ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004
Seria: BUDOWNICTWO z.102 Nr kol. 1644

Artur RYSTWEJ*
Politechnika Wrocławska

STOCHASTYCZNA DYNAMIKA BELKI NA PODŁOŻU PASTERNAKA

Streszczenie. W pracy rozpatruje się drgania belki nieskończenie długiej spoczywajacej na podłożu Pasternaka obciążonej ciągiem sił skupionych poruszających się w jednym kierunku ze stałą prędkością. Przyjęto, że wartości sił, jak również ich rozmieszczenie na długości belki są zmiennymi losowymi. Podano rozwiązanie na kumulantę dla ogólnego i maksymalnego ugięcia belki.

STOCHASTIC DYNAMICS OF A BEAM ON THE PASTERNAK FOUNDATION

Summary. The paper presents an infinite beam resting on a Pasternak foundation is subject to vibration under a series of concentrated forces moving at a constant velocity. The force values and their spacing along the beam are assumed to be random variables. The solution for the n-th order cumulant of the general and maximum beam deflection is given.

1. Wstęp

W konstrukcjach inżynierskich związanych z budownictwem komunikacyjnym istotnym zjawiskiem, ze względów zarówno wytrzymałościowych, jak i eksploatacyjnych, są drgania wywołane poruszającym się obciążeniem. Bogaty przegląd literatury obejmującej tę problematykę stanowi monografia Fryby [1]. Z wczesnych prac podejmujących w kategoriach probabilistycznych problem drgań konstrukcji wywołanych ruchomym obciążeniem można wymienić [2], w której rozpatrywano drgania belki nieskończenie długiej obciążonej siłą skupioną opisaną procesem stochastycznym, a także [3], gdzie analizowano drgania mostów poddanych działaniu ruchu drogowego.

W niniejszej pracy rozpatruje się drgania belki nieskończenie długiej spoczywającej na dwuparametrowym podłożu i obciążonej nieskończonym ciągiem sił skupionych poruszających się w jednym kierunku ze stałą prędkością. Uwzględniając losowość wartości,

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Paweł Śniady

jak i rozmieszczenia sił na długości belki, przedstawiono rozwiązania dla n-tej kumulanty ugięcia belki, przy czym rozpatrzono przypadek drgań maksymalnych i ogólnych. Otrzymane rozwiązania mogą być wykorzystane m.in. w analizie drgań nawierzchni drogowej.

2. Przyjęcie założeń i wyprowadzenie wzorów

Równanie opisujące drgania nieskończenie długiej belki na podłożu dwuparametrowym typu Pasternaka jest postaci [7]:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+k_o\cdot w(x,t)-k_1\cdot\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=F(x,t) \tag{1}$$

gdzie EI oznacza sztywność belki na zginanie, k_o stałą sprężystości podłoża, k_1 stałą sztywności na ścinanie podłoża, m masę jednostkową belki, $w(x,t)$ przemieszczenie pionowe belki oraz $F(x,t)$ obciążenie.

Niech obciążenie będzie stacjonarnym procesem stochastycznym. Rozważamy ciąg sił poruszających się ze stałą prędkością w losowo określonych odległościach. Poszczególne siły A_i $(i = -\infty, ...-1, 0, 1, ..., \infty)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych charakterystykach probabilistycznych $E[A_i^n] = E[A^n] = const.$

Wprowadźmy funkcję $\lambda(x,t)$ oznaczającą intensywność rozkładu sił, a więc wartość oczekiwaną liczby sił na jednostkę długości w punkcie x i chwili t. Równanie ciągłości przedstawione poniżej określa, że zmiana liczby pojazdów na odcinku dx w przedziale czasu dt musi być równa różnicy pojazdów wjeżdżających do przedziału dx w punkcie x i wyjeżdżających w punkcie $x+dx$ [5]:

$$\frac{\partial\lambda(x,t)}{\partial t}+v\cdot\frac{\partial\lambda(x,t)}{\partial x}=0 \tag{2}$$

Równanie (2) będzie spełnione wówczas, gdy funkcja $\lambda(x,t)$ posiada następującą właściwość:

$$\lambda(x,t)=\lambda(x-vt) \tag{3}$$

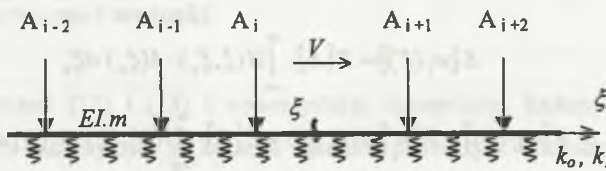
Przyjmijmy wobec powyższego ruchomy układ współrzędnych określony nową zmienną:

$$\xi=x-vt \tag{4}$$

Przyjęty rozkład sił na odcinku o długości $d\xi$ jest rozkładem Poissona [4]. Jeśli za $dN(\xi)$ przyjąć liczbę sił w przedziale $(\xi\ ,\ \xi+d\xi)$, to prawdziwe dla przyjętego rozkładu są zależności podane niżej:

$$E\left[dN^k(\xi)\right] = \lambda(\xi)\, d\xi \qquad dla \quad k = 1,2...$$
$$E\left[dN(\xi_1)\cdot dN(\xi_2)\right] = \lambda(\xi_1)\cdot\lambda(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \qquad dla \quad \xi_1 \neq \xi_2 \tag{5}$$

Niech $H(\xi,\xi_o)$ oznacza dynamiczną funkcję wpływu, tzn. przemieszczenie ustalone belki w punkcie ξ od poruszającej się ze stałą prędkością siły jednostkowej znajdującej się w punkcie ξ_o. Rozważmy dwie możliwe sytuacje, jakie mogą mieć miejsce w analizowanym zagadnieniu. W pierwszym przypadku przekrój, w którym liczymy ugięcie belki, określony jest w dowolnie wybranym miejscu o współrzędnej ξ (rys.1).

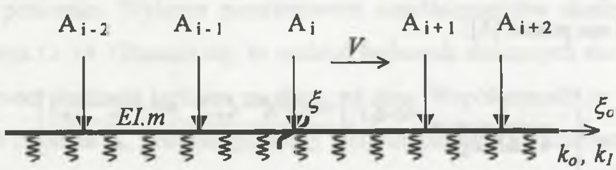


Rys. 1. Schemat dla pierwszej sytuacji zdarzeń
Fig. 1. The plan of the first case

Ponieważ nie znamy położenia żadnej z sił A_n , stąd ugięcie belki w powyższej sytuacji w miejscu ξ określone będzie za pomocą wzoru:

$$w_I(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi_o)\cdot H(\xi,\xi_o)\, dN(\xi_o) \tag{6}$$

Faktem jest natomiast, że nastąpi taka chwila, w której w interesującym nas przekroju pojawi się jedna z sił A_n. Mimo że nie jesteśmy w stanie określić, kiedy dokładnie taka sytuacja będzie miała miejsce, to jednak można stwierdzić, że z punktu widzenia probabilistycznego jest to zdarzenie pewne. Co więcej, dla drgań ustalonych, z którymi mamy tutaj do czynienia, pojawienie się jednej z sił w analizowanym przekroju jest równoznaczne z osiągnięciem przez funkcję ugięcia wartości ekstremalnej. Przyjmijmy wobec tego, że w drugim przypadku przekrój ξ, w którym liczymy ugięcie, znajduje się pod jedną z sił (rys.2).



Rys. 2. Schemat dla drugiej sytuacji zdarzeń
Fig. 2. The plan of the second case

Ponieważ w tej sytuacji położenie jednej z sił jest dokładnie i ściśle określone, więc dla całego ich zbioru A_n wzór (6), określający ugięcie belki w przekroju ξ, ulegnie modyfikacji i przyjmie następującą formę:

$$w_{II}(\xi) = A(\xi) \cdot H(\xi,\xi) + \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi_o) \cdot H(\xi,\xi_o)\, dN(\xi_o) \tag{7}$$

Należy podkreślić, że ponieważ obciążenie belki jest wielkością losową, stąd wyrażenie dane wzorami (6) oraz (7) jest również zmienną losową, której wartość oczekiwana po wykorzystaniu zależności (5) wynosi odpowiednio:

$$E[w_I(\xi)] = E[A] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi,\xi_o) \cdot \lambda(\xi_o)\, d\xi_o \tag{8}$$

$$E[w_{II}(\xi)] = E[A] \cdot H(\xi,\xi) + E[A] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi,\xi_o) \cdot \lambda(\xi_o)\, d\xi_o \tag{9}$$

natomiast wariancja:

$$\sigma^2[w_I(\xi)] = E[A^2] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H^2(\xi,\xi_o) \cdot \lambda(\xi_o)\, d\xi_o \tag{10}$$

$$\sigma^2[w_{II}(\xi)] = \sigma_A^2 \cdot H^2(\xi,\xi) + E[A^2] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H^2(\xi,\xi_o) \cdot \lambda(\xi_o)\, d\xi_o \tag{11}$$

Wartość oczekiwana oraz wariancja są kumulantami odpowiednio I i II rzędu. W ogólnym przypadku kumulantę zmiennej losowej $w_I(\xi)$ oraz $w_{II}(\xi)$ rzędu n zapisujemy odpowiednio:

$$\kappa_n(w_I,\xi) = E[A^n] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H^n(\xi,\xi_o) \cdot \lambda(\xi_o)\, d\xi_o \tag{12}$$

$$\kappa_n(w_{II},\xi) = \kappa_n^A \cdot H^n(\xi,\xi) + E[A^n] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H^n(\xi,\xi_o) \cdot \lambda(\xi_o)\, d\xi_o \tag{13}$$

gdzie wielkość $\kappa_n{}^A$ oznacza kumulantę rzędu n zmiennej losowej A_i.

Pojawiająca się we wzorach dynamiczna funkcja wpływu $H(\xi,\xi_o)$ dla belki opisanej równaniem (1) ma postać [6]:

$$H(\xi,\xi_o) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{EI \cdot k_o}} \cdot e^{\alpha(\xi-\xi_o)} \cdot \left[\dfrac{\cos\delta(\xi-\xi_o)}{\alpha} - \dfrac{\sin\delta(\xi-\xi_o)}{\delta} \right] & dla\, \xi \le \xi_o \\ \dfrac{1}{4\sqrt{EI \cdot k_o}} \cdot e^{-\alpha(\xi-\xi_o)} \cdot \left[\dfrac{\cos\delta(\xi-\xi_o)}{\alpha} + \dfrac{\sin\delta(\xi-\xi_o)}{\delta} \right] & dla\, \xi \ge \xi_o \end{cases} \tag{14}$$

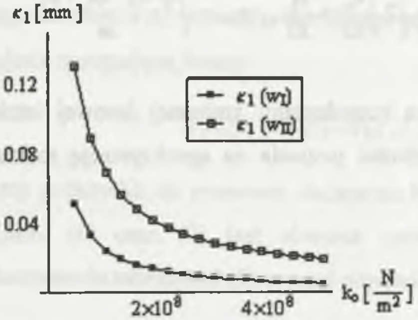
gdzie

$$\alpha = \frac{a}{2}\sqrt{1-\left(\frac{v}{v_{kr}}\right)^2}, \quad \delta = \frac{a}{2}\sqrt{1+\left(\frac{v}{v_{kr}}\right)^2}, \quad a = \sqrt{2\sqrt{\frac{k_o}{EI}}+\frac{k_1}{EI}}, \quad v_{kr} = \sqrt{\frac{\sqrt{4k_o \cdot EI}+k_1}{m}}.$$

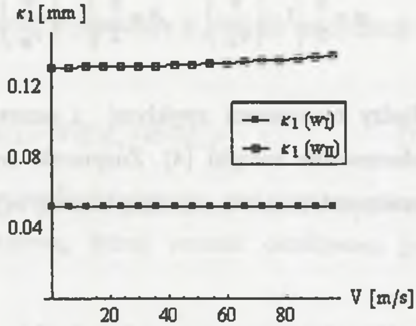
Między momentami zwykłymi i centralnymi a kumulantami zmiennej losowej istnieją jednoznaczne związki [4]. Znajomość tych wielkości pozwala na aproksymację rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $w(\xi)$.

3. Wyniki numeryczne i wnioski

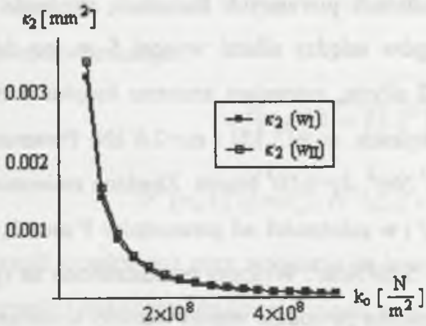
Dysponując wzorami (12) i (13) i wykorzystując dynamiczną funkcję wpływu (14), wykonano obliczenia numeryczne w zakresie czterech pierwszych kumulant, skośności i ekscesu [4]. Przyjęto, że średnia wartość odstępów między siłami wynosi 5 m, co daje wartość intensywności rozkładu sił równą λ=0.2 siły/m, natomiast zmienna losowa A ma rozkład lognormalny o następujących charakterystykach: m_A=13 kN i σ_A=2.6 kN. Parametry belki i podłoża wynoszą: m=2250 kg/m, EI=$9\cdot10^7$ Nm^2, k_1=$5\cdot10^5$ Nm/m. Zbadano zmienność kumulant zmiennych losowych $w_I(\xi)$ oraz $w_{II}(\xi)$ w zależności od parametrów V oraz k_0 w przedziałach odpowiednio 0 – 96m/s oraz $5\cdot10^7$ - $5\cdot10^8$N/m^2. Wykresy przedstawiono na rys. 3-10. Wynika z nich, że uwzględnienie siły w przekroju powoduje wzrost wartości kumulanty w stosunku do sytuacji, kiedy się takowej siły nie uwzględnia. Widać to wyraźnie w przypadku pierwszej kumulanty. Im wyższy rząd, tym różnice w wartościach kumulant tego samego rzędu dla zmiennych losowych $w_I(\xi)$ oraz $w_{II}(\xi)$ sukcesywnie maleją. Ponadto, zauważa się o wiele większy wpływ sztywności podłoża k_0 niż prędkości V na zmienność kumulant. Co więcej, dla analizowanych zakresów zmienności parametrów V oraz k_0 stwierdzić można, że wraz ze wzrostem k_0 różnice między kumulantami zmiennych losowych $w_I(\xi)$ oraz $w_{II}(\xi)$ ulegają zmniejszeniu, podczas gdy ze wzrostem V różnice te utrzymują się raczej na stałym poziomie. Wykresy porównawcze współczynników skośności i ekscesu przedstawiono na rys.11-14. Okazuje się, że rozkład badanych zmiennych nie jest rozkładem normalnym, ponieważ skośność i eksces są różne od zera. Współczynniki te są wrażliwe na zmianę sztywności podłoża k_0, podczas gdy przy zmianie prędkości V ich wartość nie ulega znaczącej zmianie. Ponadto dla zmiennej losowej $w_{II}(\xi)$ przyjmują one wartości bliższe zeru, a więc rozkład jest bardziej zbliżony do normalnego niż w przypadku $w_I(\xi)$.



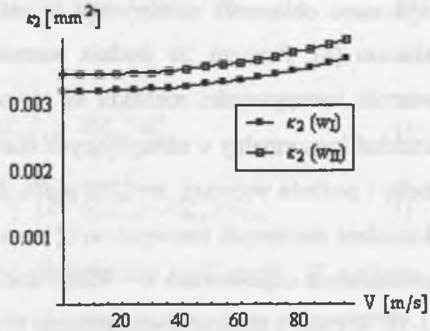
Rys. 3. Zależność κ_1 od k_o (V=20m/s)
Fig. 3. Relation between κ_1 and k_o



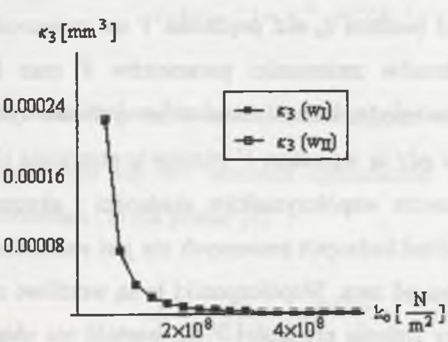
Rys. 4. Zależność κ_1 od V (k_o=$5\cdot10^7$ N/m^2)
Fig. 4. Relation between κ_1 and V



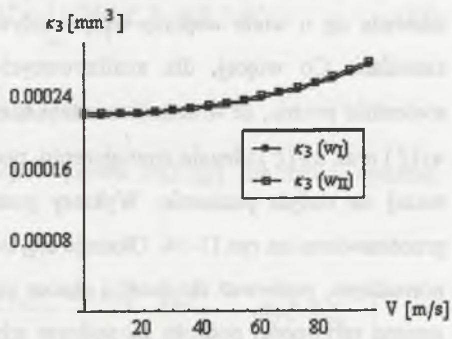
Rys. 5. Zależność κ_2 od k_o (V=20m/s)
Fig. 5. Relation between κ_2 and k_o



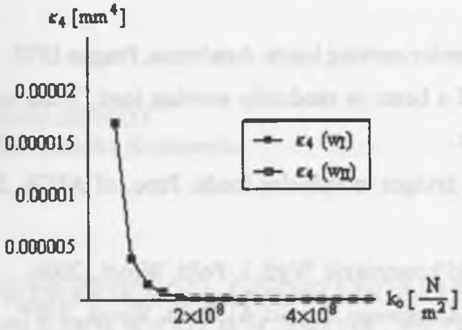
Rys. 6. Zależność κ_2 od V (k_o=$5\cdot10^7$ N/m^2)
Fig. 6. Relation between κ_2 and V



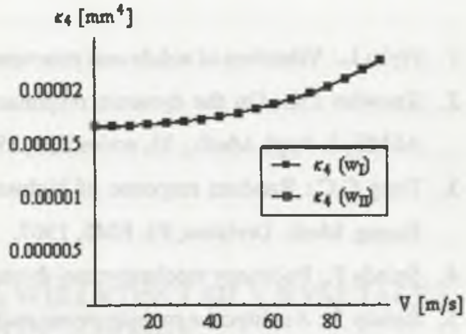
Rys. 7. Zależność κ_3 od k_o (V=20m/s)
Fig. 7. Relation between κ_3 and k_o



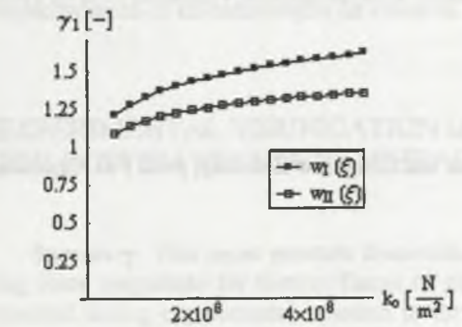
Rys. 8. Zależność κ_3 od V (k_o=$5\cdot10^7$ N/m^2)
Fig. 8. Relation between κ_3 and V



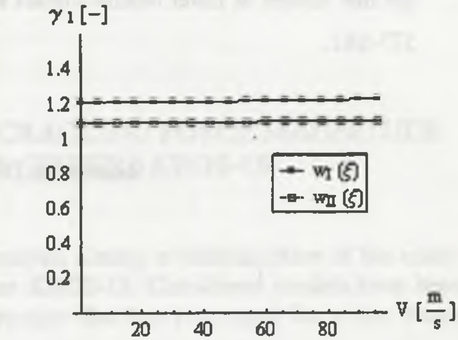
Rys. 9. Zależność κ_4 od k_o (V=20m/s)
Fig. 9. Relation between κ_4 and k_o



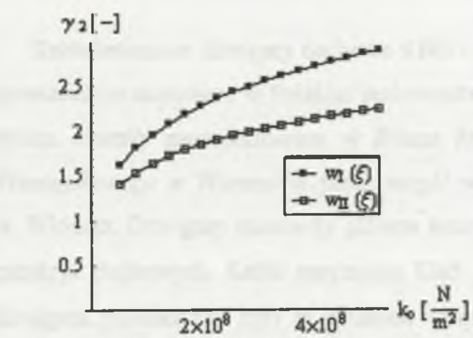
Rys. 10. Zależność κ_4 od V (k_o=5·10^7 N/m^2)
Fig. 10. Relation between κ_4 and V



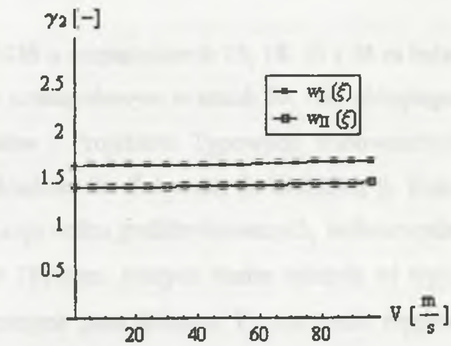
Rys. 11. Wsp. skośności γ_1 od k_o (V=20m/s)
Fig. 11. Relation between skewness γ_1 and k_o



Rys. 12. Wsp. skośności γ_1 od V (k_o=5·10^7 N/m^2)
Fig. 12. Relation between skewness γ_1 and V



Rys. 13. Wsp. ekscesu γ_2 od k_o (V=20m/s)
Fig. 13. Relation between excess γ_2 and k_o



Rys. 14. Wsp. ekscesu γ_2 od V (k_o=5·10^7 N/m^2)
Fig. 14. Relation between excess γ_2 and V

LITERATURA

1. Fryba L.: Vibration of solids and structures under moving loads. Academia, Prague 1972.
2. Knowles J.K.: On the dynamic response of a beam to randomly moving load. Trans. of ASME, J. Appl. Mech., 35, series E, 1, 1968.
3. Tung C.C.: Random response of highway, bridges to vehicles loads. Proc. of ASCE, J. Engng. Mech. Division, 93, EM5, 1967.
4. Śniady P.: Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji. Wyd. 1, Polit. Wrocł., 2000.
5. Śniady P.: Analityczne metody oceny ruchu drogowego. Raport, 61, Polit. Wrocł., 1977.
6. Śniady P.: Drgania belki nieskończenie długiej wywołane losową serią sił ruchomych. Rozprawy Inżynierskie, 31, 2, 193-201, 1983.
7. De Rosa M.A., Maurizi M.J.: The influence of concentrated masses and Pasternak soil on the free vibrats of Euler beams – exact solution. J. of Sound and Vibration, 212(4), 1998, 573-581.

Recenzent: Dr hab. inż. Zbigniew Zembaty, prof. Pol. Opolskiej