ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: AUTOMATYKA z.113 Nr kol. 1246

Ryszard **GESSING**
Zdzisław **DUDA**

OPTYMALNE REGUŁY DECYZYJNE ROZDZIAŁU ZASOBÓW W STRUKTURZE DWUPOZIOMOWEJ

Streszczenie. W pracy analizowany jest problem rozdziału ograniczonych zasobów w dużym systemie. Rozpatrywana jest dwupoziomowa struktura decyzyjna z koordynatorem i lokalnymi decydentami, którzy dysponują zróżnicowaną informacją pomiarową. Do koordynacji wprowadza się tzw. ograniczenie elastyczne, która odgrywa istotną rolę w rozwiązaniu zadania. Pokazuje się że reguły decyzyjne lokalnych decydentów mają postać analityczną, natomiast wytyczne koordynatora wynikają z numerycznego rozwiązania problemu. Prezentowany jest przykład numeryczny ilustrujący własności opracowanego algorytmu sterowania.

OPTIMAL RESOURCE ALLOCATION PROBLEM IN A TWO-LEVEL STRUCTURE

Summary. A two-level, partially decentralized control for limited resource allocation is considered. The case of different information of the coordinator and also of particular local controllers is investigated. An elastic constraint of the control variable is used for coordination. It plays an essential role for solving the problem. It is seen that optimal control laws of the local controllers have an analytical from while those of the coordinator result from numerical calculations. An example presents some properties of the control strategy.

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШАЮЩИЕ ПРАВИЛА РЕСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СТРУКТУРЕ

Резюме. В работе анализируется проблема распределения ограниченных ресурсов в большой системе. Рассматривается двухуровневая решающая структура с координатором и местными решающими лицами, у которых различнаяl измерительная информация. Для координации вводится т. н. гибкое ограничение, которое играет существенную роль в решении задачи. Показывается, что решающие правила местных решающих лиц имеют аналитический вид, в то время, как директивы координатора вытекают из численного решения проблемы. Представлен численный пример иллюстрирующий свойства разработанного алгоритма управления.

1. WPROWADZENIE

W systemach wodnych o ograniczonych zasobach, w okresach w których zapotrzebowania nie mogą być w pełni zaspokojone, istnieje konieczność racjonowania wody dla odbiorców. Sposób retencji wody wynika z przyjętej przez decydentów strategii sterowania i rzutuje na wielkość strat spowodowanych niedostarczeniem odbiorcom żądanej ilości wody. Celowe jest więc znalezienie takich reguł decyzyjnych, aby straty były możliwie małe. Stopień trudności zadania zależy od modelu matematycznego odbiorców, postaci wskaźnika jakości, ograniczeń, przyjętej struktury układu sterowania oraz struktury informacyjnej w systemie. Przy sterowaniu na bieżąco systemami o dużej wymiarowości mogą pojawić się trudności natury obliczeniowej. Stąd możliwość decentralizacji sterowania i dekompozycji obliczeń jest istotna i bardzo pożądana.

Istnieje wiele prac omawiających problemy sterowania wielkimi systemami. Rozpatrywane są zarówno systemy deterministyczne [4, 5, 12], jak i systemy z niepewnością, z taką samą lub zróżnicowaną informacją decydentów [1,8,9]. Analizowane są też różne struktury informacyjne [2, 10] oraz ich wpływ na postać rozwiązania. Interesujące wyniki symulacji sterowania procesem dystrybucji zasobów wodnych można też znaleźć w [11], gdzie omawiane są własności tzw. repetycyjnej struktury sterowania systemem ciągłym w warunkach deterministycznych.

Praca została wykonana w ramach BK-464/RAu11/92: "MODELE I ALGORYTMY STEROWANIA DLA RÓŻNYCH STRUKTUR UKŁADOWYCH I INFORMACYJNYCH"

Przyjęte w pracy sformułowanie problemu jest najbliższe sformułowaniu przedstawionemu w [6, 7], gdzie autor rozważa dyskretny problem rozdziału zasobów w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej, w której koordynator i lokalni decydenci dysponują zróżnicowaną informacją. Przyjmuje się, że koordynator dysponuje informacją istotną dla całego systemu, natomiast decydenci niższego poziomu dysponują bardziej szczegółową informacją dotyczącą ich podsystemów.

Niniejsza praca różni się od [6, 7] tym, że problem rozdziału wody przez lokalnych decydentów rozpatrywany w głównym nurcie pracy jest problemem statycznym, wynikającym z przyjętego uproszczonego modelu zapotrzebowań, a dynamika układu wynikająca z pojemności zbiornika jest uwzględniana przez koordynatora. W końcowej części pracy rozpatrywany jest także model zapotrzebowań na wodę opisany przez procesy Markowa. Prowadzi to do dynamicznego problemu rozdziału wody również na dolnym poziomie. W obu przypadkach w sformułowaniu problemu wykorzystuje się tzw. ograniczenie elastyczne wprowadzone w [7], które umożliwia lepsze wykorzystanie przez lokalnych decydentów ich bardziej szczegółowej informacji. Realizacja proponowanego sterowania jest możliwa, jeżeli w systemie występuje pojemność przeznaczona na gromadzenie zasobów rezerwowych przeznaczonych na pokrycie chwilowo zwiększonych zapotrzebowań nie znanych koordynatorowi. Istotnym wynikiem pracy jest pokazanie za pomocą badań symulacyjnych, że opłaca się przeznaczyć część pojemności występującego w systemie zbiornika wody na gromadzenie zasobów rezerwowych umożliwiających realizacje proponowanego sterowania zdecentralizowanego, przy równoczesnym zmniejszeniu pojemności zbiornika, którą gospodaruje koordynator.

2. OPIS SYSTEMU ROZDZIAŁU WODY

Przedmiotem naszych rozważań będzie system rozdziału wody składający się z M niezależnych podsystemów (np. jednostek gospodarczych), które pobierają wodę ze wspólnego zbiornika retencyjnego o znanej pojemności. Zbiornik jest zasilany dopływem i w przypadku nadmiaru wody możliwe jest jej wypuszczenie ze zbiornika poza system. W zasadzie poniższe rozważania będą dotyczyły przypadku, gdy w pewnych okresach występuje deficyt wody, i wtedy zapotrzebowania odbiorców nie mogą być w pełni pokrywane. W przypadku gdy ilość wody dopływającej i pojemności zbiornika są wystarczające do zaspokojenia potrzeb odbiorców w całym rozpatrywanym okresie czasu, zazwyczaj nie ma potrzeby sterowania rozdziałem wody.

Będziemy stosować dyskretny w czasie opis systemu, w którym czas dyskretny n będzie związany z podstawowym okresem dyskretyzacji (np, miesiącem, dekadą, tygodniem), a wielkości d_n i z_n^i będą oznaczały odpowiednio dopływ do zbiornika i zapotrzebowanie i-tego podsystemu w n-tym okresie dyskretyzacji. Zakładamy, że wielkości d_n i z^i_n, $i = 1, 2, \dots, M$, $n = 0, 1, 2, \dots$ są procesami losowymi o znanych odpowiednich funkcjach rozkładu prawdopodobieństwa.

Zakładamy, że decyzje o przykładzie wody podejmowane są w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej. Na poziomie wyższym koordynator wyznacza wartość zagregowanej zmiennej koordynującej e_n znając średnie zapotrzebowanie poszczególnych podsystemów $\bar{z}^n_i = Ez^n_i$, $i = 1, 2, \dots, M$, prognozy dopływu oraz napełnienie zbiornika h_n na początku n-tego okresu dyskretyzacji. Na poziomie niższym występuje M lokalnych decydentów związanych z poszczególnymi podsystemami, przy czym i-ty lokalny decydent podejmuje decyzje o przydziale wody u^i_n i-temu podsystemowi znając jego aktualne zapotrzebowanie z^i_n oraz otrzymaną od koordynatora wartość zmiennej e_n.

Rozpatrywana dwupoziomowa struktura systemu sterowania jest uzasadniona wtedy, gdy system jest duży (duże M) i przesyłanie do jednego centralnego decydenta informacji o zapotrzebowaniach na wodę ze wszystkich podsystemów jest trudne do zrealizowania. W proponowanej strukturze dwupoziomowej do koordynatora nie przesyła się na bieżąco z podsystemów żadnej informacji, a koordynator podaje lokalnym decydentom jedynie wartości zmiennych koordynujących.

Zauważmy, że przyjęty sposób koordynacji zgodny z [6] jest uzasadniony szczególnie wtedy, gdy unika się dzięki niemu przesyłania do koordynatora większej ilości informacji potrzebnej do wyznaczania decyzji u^i_n, a którą dysponują lokalni decydenci. W rozpatrywanym w niniejszej pracy przypadku do koordynatora nie przesyła się żadnej informacji od lokalnych decydentów. Dzięki temu możliwe jest także zmniejszenie ilości informacji przesyłanej od koordynatora do lokalnych decydentów. Dla rozpatrywanej struktury informacyjnej wystarczy, że koordynator wyznacza tylko wartość jednej zagregowanej zmiennej koordynującej e_n w chwili n i przesyła ją (np. drogą radiową) lokalnym decydentom.

W przypadku gdy przydział wody u^i_n i-temu podsystemowi różni się od jego zapotrzebowania z^i_n na wodę, w systemie powstają straty. Przyjmujemy, że miarą tych strat jest wskaźnik jakości o postaci

$$I = E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} (u^i_n - z^i_n)^2 \tag{1}$$

gdzie N określa końcowy okres dyskretyzacji będący horyzontem sterowania, a E oznacza wartość oczekiwaną.

Celem sterowania jest określenie przez koordynatora wartości zagregowanej zmiennej koordynującej e_n, a przez lokalnych decydentów przydziałów wody u_n^i, tak aby minimalizować straty.

W celu rozwiązania problemu poczynimy jeszcze dalsze założenia upraszczające. Zakładamy więc, że rurociągi transportujące wodę są dobrze zaprojektowane i zapewniają dostarczenie podsystemom takiej ilości wody, aby pokryć możliwe zapotrzebowania odbiorców. Niepotrzebne jest więc rozpatrywanie ograniczeń od góry na decyzje u_n^i. Również w trakcie wyznaczenia decyzji u_n^i nie będziemy uwzględniać ograniczeń na ich nieujemność. Spełnienie tych ograniczeń w olbrzymiej większości przypadków będzie wynikać ze sformułowania zadania i z danych dotyczących rozkładów prawdopodobieństwa, a w przypadkach szczególnych będzie zapewnione w trakcie obliczeń numerycznych, w sposób który pokażemy dalej. Nieuwzględnienie ograniczeń na u_n^i znacznie upraszcza obliczenia. Jednym ograniczeniem nierównościowym uwzględnionym w trakcie obliczeń będzie ograniczenie na napełnienie zbiornika w postaci

$$h_{min} \le h_n \le h_{max} \qquad n = 1,2,... \tag{2}$$

gdzie h_n - napełnienie zbiornika na początku n-tego okresu dyskretyzacji, h_{min} i h_{max} odpowiednio minimalne i maksymalne napełnienie zbiornika. Występowanie ograniczenia (2) powoduje, że część obliczeń wyznaczających decyzje musi być dokonywana na drodze numerycznej.

Zakładamy także, że zmienne losowe z_n^i, z_m^j są wzajemnie niezależnie dla dowolnych $i \ne j$, $n \ne m$. Oznacza to, że procesy losowe z_n^i, z_n^j, $n = 0, 1, 2,..., N$, $i \ne j$, $i, j = 1, 2,..., M$ są procesami losowymi typu białego szumu wzajemnie od siebie niezależnymi o niezerowych i znanych wartościach średnich $\bar{z}_n^i$, $i = 1, 2,..., M$, $n = 0, 1,..., N$.

Należy pokreślić, że rozpatrujemy tutaj celowo znacznie uproszczony model zapotrzebowań dla wyeksponowania pewnych własności rozpatrywanej struktury układu sterowania przy możliwie prostych obliczeniach. I tak założenie o niezależności zmiennych z_n^i w poszczególnych chwilach czasu, czyli założenie, że z_n^i są białymi szumami, znacznie upraszczają obliczenia, ale nie są istotne dla proponowanej metody. W rozdziale 6 pracy pokazano, że przy modelach z_n^i w postaci procesów Markowa komplikują się tylko obliczenia. Natomiast istotne jest założenie o wzajemnej niezależności procesów z_n^i, z_n^j dla $i \neq j$. Chodzi o to, że tylko wtedy, gdy zwiększonemu zapotrzebowaniu na zasoby niektórych podsystemów towarzyszy zmniejszone zapotrzebowanie innych podsystemów, koordynator przy podejmowaniu swoich decyzji może brać pod uwagę wartości średnie zapotrzebowań. Zatem tylko wtedy istnieje uzasadnienie stosowania struktury sterowania częściowo zdecentralizowanej z pewnym stopniem niezależności w podejmowaniu decyzji przez lokalnych decydentów, gdy istnieje pewien stopień niezależności w procesach i informacjach poszczególnych podsystemów. Zasada jest taka, że informacja wspólna dla wszystkich podsystemów powinna być dostępna koordynatorowi (taką informacją jest poziom wody w zbiorniku), a składnikami informacji w pewnym stopniu niezależne od siebie mogą być wykorzystywane przez poszczególnych lokalnych decydentów.

Rozwiązując sformułowane zagadnienie, wyznaczymy reguły decyzyjne określające wartości decyzji e_n i u_n^i w zależności od dostępnej informacji odpowiednio koordynatorowi i lokalnemu decydentowi. Będziemy się przy tym starali, aby możliwie w jak największej części reguły te były określone wzorami analitycznymi, a numeryczne obliczenia były sprowadzone do minimum. Będzie to możliwe dzięki analitycznemu rozwiązaniu statycznego problemu rozdziału wody sformułowanego w następnym rozdziale.

3. PROBLEM STATYCZNY ROZDZIAŁU W REALIZACJI DWUPOZIOMOWEJ

Zauważmy, że dzięki niezależności zmiennych losowych z_n^i w poszczególnych okresach n, gdybyśmy z rozwiązania numerycznego mieli wyznaczoną zagregowaną wielkość e_n określoną jako

$$e_n = \sum_{i=1}^{M} p_n^i, \tag{3}$$

to dalsze wyznaczenie wielkości p_n^i (którą nazwiemy wytyczną) i decyzji u_n^i można przeprowadzić na drodze analitycznej. Przyjmijmy więc, że e_n występujące w (3) jest dane, a wielkości p_n^i i u_n^i są związane ograniczeniem elastycznym [7], które w rozważanym przypadku przyjmuje postać

$$p_n^i = E\left[u_n^i \middle| p_n^i\right], \tag{4}$$

gdzie E [. | p_n^i] oznacza warunkową wartość oczekiwaną przy zadanym p_n^i.

Część wskaźnika jakości (1) związana z okresem n przyjmuje postać:

$$I_n = E\sum_{i=1}^{M}(u_n^i - z_n^i)^2, \tag{5}$$

Poszukujemy funkcji $u_n^i = a_n^{io}(z_n^i, p_n^i)$ oraz $p_n^i = b_n^{io}(e_n)$, dla których wskaźnik jakości (5) przy ograniczeniach (3) i (4) przyjmuje wartość minimalną.

Z poczynionych założeń odnośnie do z_n^i wynika, że funkcję a_n^{io} można wyznaczyć z rozwiązania zagadnienia

$$I_n^i = \min_{a_n^i} E(a_n^i - z_n^i)^2 \,, \tag{6}$$

przy ograniczeniu (4). Zgodnie z własnością ograniczenia elastycznego [7] mamy

$$I_n^i = E \min_{u_n^i} E_{|z_n^i, p_n^i}\left[(u_n^i - z_n^i)^2 + 2l_n^i(u_n^i - p_n^i)\right], \tag{7}$$

gdzie $E_{|z_n^i, p_n^i}$ [ ] oznacza warunkową wartość oczekiwaną przy zadanym z_n^i, p_n^i, a $2l_n^i$ oznacza mnożnik Lagrange'a. Przyrównując do zera pochodną wyrażenia w nawiasie [ ] wzoru (7) mamy

$$u_n^i = z_n^i - l_n^i \tag{8}$$

Podstawiając (8) do (4) otrzymujemy funkcję a_n^{io} w postaci

$$u_n^i = p_n^i + (z_n^i - \bar{z}_n^i) \tag{9}$$

Podstawiając (9) do (6) i (5) otrzymujemy

$$I_n^i = E\ (p_n^i - \bar{z}_n^i)^2 \tag{10}$$

$$I_n = E\ \sum_{i=1}^{M} (p_n^i - \bar{z}_n^i)^2 \tag{11}$$

Funkcję b_n^{io} otrzymamy z minimalizacji (11) przy ograniczeniu (3). Po zastosowaniu metody mnożników Lagrange'a otrzymujemy b_n^{io} w postaci

$$p_n^i = \bar{z}_n^i + \frac{1}{M}(e_n - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i) \tag{12}$$

Podstawiając (12) do (11) mamy

$$I_n = E\ \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{M^2}(e_n - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i)^2 \tag{13}$$

lub

$$I_n = \frac{1}{M} E(e_n - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i)^2 \tag{14}$$

4. PROBLEM NUMERYCZNEGO WYZNACZANIA ZAGREGOWANEJ ZMIENNEJ KOORDYNUJĄCEJ e_n

Do rozwiązania pozostaje jeszcze problem wyznaczania wielkości e_n, od której zależą wytyczne p_n^i.

Uwzględniając (14) w (1) zadanie to sprowadza się do minimalizacji wskaźnika

$$I = E \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{M}(e_n - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i)^2 \tag{15}$$

przy ograniczeniu (2) na napełnienie zbiornika.

Jeżeli pojemność zbiornika jest zaprojektowana właściwie, tzn., że jest on w stanie zgromadzić nadmiar wody wynikający ze zwiększonego dopływu oraz zmniejszonych zapotrzebowań, wtedy nie ma potrzeby wypuszczania wody poza system. Jeżeli natomiast pojemność zbiornika jest zbyt mała, wtedy może zaistnieć taka konieczność. Decyzje o tym podejmuje koordynator uwzględniając związane z tym koszty reprezentowane przez składnik zawierający sterowany wypływ q_n ze zbiornika poza system. Tak więc zadaniem koordynatora jest określenie wartości zmiennych e_n i q_n, które minimalizują wskaźnik

$$I = E\{ \sum_{n=0}^{N} [\frac{1}{M}(e_n - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i)^2 + Kq_n^2]\} \tag{16}$$

przy ograniczeniu (2).

Ograniczenie (2) obowiązujące dla chwili (n+1) możemy zapisać w postaci:

$$h_{min} \le h_n + d_n - \sum_{i=1}^{M} u_n^i - q_n \le h_{max} \tag{17}$$

Wstawiając (9) do (17) oraz uwzględniając (12) otrzymamy:

$$h_{min} \le h_n + d_n - e_n - \sum_{i=1}^{M} (z_n^i - \bar{z}_n^i) - q_n \le h_{max} \tag{18}$$

Ze wzorów (9) i (12) wynika, że przydział wody dla wszystkich podsystemów ($\sum_{i=1}^{M} u_n^i$) może być większy od wielkości e_n określonej przez koordynatora. Ma to miejsce w przypadku, gdy suma aktualnych zapotrzebowań jest większa od sumy wartości średnich zapotrzebowań, tzn. gdy $\sum_{i=1}^{M} z_n^i > \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i$. Realizacja tego przydziału możliwa jest, gdy w systemie dysponujemy pewną rezerwową pojemnością przeznaczoną na gromadzenie zasobów rezerwowych przeznaczonych do pokrycia chwilowo zwiększonego zapotrzebowania. Zasoby wody w pojemności rezerwowej nie podlegają sterowaniu, natomiast powinno się zapewniać napełnienie pojemności rezerwowej na początku każdego okresu dyskretyzacji. Rolę pojemności rezerwowej mogą spełniać występujące w poszczególnych podsystemach tzw. zbiorniki buforowe.

W przypadku braku zbiorników buforowych pojemność rezerwowa Δh może być "wygospodarowana" w zbiorniku retencyjnym kosztem zmniejszenia jego "pojemności sterowanej". Zatem koordynator będzie dysponował mniejszą pojemnością roboczą zbiornika, tzn. będzie określał wartości zmiennej e_n przy uwzględnieniu ograniczenia:

$$h_{min} + \Delta h \le h_n + d_n - e_n - q_n \le h_{max} \qquad n = 0,1,2,... \tag{19}$$

Właśnie ten przypadek będzie rozpatrywany w dalszym ciągu niniejszej pracy.

Intuicyjnie wygospodarowanie pojemności rezerwowej w zbiorniku retencyjnym wydaje się celowe, udowodnienie tego na drodze analitycznej jest jednak bardzo trudne. W dalszym ciągu celowość takiego pociągnięcia wykażemy na drodze badań symulacyjnych. Równocześnie wyznaczona będzie wielkość pojemności rezerwowej. Przy okazji warto dodać, że w pewnych przypadkach wielkość pojemności rezerwowej może być wyznaczona na drodze analitycznej [7].

Rozwiązanie problemu minimalizacji wskaźnika (16) przy ograniczeniach (19) jest praktycznie niemożliwe, nawet na drodze numerycznej. W dalszych rozważaniach zostanie przedstawione rozwiązanie zadania suboptymalnego oparte na idei sterowania w układzie otwartym ze sprzężeniem (OLF) z przesuwnym horyzontem l.

Zgodnie z tą ideą zadaniem koordynatora w dyskretnej chwili k jest określenie wartości wielkości $e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+l}, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+l}$, które minimalizują wskaźnik

$$I_k = \sum_{n=k}^{k+l} \left[\frac{1}{M}\left(e_n - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i\right)^2 + Kq_n^2\right] \tag{20}$$

przy ograniczeniach

$$h_{min} + \Delta h \le \hat{h}_{k+j|k} \le h_{max} \qquad j = 1,2,\ldots, l+1 \tag{21}$$

$$e_n \ge 0, \qquad q_n \ge 0 \qquad n = k, k+1,\ldots, k+l \tag{22}$$

gdzie:

$\hat{h}_{k+j|k}$ - ocena napełnienia zbiornika w chwili (k+j) na podstawie informacji dostępnej w chwili k.

l - przesuwny horyzont sterowania.

Ograniczenie (21) można tez zapisać w postaci:

$$h_{min} + \Delta h \le h_k + \hat{d}_{k|k} - e_k - q_k \le h_{max}$$

$$h_{min} + \Delta h \le h_k + \hat{d}_{k|k} + \hat{d}_{k+1|k} - e_k - e_{k+1} - q_k - q_{k+1} \le h_{max}$$

(23)

$$h_{min} + \Delta h \le h_k + \sum_{j=k}^{k+l} d_{j|k} - \sum_{j=k}^{k+l} (e_j + q_j) \le h_{max}$$

gdzie:

$\hat{d}_{j|k}$ - prognoza dopływu w chwili j na podstawie informacji w chwili k.

Znając w chwili k aktualne napełnienie zbiornika h_k oraz prognozy dopływu, koordynator wyznacza wartości zmiennych $e_k, e_{k+1},\ldots,e_{k+l}$, $q_k, q_{k+1},\ldots, q_{k+l}$, które minimalizują wskaźnik (20) przy ograniczeniach (23), a następnie przesyła wartość e_k do lokalnych decydentów, którzy wyznaczają wytyczne p_k^i, i = 1, 2, ..., M korzystając z (12). Koordynator postępuje zgodnie z wyżej opisanym algorytmem w dyskretnych chwilach k = 0, 1, 2, ...

Zauważmy, że w przypadku, gdy napełnienie zbiornika oraz prognozy dopływu są takie iż możliwe jest pełne zaspokojenie potrzeb odbiorców, optymalna wartość e_n równa jest sumie średnich zapotrzebowań $\bar{z}^i_n$ (i = 1, 2, ..., M), natomiast wytyczne p^i_n równe są odpowiednio średniemu zapotrzebowaniu $\bar{z}^i_n$ (i = 1, 2,..., M). W konsekwencji odbiorcy otrzymują tyle wody, ile wynosi ich zapotrzebowanie $(u^{io}_n = z^i_n)$. Jeżeli natomiast w systemie jest mała ilość wody, wtedy suma wytycznych koordynatora e_n będzie mniejsza od sumy średnich zapotrzebowań (aktywne ograniczenie na minimalne napełnienie zbiornika). W konsekwencji przydziały wody u^{io}_n będą mniejsze od zapotrzebowań z^i_n. Wielkość tego przydziału określa wzór (9).

5. BADANIA SYMULACYJNE

W przypadku numerycznym przyjmujemy, że system składa się ze zbiornika oraz pięciu podsystemów (M=5). Rozpatrywanie większej liczby odbiorców nie wprowadza żadnych dodatkowych trudności numerycznych. Zapotrzebowania odbiorców z^i_n mają charakter losowy o rozkładzie normalnym, znanej wartości średniej $(\bar{z}^i_n = 15)$ i znanej wariancji σ^2.

Zbiornik zasilany jest dopływem d_n, który ma charakter periodyczny o okresie 12, co może być interpretowane jako okres 12 miesięcy. Zakładamy, że znane są wartości średnie "miesięcznego dopływu $\bar{d}_n$, natomiast odchylenia od wartości średnich są niewielkie i możliwe do pominięcia.

W poniższej tabelce zestawiono średnie wartości dopływu $\bar{d}_n$ w poszczególnych miesiącach *)

Tabela 1

Średnie wartości dopływu $\bar{d}_n$

Miesiąc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Średnia wartość dopływu	100	100	100	100	100	100	40	40	40	40	40	40

*) *Wartości zapotrzebowań, dopływu oraz pojemności zbiornika wyrażone są w umownych jednostkach objętości*

Z przytoczonych danych wynika, że średnie zapotrzebowanie "miesięczne" całego systemu wynosi 75, a w przeliczeniu na 12 miesięcy daje wielkość 900. Z tabeli 1 wynika, że średni roczny dopływ wynosi 480. Widać więc, że średni roczny dopływ wody do systemu jest mniejszy od średniego rocznego zapotrzebowania.

Badania symulacyjne były przeprowadzone w horyzoncie czasowym równym 40 lat (N=480 miesięcy).

Zakładamy, że koordynator określa wartość e_n na podstawie idei sterowania w układzie otwartym ze sprzężeniem z przesuwnym horyzontem l. Jeśli przyjmiemy np., że l = 1, to w dyskretnej chwili k (w każdym "miesiącu") poszukuje on minimum wskaźnika (20)

$$I_k = \sum_{n=k}^{k+1} [5(e_n - \sum_{i=1}^{5} \bar{z}_n^i) + Kq_n^2] \tag{24}$$

podług miesięcznych zmiennych e_k, e_{k+1}, q_k, q_{k+1} przy ograniczeniach

$$h_{min} + \Delta h \le h_k + \bar{d}_k - e_k - q_k \le h_{max} \tag{25}$$

$$h_{min} + \Delta h \le h_k + \bar{d}_k + \bar{d}_{k+1} - e_k - e_{k+1} - q_k - q_{k+1} \le h_{max} \tag{26}$$

gdzie h_k jest aktualnym napełnieniem zbiornika, Δh rezerwową pojemnością w zbiorniku, a $\bar{d}_k$, $\bar{d}_{k+1}$ średnimi wartościami dopływu odpowiednio w chwili k i (k+1). Zadanie to rozwiązywane jest numerycznie metodą Wolfe'a, a w wyniku otrzymujemy wartość e_k. Następnie określone są wartości wytycznych p_k^i z zależności (12). Znając aktualne zapotrzebowania z_k^i (z symulacji przy wykorzystaniu generatora zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N(15,\sigma^2)$ oraz wartości wytycznych p_k^i, określamy wielkość przydziału wody u_k^i zgodnie z zależnością (9).

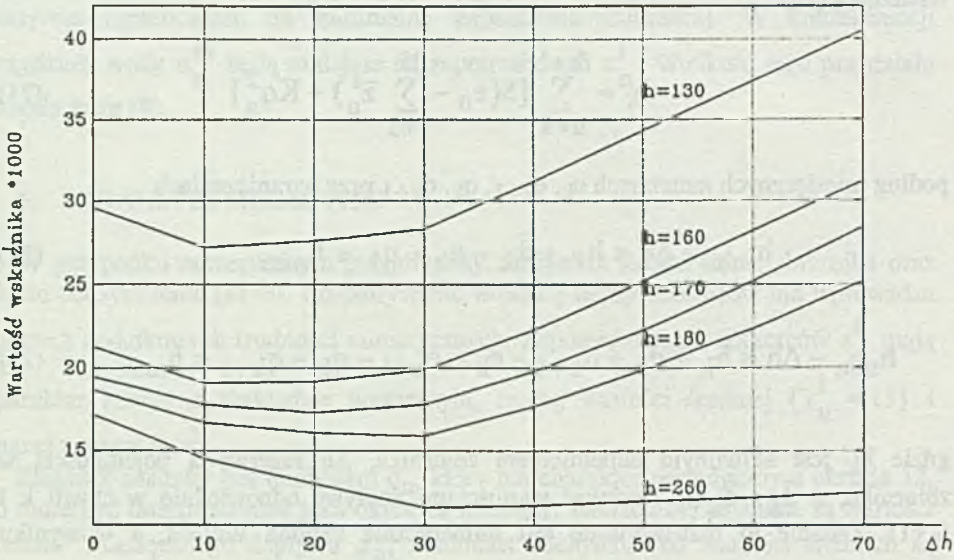
Pozostaje pytanie, jaką pojemność rezerwową Δh należy wygospodarować w zbiorniku. Znaczenie tej wielkości było dyskutowane w rozdziale 4.

Zauważmy, że różnica między wytyczną a sterowaniem wynosi zgodnie ze wzorem (9).

$$u_i - p_i = z_i - \bar{z}_i \qquad i = 1,2,\dots, M$$

a dla całego systemu

$$w = \sum_{i=1}^{M} (u_i - p_i) = \sum_{i=1}^{M} (z_i - \bar{z}_i)$$



Rys. 1. Wpływ Δh na jakość ster. przy różnych pojemn. zbiornika

Fig. 1. The influence of Δh on the performance index for different reservoir capacities.

Wielkość w jest więc zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(0, \sum_{i=1}^{M} \sigma_i^2)$. W rozważanym przykładzie $\sigma_i = \sigma_j$, $i,j = 1,2,..., M$ więc wariancja zmiennej losowej w wynosi $M\sigma^2$. Realizacja sterowania optymalnego jest możliwa, jeżeli przy zadanej pojemności rezerwowej Δh prawdopodobieństwo tego, że $w \leq \Delta h$, jest równe 1. Warunek ten jest możliwy do spełnienia, jeśli zmienna losowa w ma rozkład ograniczony. W przeciwnym przypadku można określić tylko, z jakim prawdopodobieństwem zadana wielkość pojemności rezerwowej nie będzie przekroczona, np. prawdopodobieństwo tego, że pojemność rezerwowa $\Delta h = 2\sigma M^{1/2}$ nie zostanie przekroczone wynosi 0,97725. Rozważania te są słuszne, w przypadku gdy różnica miedzy zwiększonymi zapotrzebowaniami a wytycznymi pokrywana jest ze zbiornika buforowego. W pracy rozpatrywany jest przypadek, gdy "pojemność rezerwowa" wygospodarowana jest w zbiorniku retencyjnym, stąd powyższe rozważania mają charakter przybliżony.

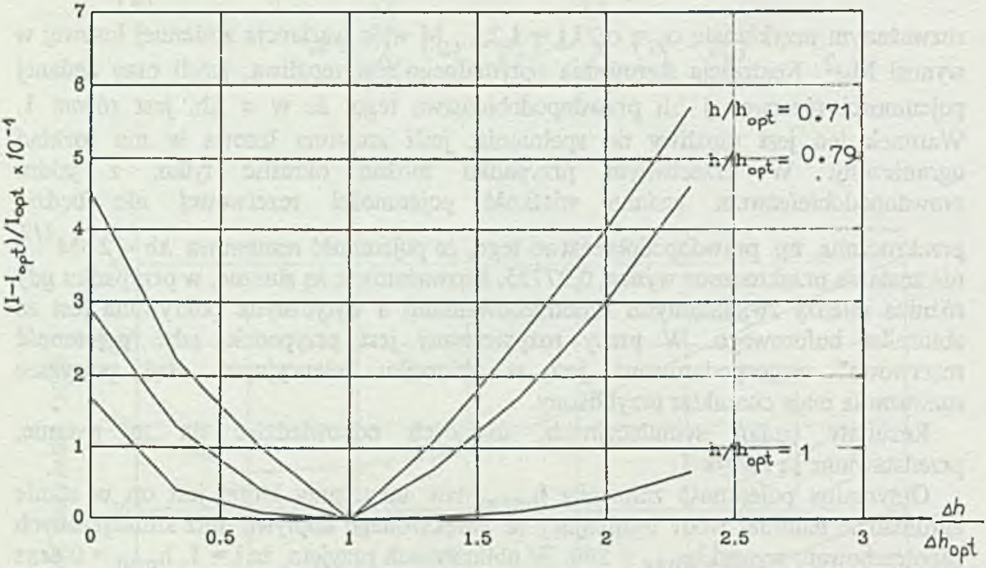
Rezultaty badań symulacyjnych, mających odpowiedzieć na to pytanie, przedstawione są na rys. 1.

Optymalna pojemność zbiornika h_{max}, tzn. taka, przy której jest on w stanie zgromadzić nadmiar wody wynikający ze zwiększonego dopływu oraz zmniejszonych zapotrzebowań, wynosi $h_{max} = 260$. W obliczeniach przyjęto, że $l = 1$, $h_{min} = 0$ oraz że zapotrzebowania z_n^i są zmienną losową o rozkładzie normalnym N(15, 45). Dla tej pojemności straty są minimalne przy rezerwowej pojemności $\Delta h = 30$, co stanowi ok. 11% całej pojemności zbiornika. Przy zmniejszaniu pojemności rezerwowej Δh straty rosną i przy $\Delta h = 0$ (brak pojemności rezerwowej) są o ok. 30% większe w stosunku do strat przy $\Delta h = 30$. Przy dobrze zaprojektowanej pojemności zbiornika zwiększenie pojemności Δh w pewnym zakresie powyżej optymalnej nie powoduje silnego wzrostu strat, co stanowi zaletę proponowanej strategii sterowania.

Na rys. 1. przytoczone są wyniki symulacji dla zbiornika o mniejszych pojemnościach (180, 170, 160, 130). Widać, że straty są znacznie wyższe w stosunku do przypadku omawianego wyżej, a zatem zbiornik o takich pojemnościach nie spełnia swojego zadania w systemie.

Na rys. 2. przedstawiono wpływ rezerwowej pojemności Δh na jakość sterowania przy zbiornikach o pojemnościach 260, 205, 185. Dla tych pojemności optymalna rezerwowa pojemność Δh wynosi 30.

Wielkość pojemności rezerwowej w zbiorniku zależy od wielkości wariancji zapotrzebowań. Jeżeli rozrzut wokół wartości średniej jest większy, wtedy wielkość pojemności rezerwowej Δh jest również większa i na odwrót.



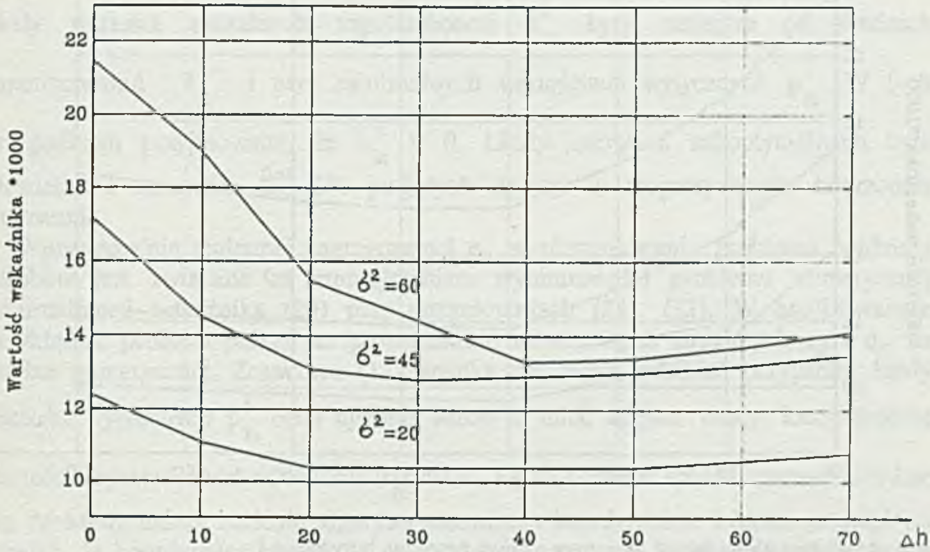
Rys. 2. Wpływ Δh na jakość ster. przy różnych pojemn. zbiornika

Fig. 2. The influence of Δh on the performance index for different reservoir capacities.

Na rys. 3. pokazany jest wpływ Δh na jakość sterowania przy przyjęciu $h_{max} = 260$ i przy różnych wariancjach zapotrzebowań [N (15, 20), N (15, 45), N(15,60)].

Zauważmy, że pojemność zbiornika $h_{max} = 260$ jest właściwie dobrana dla zapotrzebowań o rozkładzie N (15, 45), natomiast zbiornik ten jest za duży w ok. 10% dla zapotrzebowań o rozkładzie N (15, 20).

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że koordynator określa wartości e_n i q_n na podstawie idei sterowania w układzie otwartym ze sprzężeniem z przesuwnym horyzontem l = 1. W tym przypadku w problemie minimalizacji numerycznej występowały ograniczenia nierównościowe (25), (26). Przy założeniu przesuwnego horyzontu l = 0 w problemie minimalizacji wystąpi tylko ograniczenie (25), natomiast przy l = 2 należy brać pod uwagę ograniczenia (25), (26) oraz dodatkowo ograniczenie:

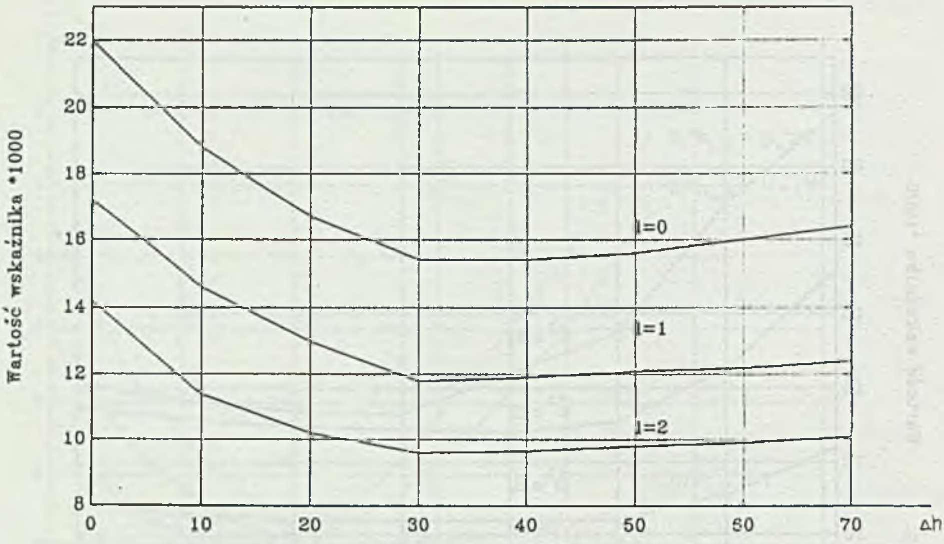


Rys. 3. Wpływ Δh na jakość ster. przy różnej wariancji zakłóceń
Fig. 3. The influence of Δh on the performance index for different variance of disturbance

$$h_{min} + \Delta h \le h_k + \bar{d}_k + \bar{d}_{k+1} + \bar{d}_{k+2} - e_k - e_{k+1} - e_{k+2} - q_k - q_{k+1} - q_{k+2} \le h_{max} \tag{27}$$

Na rys. 4. przedstawiono wyniki badań wpływu przesuwnego horyzontu l na jakość sterowania.

W obliczeniach przyjęto, że zapotrzebowanie z^i_n jest zmienną losową o rozkładzie normalnym N(15, 45), natomiast zbiornik ma pojemność h_{max} = 260. Wpływ długości horyzontu l jest znaczący i maleje ze wzrostem l. Należy podkreślić, że wpływ horyzontu l na jakość sterowania zależy od dokładności prognoz dopływu.



Rys. 4. Wpływ Δh na jakość ster. przy różnym przesuw. horyzoncie l

Fig. 4. The influence of Δh on the performance index for different moving horizon l

W naszych rozważaniach przyjmujemy, że losowość dopływu jest znikoma, stąd zwiększenie długości horyzontu l poprawia jakość sterowania. Przy złych prognozach dopływu wydłużanie horyzontu l może niewiele poprawić lub wręcz pogorszyć jakość sterowania.

Zauważmy, że w rozpatrywanym przykładzie wielkość optymalnej pojemności rezerwowej Δh jest taka sama przy przyjęciu horyzontu l = 0,1 lub 2 i wynosi Δh = 30.

W czasie symulacji pracy systemu zdarzały się przypadki, kiedy wartości sterowań optymalnych u_n^{io} wynikających ze wzoru (9) były ujemne. Zachodziło to w sytuacji, kiedy wartości aktualnych zapotrzebowań z_n^i były mniejsze od średnich zapotrzebowań $\bar{z}_n^i$ i przy minimalnych wartościach wytycznych p_n^i. W tych przypadkach przyjmowano, że $u_n^i = 0$. Liczba sterowań suboptymalnych była niewielka i stanowiła ok. 2% podjętych decyzji w rozpatrywanym horyzoncie sterowania.

Wprowadzenie zmiennej zagregowanej e_n w sformułowaniu problemu rozdziału zasobów jest związane ze zmniejszeniem wymiarowości problemu numerycznej minimalizacji wskaźnika (20) przy ograniczeniach (21), (22). W analizowanym przykładzie problem polega na poszukiwaniu miesięcznych zmiennych e_n i q_n na drodze numerycznej. Ze wzoru (12) wynika, że mogą zaistnieć przypadki, kiedy wartości wytycznych p_n^i będą ujemne. Może to mieć miejsce wtedy, kiedy średnie wartości zapotrzebowań odbiorców $\bar{z}_n^i$ różnią się od siebie w sposób znaczny. Wydaje się, że wtedy należy zmienić algorytm sterowania koordynatora. Można na przykład przyjąć, że koordynator poszukuje na drodze numerycznej nieujemnych wytycznych p_n^i, a nie zmiennej zagregowanej e_n. Jest to oczywiście związane ze zwiększeniem wymiarowości problemu numerycznego i ilości przesyłanej do lokalnych decydentów informacji, co przy dużej liczbie odbiorców i ograniczeń może sprawiać kłopoty.

W analizowanym przykładzie numerycznym zakładaliśmy deterministyczny model dopływu d_n. W przypadku gdy dopływ jest zmienną losową lub procesem losowym, jego prognozy mogą być bardziej lub mniej dokładnie. Stopień jakości prognoz dopływu ma wpływ na optymalną wielkość rezerwowej pojemności zbiornika Δh, na decyzję koordynatora, a tym samym na jakość sterowania.

W rozpatrywanym przykładzie wartości zapotrzebowań z_n^i określane były z generatora zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N(15, \sigma^2)$. Przy wzrastającym stosunku $\frac{\sigma}{15}$ prawdopodobieństwo wygenerowania "dużego" zapotrzebowania wzrasta. Można sobie wyobrazić sytuacje, w której jednorazowa realizacja takiego zapotrzebowania rzutuje na wielkość rezerwowej pojemności Δh. Stąd bardziej adekwatnym modelem zapotrzebowań, z praktycznego punktu widzenia, jest model o rozkładzie ograniczonym, tzn. takim, w którym generowane wielkości mieszczą się w zadanym przedziale (z_{min}, z_{max}).

6. PROBLEM DYNAMICZNY ROZDZIAŁU W STRUKTURZE DWUPOZIOMOWEJ

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że zapotrzebowania odbiorców mają charakter statyczny, Obecnie rozważymy przypadek, w którym zapotrzebowania odbiorców mają charakter dynamiczny.

Przyjmijmy, że model zapotrzebowań odbiorców jest opisany procesem Markowa w postaci

$$z^i_{n+1} = w^i_{n+1} + \alpha^i (z^i_n - u^i_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, M. \tag{28}$$

gdzie:

z^i_n - zapotrzebowanie na wodę i-tego odbiorcy w chwili n,

u^i_n - ilość wody przydzielona i-temu odbiorcy w chwili n,

w^i_n - nominalne zapotrzebowanie na wodę i-tego odbiorcy w chwili n,

α^i - współczynnik reprezentujący stopień przenoszenia nie zrealizowanego zapotrzebowania i-tego odbiorcy z poprzedniej chwili $0 \le \alpha^i \le 1$.

Z rozważań przeprowadzonych w [6] wynika, że optymalne prawo sterowania dla i-tego lokalnego decydenta opisane jest zależnością

$$u^i_n = p^i_n + (z^i_n - \bar{z}^i_n) \tag{29}$$

Porównując (29) z (9) widzimy, że reguły decyzyjne lokalnych decydentów w przypadku statycznych i dynamicznych odbiorców są takie same. Tak więc zadanie koordynatora sprowadza się do minimalizacji wskaźnika (16) przy ograniczeniach (2), (3) oraz dodatkowym ograniczeniu uwzględniającym dynamikę odbiorców.

Dokonując warunkowego uśredniania $E(\cdot|p^i_n)$ obydwu stron równania (28) oraz uwzględniając ograniczenie elastyczne (4), otrzymamy:

$$\bar{z}^i_{n+1} = \bar{w}^i_{n+1} + \alpha^i(\bar{z}^i_n - p^i_n) \qquad i = 1,2,\dots, M \qquad (30)$$

W [6] wyprowadzone są zależności analityczne na określenie wytycznych p^i_n, które mogą być wykorzystane w niniejszych rozważaniach.

Traktowanie podsystemu jako dynamicznego odbiorcy może mieć szczególne znaczenie wtedy, gdy okres dyskretyzacji jest mały (godzina, doba).

7. UWAGI KOŃCOWE

Istotną zaletą opracowanego algorytmu rozdziału wody jest to, że część reguł decyzyjnych ma postać analityczną, a obliczenia numeryczne sprowadzają się jedynie do wyznaczania przez koordynatora zmiennej zagregowanej. Jest to możliwe dzięki wprowadzeniu do koordynacji ograniczenia elastycznego, które pozostawia lokalnym decydentom pewną swobodę w podejmowaniu decyzji. Dzięki temu mogą oni lepiej wykorzystać swoją bardziej szczegółową informacją pomiarową.

Do realizacji sterowania w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej wymagana jest pewna "pojemność rezerwowa" w zbiorniku, gromadząca zasoby niesterowane przez koordynatora, a wykorzystywane przez lokalnych decydentów. Na skutek tego zmniejsza się pojemność na gromadzenie zapasów sterowanych przez koordynatora. Badania symulacyjne wykazały, że takie postępowanie jest uzasadnione. Z badań symulacyjnych wynika, że bardziej opłaca się przeznaczyć część pojemności zbiornika na gromadzenie zapasów rezerwowych umożliwiających wykorzystanie bardziej szczegółowej informacji lokalnych decydentów, niż pozostawić całą pojemność do dyspozycji koordynatora. Wynika stąd, że decentralizacja sterowania, z wykorzystaniem informacji lokalnych decydentów, daje lepsze rezultaty niż centralne sterowanie z mniej szczegółową informacją koordynatora i zwiększoną pojemnością przeznaczoną na sterowane zasoby. Mniejsza informacja centralnego decydenta ma tutaj decydujące znaczenie. Ponieważ w dużym systemie przesyłanie całej informacji lokalnej do centralnego decydenta jest praktycznie niemożliwe, więc otrzymany wynik przemawia przeciwko centralnemu sterowaniu i za sterowaniem dwupoziomowym, częściowo zdecentralizowanym. Wielkość "pojemności rezerwowej" zależy od wariancji zapotrzebowań odbiorców i wariancji dopływu.

Na podstawie badań symulacyjnych można też określić, jaka powinna być pojemność zbiornika retencyjnego, aby mógł on zgromadzić rezerwy wody wynikające ze zwiększonego dopływu lub zmniejszonego zapotrzebowania odbiorców. Dla tak dobranej wielkości zbiornika zwiększanie "pojemności" rezerwowej" w pewnym zakresie powyżej optymalnej powoduje tylko nieznaczny wzrost strat. Stanowi to zaletę proponowanej idei sterowania. Można przyjąć, że szacunkowe teoretyczne określenie tej wielkości w zasadzie jest zgodne z wynikami symulacyjnymi, nawet przy założeniu, że rolę "pojemności rezerwowej" spełnia zbiornik buforowy w systemie.

Na jakość sterowania wpływa też długość przesuwnego horyzontu. Oznacza to, że występowanie w systemie koordynatora i jego decyzje mają również istotne znaczenie. Wpływ przesuwnego horyzontu jest znaczący, przy założeniu że dysponujemy dobrym modelem prognoz dopływu. Tak więc jego wielkość zależy od badanego systemu wodnego.

Proponowana koncepcja sterowania w strukturze hierarchicznej może być zastosowana do systemów wodnych o bardziej złożonej strukturze, w której występuje większa liczba zbiorników, dopływów, sterowanych przerzutów międzyzbiornikowych.

LITERATURA

[1] Chong C. Y., Athans M.: On the Stochastic Control of Linear Systems with Different Information Sets., IEEE Trans., A-C, 16, 5, 1971.
[2] Chu K. C.: Team decision theory and information structures in optimal control problems., Automatica, 10, 4, 1974.
[3] Duda Z., Gessing R., Simek K,. Wojciechowski K.: Sterowanie rozdziałem ograniczonych zasobów wodnych na przykładzie systemu wodno-gospodarczego dorzecza Czarnej Przemszy i Brynicy, raport z pracy n-b wykonanej w ramach CPBP 03.09. 1988.
[4] Findeisen W.: Wielopoziomowe układy sterowania, PWN, Warszawa 1974.
[5] Findeisen W., Bailey F. N., Brdyś M., Malinowski K., Tatjewski P., WoźniakA.: Control and Coordination in Hierarchical Systems, 1980.
[6] Gessing R.: Optimal control laws for two-level hierarchical resource allocation. Large Scale Systems., 12. 1987.
[7] Gessing R.: Two level hierarchical control for stochastic optimal resource allocation., Int. J. Contr., 40, 6. 1980.
[8] Ho Y. C.: Team Decision Theory and Information Structures, IEEE Proc., 68, 6, 1980.
[9] Ho Y. C., Chu K. C.: Team decision theory and information structures in optimal Control Problems, Part. I, IEEE Trans., A-C, 17, 1. 1972.
[10] Ho Y. C., Ch K. C.: Information structure in dynamic multiperson control problems., Automatica, 10, 4, 1972.
[11] Nowosad K. A.: Własności i zastosowania struktur sterowania z dyskretnym sprzężeniem zwrotnym. Inst. Automatyki Pol. Warszawskej, Warszwa 1979. (praca doktorska).

[12] Singh M. G., Titli A., Malinowski K.: Control Systems Centre Report, No 570, 1985.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Józef Korbicz

Wpłynęło do Redakcji 10.03. 1993 r.

Abstract

In this paper a two-level hierarchical control for optimal resource allocation is considered. It is assumed that the coodinator has available information essential for the whole system, while the local controllers have more detailed information concerning the particular subsystems. The original problem statement is presented, in which an elastic constraint is introduced for coordination. Owing to this it is possible to decompose the calculations and to realize the decentralized optimal control. The elastic constraint admits some freedom in taking decisions for the local controllers. Thus, they can better use its more detailed information.

In the lower level local controllers define resource allocation policy for each subsystem separately. In the higher level a coordinator defines the resource allocation between particular subsystems. It is shown that for LQ case the control laws of local controllers have an analytical from while that of the coordinator results from numerical calculations.

The proposed method of solution is applied to a water resource allocation problem. On the basis of simulation research, the influence of the demand variance and the reserve capacity in the storage reservoir on the quality of control is analysed.