ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004
Seria: BUDOWNICTWO z. 102 Nr kol. 1644

Przemysław RUCHAŁA*
Politechnika Krakowska

ZASTOSOWANIE FALKI MORLETA DO WYZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW TŁUMIENIA

Streszczenie. W artykule rozważane jest zagadnienie obliczania współczynników tłumienia przy zastosowaniu ciągłej transformaty falkowej. Jako funkcje falkowe przyjęto zespolone funkcje Morleta, które umożliwiają wykonanie obwiedni wartości amplitudy przemieszczeń. Obwiednia ta pozwala na łatwe śledzenie spadku amplitud drgań, a przez co obliczanie współczynnika tłumienia. Na przykładzie układu o dwóch stopniach swobody przedstawiono sposób obliczeń i zalety takiego podejścia.

APPLICATION OF MORLET WAVELET TO IDENTIFICATION COEFFICIENT OF DAMPING

Summary. The paper deals with calculation of damping coefficients using a continuous wavelet transform based on the Morlet wavelet function. This function enables making the envelope value of displacement amplitude. The envelope makes possible tracking the change in displacement amplitude and estimating the damping coefficient. The advantage of this technique is confirmed by applying it to two-degree-of-freedom systems.

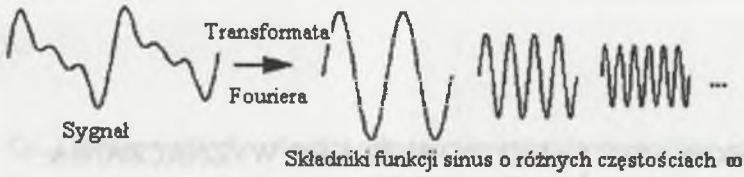
1. Ciągła transformata falkowa

W transformacie Fouriera funkcji $x(t)$ funkcje bazowe to $e^{-j\omega t}$ z parametrem ω. Transformata jest określona za pomocą wzoru:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt . \tag{1}$$

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Bogumił Wrana, prof. Pol. Krakowskiej

W wyniku transformaty otrzymamy funkcję $F(\omega)$ współczynników Fouriera. Poszczególne wartości ω wstawiane są do sumy składników $\sin(\omega t)$. Graficzną interpretację rozkładu sygnału $x(t)$ na sumę składników $\sin(\omega t)$ przedstawiono na rysunku 1.



Rys.1. Transformata Fouriera, dekompozycja sygnału na składniki $\sin(\omega t)$
Fig. 1. Fourier transform, decomposition of signal into $\sin(\omega t)$ components

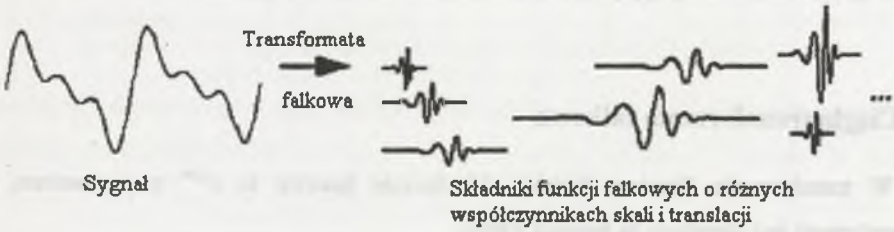
Ciągła Transformata Falkowa (ang. Continuous Wavelet Transformation – CTF) funkcji $x(t)$ stosuje bazę ortogonalnych funkcji falkowych ψ z parametrami skali i translacji, a określona jest za pomocą wzoru:

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \psi(a, b, t)\, dt \tag{2}$$

gdzie:

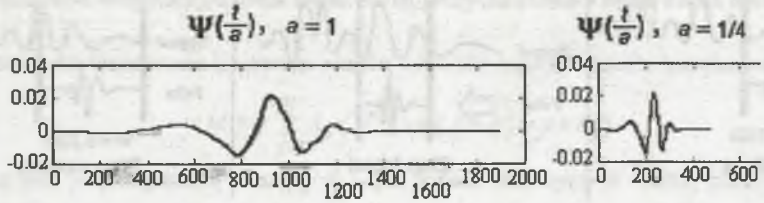
a - współczynnik skali, b - współczynnik translacji.

W wyniku transformaty CWT otrzymamy funkcję $W(a,b)$ współczynników falkowych. Graficzną interpretację rozkładu sygnału $x(t)$ na sumę składników funkcji falkowych przedstawiono na rysunku 2.



Rys.2. Transformata falkowa, dekompozycja sygnału na składniki funkcji falkowych
Fig. 2. The wavelet traansform, decomposition of signal into wavelets components

Na rysunku 3 przedstawiono graficznie wpływ współczynnika skali a na funkcję falkową. Współczynnik a rozciąga lub zawęża funkcję falkową.

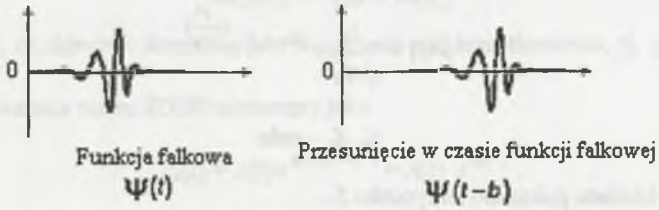


Rys.3. Wpływ współczynnika skali a na funkcję falkową ψ
Rys.3. Influence scale parameter a on wavelet function ψ

Zauważymy, że współczynnik skali a jest odwrotnie proporcjonalny do częstości ω. Ogólny związek między współczynnikiem skali a częstością można opisać następująco:

- niska wartość a → dolna skala → falka zawężona → opisuje szybkie zmiany → wysoka częstość ω,
- wysoka wartość a → górna skala → falka rozciągnięta → opisuje wolne zmiany → niska częstość ω.

Współczynnik translacji b to przesunięcie f. falkowej na osi czasu o wartość b (por. rys. 4)



Rys.4. Wpływ współczynnika translacji b na funkcję falkową ψ
Fig. 4. Influence of translation parameter b on wavelet function ψ

Algorytm obliczeń transformaty falkowej składa się z pięciu etapów:

0) Wybór typu funkcji falkowej (funkcji 'matki').
1) Ustawienie funkcji falkowej i sygnału w położeniu początkowego czasu.
2) Obliczenie współczynnika $W(a, b)$ przy a=1, b=0. Większa wartość współczynnika $W(a,b)$ oznacza większe podobieństwo funkcji falkowej i sygnału.
3) Przesunięcie funkcji falkowej w prawo, tj. zwiększenie wartości współczynnika b. Powtórzenie kroków 1) i 2) aż do końca całego przedziału czasu sygnału $x(t)$.
4) Zwiększenie współczynnika skali a i powtórzenie punktów 1) do 3).
5) Powtórzenie punktów 1) do 4) dla wszystkich współczynników skali a.

Rys. 5. Etapy obliczania transformaty falkowej
Fig. 5. Computing steps of wavelet transform

Nazwa ciągła transformata falkowa jest tu rozumiana jako możliwość wykonywania obliczeń dla wszystkich wartości współczynnika skali oraz dla każdego współczynnika translacji.

2. Zespolona falka Morleta

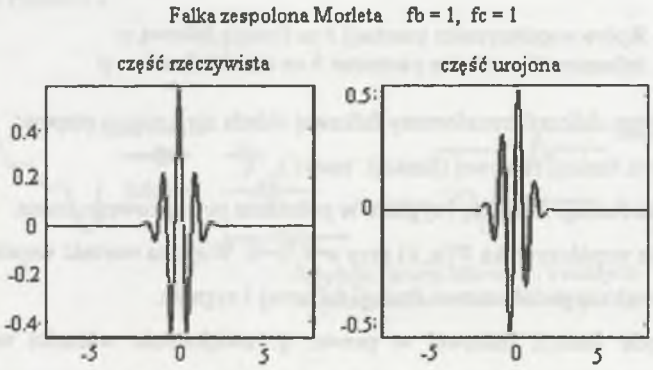
Falka Morleta to funkcja bazowa postaci:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi f_b}} e^{(i2\pi f_c t)} e^{(-\frac{t^2}{f_b})} \tag{3}$$

gdzie:

f_b, f_c – stałe

Przykład falki Morleta pokazano na rysunku 5.



Rys. 6. Zespolona falka Morleta dla f_b=1, f_c =1
Fig. 6. Complex Morlet Wavelets for f_b=1, f_c =1

3. Obliczanie współczynnika tłumienia przy zastosowaniu falki Morleta

Odpowiedź dynamiczna liniowego układu o N DOF na wymuszenie impulsowe wynosi:

$$h(t) = \sum_{j=1}^{N} A_j e^{-\xi_j \omega_j t} \cos(\sqrt{1-\xi_j^2}\,\omega_j t + \theta_j) \tag{4}$$

gdzie ω_j jest j-tą częstością własną, θ_j j-tym kątem fazowym, N liczbą postaci własnych uwzględnionych w analizie, A_j jest amplitudą, a ξ_j jest współczynnikiem tłumienia krytycznego. W równaniu (4) wartości A_j, ζ_j, θ_j są niezmienne w czasie.

Równanie (4) składa się:

a) ze składnika oscylującego w postaci funkcji

$$\cos(\sqrt{1-\zeta_j^2}\,\omega_j t + \theta_j)$$

b) z wykładniczego spadku amplitudy w czasie

$$A_j(t) = A_j e^{-\xi_j \omega_j t} \tag{5}$$

c) ze zmiany kąta w czasie

$$\theta_j(t) = \sqrt{1-\xi_j^2}\,\omega_j t + \theta_j \tag{6}$$

Dla układu liniowego współczynnik tłumienia ξ jest określony jako nachylenie funkcji A(t) w skali logarytmicznej. Logarytmując obie strony równania (5) dla każdego j, otrzymamy

$$ln(A(t)) = -\,\xi\omega t + ln(A_o) \tag{7}$$

Jeśli założymy, że składnik tłumienia jest w zakresie niskiego tłumienia, tj. $(\frac{c}{2m})^2 < \frac{k}{m}$, to rozwiązanie równania ruchu SDOF zapiszemy jako

$$Z_x(t) = A(t)\, e^{\pm i\omega\sqrt{1-\zeta^2}\,t} = A(t)\; e^{i\phi(t)} \tag{8}$$

Transformatę falkową równania (8) przy zastosowaniu falki Morleta możemy przybliżyć pisząc

$$(W_\psi x)(a,\, b) \approx A(b)\,\psi^*(a\dot{\phi}(b))\; e^{i\phi(b)} + O(|\dot{A}|, |\ddot{\phi}|) \tag{9}$$

Moduł transformaty wynosi

$$|(W_\psi x)(a,\, b)| \approx A(b)\; |\,\psi^*(a\dot{\phi}(b))\,| \tag{10}$$

W przypadku liniowego tłumienia wiskotycznego tłumienia zapisanego równaniem (5) moduł transformaty wynosi

$$|(W_\psi x)(a,\, b)| \approx A_o\; e^{-\xi\omega_n b}\; |\,\psi^*(\pm\, i\, a_o\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,)| \tag{11}$$

gdzie a_o jest współczynnikiem skali odpowiadającym częstości ω_n.

Wprowadzając skalę logarytmiczną, równanie (11) zapiszemy

$$ln|(W_\psi x)(a,\, b)| \approx -\,\xi\omega_n b + ln\,(A_o\; |\,\psi^*(\pm\, i\, a_o\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,)| \tag{12}$$

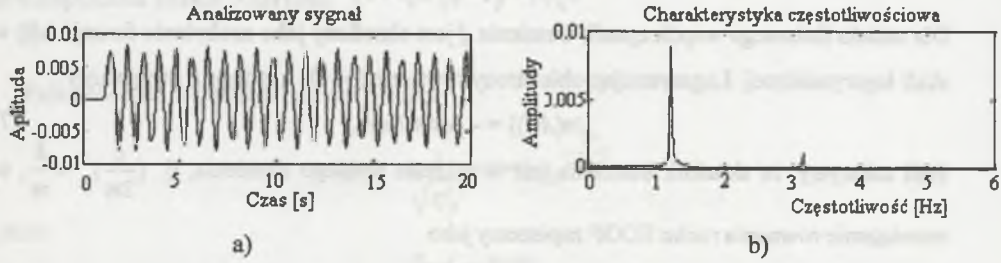
Z równania (12) wynika, że współczynnik tłumienia ξ można wyznaczyć z nachylenia linii na wykresie $ln|(W_\psi x)(a, b)|$ (w skali logarytmicznej) dla współczynnika skali a_o odpowiadającemu częstości ω_n.

4. Przykład

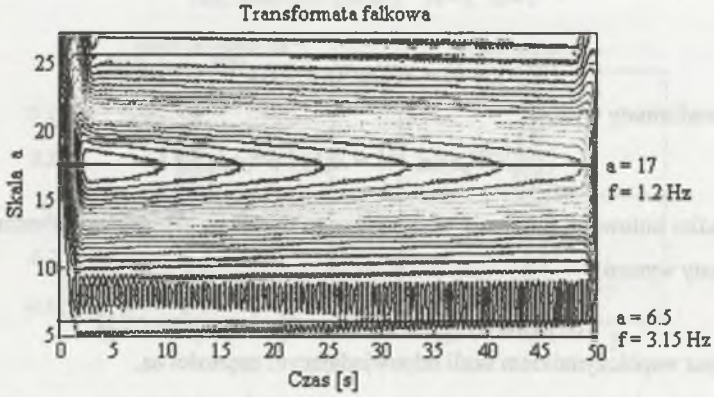
Rozważany jest układ o dwóch stopniach swobody. Równanie ruchu zapisano jako:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\{\ddot{x}(t)\} - \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}\{\dot{x}(t)\} + \begin{bmatrix} 300 & -300 \\ -300 & 600 \end{bmatrix}\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} \delta(t = 0.97) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

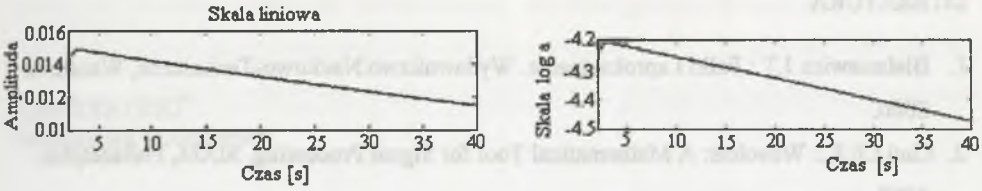
Obciążenie w czasie jest w postaci impulsu jednostkowego w chwili t=0.97 s przyłożonego w pierwszym stopniu swobody. Częstotliwości własne układu wynoszą: f_1=1.2Hz oraz f_2=3.15Hz. Na poniższych rysunkach przedstawiono rozwiązanie $x(t)$ i jego analizę.



Rys. 7. Sygnał: a) przebieg w czasie, b) charakterystyka częstotliwościowa
Fig. 7. Signal: a) in time, b) frequency characteristic



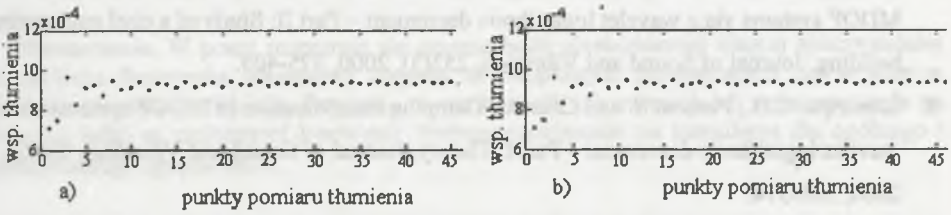
Rys. 8. Mapa falkowa przebiegu $x(t)$ przy zastosowaniu falki Morleta
Fig. 8. Wavelet tranform for the signal $x(t)$, using Morlet Wavelets



a) b)

Rys. 9. Obwiednia amplitud dla pierwszej częstotliwości własnej: a) przekrój przy liniowej skali współczynnika a, b) przekrój przy skali logarytmicznej współczynnika a

Fig. 9. The envelope amplitude for first eigenfrequency: a) section for a linear scale plot b) section for a logarithmic scale plot



Rys. 10. Wykresy współczynnika tłumienia krytycznego ξ wyznaczane dwoma sposobami,

$$\text{a) } \xi = \frac{\bar{\delta}_m}{2\pi \cdot m}, \bar{\delta}_m = \ln\left(\left|\frac{x_n}{x_{n+m}}\right|\right), \quad \text{b) } \xi = \frac{\delta_m}{2\pi \cdot m}, \ \delta_m = \ln\left(\left|\frac{W_{\psi x}(a,b_n)}{W_{\psi x}(a,b_{n+m})}\right|\right)$$

Fig. 10. Plots of damping ratio ξ calculated by two methods

5. Podsumowanie

W artykule przedstawiono nowy sposób wyznaczania współczynnika tłumienia krytycznego ξ przy zastosowaniu zespolonej transformaty falkowej. Do obliczeń wybrano zespoloną funkcję falkową Morleta.

Na rysunku 9 pokazano, że wyniki uzyskane przy zastosowaniu transformaty falkowej w postaci wzoru

$$\xi = \frac{\delta_m}{2\pi \cdot m}, \quad \delta_m = \ln\left(\left|\frac{W_{\psi x}(a,b_n)}{W_{\psi x}(a,b_{n+m})}\right|\right)$$

odpowiadają wynikom uzyskanym w sposób klasyczny

$$\xi = \frac{\bar{\delta}_m}{2\pi \cdot m}, \quad \bar{\delta}_m = \ln\left(\left|\frac{x_n}{x_{n+m}}\right|\right)$$

gdzie:

δ - logarytmiczny dekrement tłumienia.

LITERATURA

1. Białasiewicz J.T.: Falki i aproksymacje. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2000.
2. Chui Ch.K.: Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Processing. SIAM, Philadelphia 1997.
3. Daubechies I. : Ten Lectures on Wavelets. Society for Industrial & Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992.
4. Hans S., Ibraime E., Pernost S., Boutin C. and Lamarque C.H.: Damping identification in MDOF systems via a wavelet logarithmic decrement – Part II: Study of a civil engineering building, Journal of Sound and Vibration, 253(3), 2000, 375-403.
5. Lamarque C.H., Pernost S. and Cuer A.: Damping identyfication in MDOF systems via a wavelet logarithmic decrement – Part I: Theory, Journal of Sound and Vibration, 235(3), 2000, 361-374.
6. MatLab, The Language of Technical Computing, version 6.5.0 Release 13, The MathWorks Inc,2002.
7. Primer A. and coorkers: Introduction to Walvelets and Wavelet Transforms, Prentice Hall, 1998.
8. Staszewski W.J.: Wavelets for Mechanical and Structural Damage Identification, Monograph Series: Studia i Materiały, No 510/1469/2000, Gdańsk, Polish Academy of Science Press, 2000.
9. Williams J.R. and Amaratunga K.: Introduction to wavelets in engineering, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, 1994, 2365-2388.
10. Worden K. and Tomlinson G.R.: Nonlinearity in Engineering Structures, The Institute of Physic, London, UK,2000.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Edward Maciąg