \right] \\ \eta_2^2 &= 2 \left[\mathcal{G}_1^2 + (1 \pm \nu) - \sqrt{(\mathcal{G}_1^2 - (1 \pm \nu))^2 + 4a_1(1 \pm \nu)} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie:

$$a_k = \frac{1}{k^2 \pi^2 \zeta} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\pi^2 \zeta} \quad (22)$$

Występujące w powyższych zapisach wielkości \mathcal{G}_k , δ_k i a_k zależą od parametru ζ , który uwzględnia wpływ odkształcenia postaciowego, oraz od parametru $n = \kappa E / G$, gdzie współczynnik κ zależy od kształtu przekroju. Jeżeli więc będziemy rozpatrywać zagadnienie w obrębie jednego materiału i takiego samego kształtu przekroju, wówczas możemy przyjąć, że $n = \text{const}$, dzięki czemu równanie (20) będzie związkiem trzech parametrów η , ν oraz ζ . Korzystając więc z rozwiązań (21) dla przyjętego ζ , możemy wyznaczyć granice pierwszego obszaru niestateczności na płaszczyźnie parametrów η , ν (rys. 2).

3.2. Granica trzeciego obszaru niestateczności

Analiza wyznacznika (18) pozwala również skonstruować granice trzeciego obszaru niestateczności. W tym celu niezbędne jest rozpatrzenie wyznacznika co najmniej drugiego stopnia:

$$\begin{vmatrix} (C_1 \mp D_1 \nu) & D_2 \nu \\ D_1 \nu & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

Granice trzeciego obszaru można wyznaczyć, stosując metodę iteracyjną, z uwagi jednak na dość złożony zapis otrzymanego w ten sposób wyniku posłużono się programem *Mathematica*. W ten sposób zostały wyznaczone granice zarówno pierwszego, jak i trzeciego obszaru rezonansu parametrycznego (rys. 2).

3.3. Granica drugiego obszaru niestateczności

W celu wyznaczenia obszarów niestateczności ograniczonych rozwiązaniami z okresem T (II obszar), funkcję rozwiązującą rozwiniemy w szereg *Fouriera*:

$$f(t) = b_0 + \sum_{k=2,4,6,\dots} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right) \quad (24)$$

i dokonując bilansu harmoniczných, po odpowiednich przekształceniach, otrzymamy nieskończony układ liniowych równań jednorodnych:

$$\begin{aligned} (C_2 a_2 + D_3 \nu a_4) &= 0 \\ D_{k-2} \nu a_{k-2} + C_k a_k + D_{k+2} \nu a_{k+2} &= 0, \quad k = 2, 4, \dots \\ b_0 \delta_k^2 + D_2 b_2 &= 0 \\ -2b_0 \delta_k^2 \nu + C_2 b_2 + D_4 \nu b_4 &= 0 \\ (C_2 b_2 + D_4 \nu b_4 + D_6 \nu b_6) &= 0 \\ D_{k-2} \nu b_{k-2} + C_k b_k + D_{k+2} \nu b_{k+2} &= 0, \quad k = 2, 4, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

który rozpada się na dwa układy niezależne, rozseparowane ze względu na współczynniki a_i oraz b_i . Nietrywialne rozwiązania tych układów równań otrzymamy przyrównując do zera wyznaczniki o nieskończonych wymiarach. Rozwiązania te tworzą dwie gałęzie, ograniczające drugi obszar niestateczności. W tym celu niezbędne jest rozpatrzenie, w obydwu przypadkach, wyznacznika co najmniej drugiego stopnia, skąd dostaniemy:

$$\begin{aligned} C_2 C_4 - D_2 D_4 \nu^2 &= 0 \\ \delta_k^2 (C_2 + 2D_2 \nu^2) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

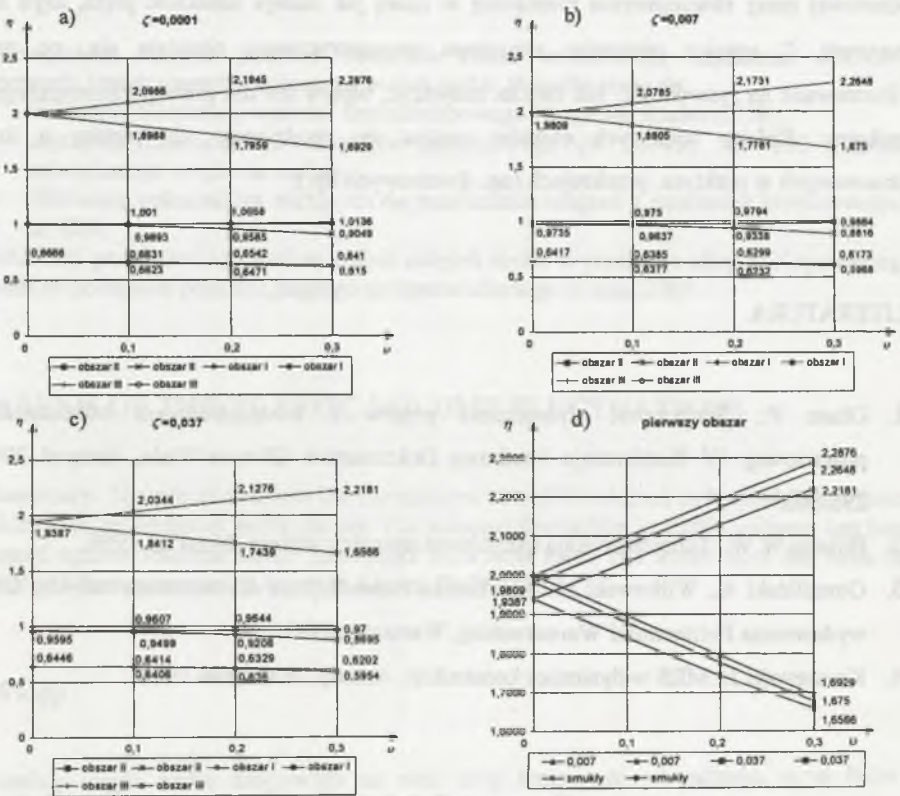
Rozwiązania graniczne przy $\nu \rightarrow 0$ w tym obszarze zbieżają do granicy otrzymanej z przyrównania $C_2 = 0$, skąd po wykorzystaniu zależności (14) dla $k=2$ uzyskujemy równanie:

$$\eta^4 - (g_2^2 + 1)\eta^2 + \delta_2^2 = 0 \tag{27}$$

które będzie miało zawsze dwa pierwiastki:

$$\eta_1^2 = \frac{1}{2} \left[g_2^2 + 1 + \sqrt{(g_2^2 - 1)^2 + 4a_2} \right], \quad \eta_2^2 = \frac{1}{2} \left[g_2^2 + 1 - \sqrt{(g_2^2 - 1)^2 + 4a_2} \right] \tag{28}$$

Dla $\nu \neq 0$ przy zadanym parametrze ζ , równania (26) zostały rozwiązane programem *Mathematica*.



Rys. 2. Obszary rezonansu parametrycznego dla: a) $\zeta=0,0001$, b) $\zeta=0,007$, c) $\zeta=0,037$, d) granice pierwszego obszaru dla trzech przypadków

Fig. 2. The parametric resonance areas for: a) $\zeta=0,0001$, b) $\zeta=0,007$, c) $\zeta=0,037$, d) the first resonance area for three cases

Na rysunkach 2 a,b,c zostały przedstawione trzy pierwsze obszary rezonansu parametrycznego dla: $\zeta = 0,001$, co odpowiada prętotwi smukłemu, dla $\zeta = 0,007$ oraz dla

$\zeta=0,037$. W obliczeniach przyjęto następujące dane liczbowe: $E=253 \cdot 10^5$ [kN/m²], $J=2250 \cdot 10^{-4}$ [m⁴], $A=1200 \cdot 10^{-4}$ [m²], $\kappa=1,2$ (przekrój prostokątny) oraz $l=9$ [m] ($\zeta=0,007$) i $l=4$ [m] ($\zeta=0,037$).

4. Wnioski

W przypadku uwzględnienia wpływu odkształcalności postaciowej i bezwładności obrotowej masy równomiernie rozłożonej w miarę jak maleje smukłość pręta, czyli rośnie parametr ζ , granice obszarów rezonansu parametrycznego obniżają się, co zostało zilustrowane na *rysunku 2d*. Jak można zauważyć, wpływ ten dla pręta pryzmatycznego jest znikomy. Daleko większych efektów można się spodziewać dla prętów o innych, stosowanych w praktyce, przekrojach (np. dwuteowych itp.).

LITERATURA

1. Obara P.: Stateczność dynamiczna prętów z uwzględnieniem odkształcalności postaciowej. IV Konferencja Naukowa Doktorantów Gliwice-Wisła, listopad 2003, s. 295-302.
2. Bołotin W.W.: Dinamiczeskaja ustojciwost uprugich sistem. Moskwa 1956.
3. Gomuliński A., Witkowski M.: Mechanika budowli (kurs dla zaawansowanych). Oficyna wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993.
4. Kruszewski J.: MES w dynamice konstrukcji. Arkady, Warszawa 1984.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Gołaś, prof ATR w Bydgoszczy