

Zygmunt KUŚ

Konrad WOJCIECHOWSKI

STATYSTYCZNE WŁAŚCIWOŚCI PRZETWARZANIA STOSOWEGO

Streszczenie. Tematem pracy jest statystyczna analiza wyników filtracji stosowej. Przyjmuje się, że obraz 1-D lub 2-D jest opisany przez histogram lub histogram kumulacyjny.

W pracy pokazano, że pomimo zmniejszenia ilości informacji dostępnej przy takim opisie są zastosowania, w których taka analiza jest wystarczająca.

W pracy opisano sposób określenia dystrybuanty ciągu wyjściowego (obraz 1D) przetwornika stosowego, przy założeniu że ciąg wejściowy jest sumą danego ciągu i ciągu o rozkładzie równomiernym i zerowej wartości średniej. Podano również przykłady różnych podejść dla wyznaczenia dystrybuanty ciągu będącego wyjściem filtru medianowego.

STATISTICAL PROPERTIES OF STACK FILTRATION

Summary. The subject of this work is a statistical analysis of the stack filtration results. Such approach implies that 1D or 2D image is described by histogram or cumulative histogram.

In spite of decrease of amount of information accessible in this approach applications in which this analysis is sufficient are shown.

In this work the way of determining output sequence of the stack filtration assuming that input sequence is the summ of given sequence and i.i.d. sequence is presented. Examples of different approaches to median filtration distribution function determination are given.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТЕКОВОЙ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Резюме. Работа посвящена статическому анализу результатов стековой фильтрации. Предполагается, что одномерное или двухмерное изображение описывается гистограммой или куммулятивной гистограммой. В работе показывается, что несмотря на уменьшение количества информации доступной в случае промевения гистограммного описания, есть такие применения, в которых такой анализ достаточен. Опирается способ определения функции распределения входной последовательности (одномерное изображение) стекового преобразователя. При этом предпосылается, что входная последовательность является суммой данной последовательности и последовательности с равномерным распределением и нулевым средним значением. Приведены также примеры разных подходов к определению функции распределения последовательности являющейся выходом медианного фильтра.

1. WSTĘP

1.1. Wprowadzenie

Efekty przetwarzania obrazu mogą być oceniane przy różnych podejściach. Jednym z nich jest podejście statystyczne, w którym obraz 1-D lub 2-D jest opisany przez histogram lub histogram kumulacyjny, które z kolei mogą być traktowane jako odpowiednio funkcja gęstości i dystrybuanta rozkładu poziomów szarości w obrazie wyznaczone na podstawie próby. W oczywisty sposób zastąpienie obrazów histogramem jest istotnym zmniejszeniem ilości informacji. Można jednak podać przypadki, w których informacja zawarta w histogramie jest wystarczająca dla celów klasyfikacji i rozpoznawania. Przykładowo ma to miejsce w analizie tekstury obrazu lub w problemie wyznaczania wartości progowej dla celów "binaryzacji" obrazu. W takich przypadkach interesuje nas, jak w wyniku wykonania przetwarzania stosowego zmieniają się "statystyczne właściwości" obrazu, nie zaś jakim zmianom podlegają jego poszczególne fragmenty lub występujące na nim obiekty.

Statystyczna analiza wyników przetwarzania spłotowego, której najprostszym przykładem jest uśrednienie, opiera się na wykorzystaniu znanych twierdzeń z zakresu statystyki matematycznej dotyczących funkcji zmiennej losowej, w przypadku gdy jest ona określona analitycznie. Podobna analiza dla przetwarzania medianowego wymaga odmiennego podejścia, a możliwy do wykorzystania aparat matematyczny nie jest już

tak powszechnie znany. Niektóre wyniki uzyskane dla tego rodzaju przetwarzania przedstawiono w pracy [2]. Pokazano tam, dla wybranej klasy rozkładów, jak modyfikuje się dystrybuanta rozkładu (histogram kumulacyjny) w wyniku wykonania przetwarzania medianowego.

Biorąc pod uwagę, że przetwarzanie medianowe jest szczególnym przypadkiem przetwarzania stosowego, to celem pracy jest uogólnienie tych wyników dla przetwarzania stosowego. Jednocześnie ze względu na charakterystyczną cechę przetwarzania stosowego polegającą na dekompozycji obrazu przetwarzanego na zbiór obrazów binarnych (występują tylko dwa poziomy szarości) praca pokazuje ogólne, inne od stosowanego w [2], podejście do problemu wyznaczania dystrybuanty mediany (kwantyla) zmiennej losowej.

W punkcie drugim podano krótkie wprowadzenie do przetwarzania stosowego.

W punkcie trzecim opisano sposób określenia dystrybuanty ciągu wyjściowego (obraz 1D) przetwornika stosowego, przy założeniu że ciąg wejściowy jest sumą danego ciągu i ciągu o rozkładzie równomiernym i zerowej wartości średniej. Podano również przykłady różnych podejść dla wyznaczenia dystrybuanty ciągu będącego wyjściem przetwornika (filtru) medianowego.

W punkcie czwartym podano przykłady numeryczne i wykresy histogramów: różnicowego i kumulacyjnego przy przejściu ciągu wejściowego o rozkładzie równomiernym (16 poziomów szarości) przez różne przetworniki stosowe.

1.2. Podstawowe pojęcia i definicje

Objektami, na których wykonane są opisywane w pracy przekształcenia, są obrazy 1D lub 2D. Dla celów pracy obrazy 1D utożsamiane będą ze skończonymi elementowymi ciągami a o długości L i elementach a_i , gdzie $i \in \{1, \dots, L\}$, $a_i \in \{0, \dots, M-1\}$. Wartość a_i jest interpretowana jako "poziom szarości" na pozycji i -tej, mogący przyjmować jedną ze skończonego zbioru wartości, co odpowiada efektowi kwantowania. Jeżeli $M=2$ mówimy o ciągu binarnym, którego elementami są "0" lub "1". W pracy posługujemy się również pojęciem następującego podciągu $a_m = (a_{m-N}, \dots, a_m, \dots, a_{m+N})$ ciągu a , parametrami tego podciągu są $m \in \{1, \dots, L\}$ i N , gdzie $2N+1 \leq L$. W rozważaniach przedstawionych w pracy dla uproszczenia zapisów podciąg a_m dla ustalonego m może być również przenieumerowany do postaci $a(\cdot) = (a_1, \dots, a_{N+1}, \dots, a_{2N+1})$. Dla niezależnienia długości rozpatrywanego podciągu od parametru m przyjmujemy $a_{m-N} = a_0$, jeżeli $m-N < 0$ oraz $a_{m+N} = a_L$, jeżeli $m+N > L$. W dziedzinie medianowego przetwarzania obrazów długość $2N+1$ podciągu a_m nazywamy szerokością apertury zastosowanej do przetwarzania. Ogólniejsza definicja podciągu a_m ma postać $a_m = ((a_{m+m_{-N}}, \dots, a_{m+m_0}, \dots, a_{m+m_N}))$, gdzie $2N+1$, elementowy ciąg $\{m_{-N}, \dots, m_0, \dots, m_N\}$ jest dany z założenia i bywa nazywany aperturą.

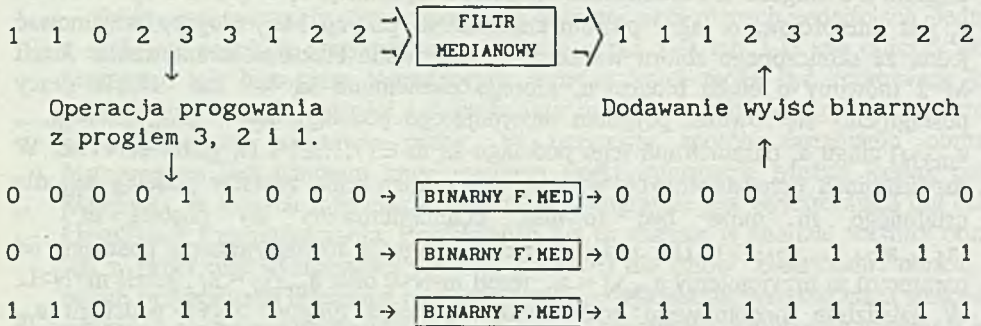
Niech a będzie danym ciągiem (obraz wejściowy), a b wynikiem jego przetwarzania przez filtr medianowy. Z założenia długości ciągów a i b są równe. Elementy ciągu b (obraz wyjściowy) określone są następująco $b_m = \text{mediana}(a_m) = a_m^*$, gdzie

$m \in \{1, \dots, L\}$, natomiast a_m^* mają nieparzystą liczbę elementów, element a_m^* ciągu a_m^* jest medianową (kwantylem rzędu 0,5) podciągu a_m do postaci a_m^* zastąpić można "zliczaniem" zer lub jedynek. Jeżeli liczba zer w podciągu binarnym a_m jest większa od N , to jego medianowa jest równa zero. Na podstawie ciągu a_m^* zdefiniować można również kwantyle innych rzędów podciągu a_m , które w przypadku ciągów binarnych, podobnie jak mediana, mogą być określane przez zliczanie zer lub jedynek w podciągu a_m .

Obrazy 2D utożsamiane są ze skończone wymiarowymi macierzami A o elementach a_{ij} , gdzie $i \in \{1, \dots, L_w\}$, $j \in \{1, \dots, L_k\}$, oraz $a_{ij} \in \{0, \dots, M-1\}$. Podobnie jak dla ciągów określamy podmacierz $A(m, n)$, jej parametrami są m , n oraz N_w, N_k . W pewnych przypadkach rozumiane jak powyżej obrazy 2D można równoważnie rozpatrywać jako obrazy 1D wprowadzając odpowiednie przenumerywanie elementów.

2. WPROWADZENIE DO PRZETWARZANIA STOSOWEGO

Pojęcie przetwarzanie stosowe zawiera w sobie szeroką klasę przetworników zrealizowanych za pomocą progowej dekompozycji (threshold decomposition) z uwzględnieniem właściwości układania w stos (stacking property). Konstrukcje takiego przetwornika prześledzimy za [1] na przykładzie filtra medianowego o aperturze szerokości 3, zrealizowanego techniką przetwarzania stosowego, na ciągu o następujących parametrach: $I = 9, M = 4$, na wejściu (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Filtracja medianowa z aperturą o szerokości 3 wykonana za pomocą progowej dekompozycji

Fig. 2.1. Window width 3 median filtering by threshold decomposition

Właściwość progowej dekompozycji sprawia (co ilustruje rys. 2.1.), że przetwarzanie M-wartościowego ciągu przez filtr medianowy jest równoważne następującej procedurze:

- 1) Dekompozycji M-wartościowego ciągu wejściowego w zbiór M-1 ciągów binarnych, k-ty ciąg binarny, gdzie k jest liczbą całkowitą ze zbioru $\{1, 2, \dots, M-1\}$, jest otrzymywany przez progowanie ciągu wejściowego progiem o wartości k. Przyjmujemy wartość 1 dla elementu ciągu większego lub równego k i 0 dla elementu ciągu mniejszego od k. Zauważmy, że sumowanie tych M-1 ciągów binarnych daje nam oryginalny ciąg wejściowy (rys. 2.1).
- 2) Filtracji każdego ciągu binarnego niezależnie, za pomocą jego właściwego filtru ze statystyką porządkową (np. binarnego filtru medianowego). Wszystkie te operacje mogą być wykonane równolegle. Również każdy z filtrów dzięki ciągom binarnym na wejściu ma bardzo prosta realizację. Każdy z nich po prostu daje bity wybranego podciągu (podciągu określonego przez aperturę) i porównuje wynik z zadana liczbą całkowitą r, wyprowadzając zero, jeśli suma jest mniejsza od r, a jedynkę, jeśli suma jest większa lub równa r. Jeżeli szerokość apertury b jest równa $2r + 1$, to filtr jest filtrem medianowym.
- 3) Dodaniu elementów ciągów pojawiających się jednocześnie na wyjściach filtrów binarnych.

Za pomocą progowej dekompozycji z wykorzystaniem właściwości układania w stos można zrealizować różne przetworniki przez zastąpienie binarnego przetwornika porządkowego odpowiednią funkcją boolowską (np. na rys. 2.1. binarnego filtru medianowego odpowiednią funkcją boolowską).

Funkcje boolowskie, którymi chcielibyśmy zastąpić BFM z rys. 2.1, muszą posiadać właściwość układania w stos, którą definiujemy następująco:

Definicja 2.1.

O funkcji binarnej B_n - wymiarowego argumentu mówimy, że ma właściwość układania w stos, jeżeli:

$$\bar{x} \geq \bar{y} \Rightarrow B(\bar{x}) \geq B(\bar{y}). \quad (2.1)$$

Binarny wektor \bar{x} jest większy lub równy od binarnego wektora \bar{y} , jeżeli na każdej pozycji, na której w \bar{y} występuje 1 również w \bar{x} występuje 1.

Podsumowując można powiedzieć, że wszystkie operacje wykonywane w trakcie przetwarzania ciągu (obrazu) przez filtr stosowy sprowadzają się do:

- a) progowania M - wartościowego ciągu wejściowego,
- b) obliczenia wartości funkcji boolowskiej od odpowiednich podciągów,
- c) detekcji numeru najwyższego poziomu (wartości k), dla której wartość funkcji boolowskiej wynosi 1.

3. STATYSTYCZNE WŁAŚCIWOŚCI PRZETWARZANIA STOSOWEGO

Statystyczne właściwości przetwarzania stosowego badamy określając dystrybuantę ciągu wyjściowego dla losowych ciągów wejściowych o danej dystrybuancie. W różnych pracach [3, 4, 5] prowadzono rozważania nad dystrybuantą wyjścia filtracji

medianowej i innych filtrów ze statystykami porządkowymi, które miały na wejściu ciąg o rozkładzie równomiernym lub taki właśnie dodany do ustalonego ciągu. Korzystając z [1], zostanie przedstawiona metoda obliczania dystrybuanty wyjścia filtru stosowego z sygnałem o rozkładzie równomiernym na wejściu.

Niech S_B będzie filtrem medianowym z aperturą szerokości $2N+1$ opartym na dodatniej funkcji boolowskiej B . Jeśli liczba M -poziomów jest duża, to możemy założyć ciągłą dziedzinę wartości wejściowych. Ułatwia to prowadzenie analizy, ponieważ możemy się posługiwać dystrybuantą F , zamiast zbiorem prawdopodobieństw dla poszczególnych poziomów.

Założmy, że ciąg wejściowy jest równy sumie znanego ciągu i ciągu losowego o rozkładzie równomiernym, to jest:

$$v_1(\omega) = s_i + n_i(\omega) \quad , \quad (3.1)$$

gdzie: $n_i(\omega)$ jest ciągiem losowym określonym przez dystrybuantę F . Założmy, że zminimalizowana postać sumacyjna wyrażenia B ma postać:

$$B(x_1, x_2, \dots, x_{2N+1}) = \Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_m \quad , \quad (3.2)$$

gdzie:

$$\Pi_p = x_{j(p,1)} x_{j(p,2)} \dots x_{j(p,k(\pi_p))} \quad (3.3)$$

jest p -tym iloczynem w wyrażeniu zminimalizowanym a $j(p,q)$ są indeksami zmiennych w Π_p w porządku wzrastającym. Jeżeli Π_i jest jednym iloczynem w postaci (3.2), to $k(\Pi_i)$ będzie liczbą zmiennych w Π . Niech $z_1(\omega)$ będzie wyjściowym ciągiem generowanym przez FS dla wejścia $v_1(\omega)$. Jego dystrybuanta ma postać:

$$F_z(z) = P(\{\omega: z_1(\omega) \leq z\}) .$$

Aby obliczyć $F_z(z)$, bierzemy pod uwagę, że z jest progami w filtrze stosowym S_B . Ciąg binarny tworzony przez operację progowania na poziomie z jest dany przez zależność:

$$x_j(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } v_{i+j-N-1}(\omega) \geq z \\ 0 & \text{jeśli } v_{i+j-N-1}(\omega) < z \end{cases} \quad (3.4)$$

gdzie: $j \in \{1, \dots, 2N+1\}$ - numer elementu w podciągu dla ustalonej wartości $i \in \{1, \dots, L\}$ - numer elementu w ciągu przetwarzanym.

Wyjście filtru stosowego S_B na pozycji i -tej jest większe lub równe poziomowi progowania z wtedy i tylko wtedy, jeżeli wyjście na tej samej pozycji filtru binarnego B (działającego na ten sprogowany podciąg) jest równe 1.

$$z_i \geq z \quad \text{jeżeli} \quad \mathbf{B}(x_1, x_2, \dots, x_{2N+1}) = 1 \quad (3.5)$$

Stąd mamy:

$$\begin{aligned} 1 - F_z(z) &= P(\mathbf{B}(x_1, x_2, \dots, x_{2N+1}) = 1) = P(\text{co najmniej jeden } \Pi_i \text{ w (3.2)} = 1) \\ &= P(x_{j(p,1)} = x_{j(p,2)} = \dots = x_{j(p,k(\pi_p))} = 1 \text{ dla jakiegoś } p) = \\ &= P\left(\bigcup_{p=1}^m \bigcap_{l=1}^{k(\pi_p)} \{\omega: v_{j(p,l)+i-N-1}(\omega) \geq z\}\right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Jeśli oznaczymy iloczyn zdarzeń związanych z Π_p przez A_p , wtedy możemy zapisać, że chcemy znaleźć prawdopodobieństwo $P\left(\bigcup_{p=1}^m A_p\right)$. Przy obliczaniu prawdopodobieństwa musimy liczyć każdy iloczyn A_i tylko raz. Osiągamy to przez sukcesywne dodawanie lub odejmowanie prawdopodobieństw związanych z każdym możliwym iloczynem.

Z założeń dotyczących ciągu wejściowego wiemy, że dla próbki o numerze 1 mamy:

$$P(\{\omega: n_1(\omega) \geq z\}) = 1 - F(z)$$

Stąd otrzymujemy

$$P(\{\omega: n_1(\omega) \geq z - s_1\}) = 1 - F(z - s_1)$$

$$P(\{\omega: (s_1 - n_1(\omega)) \geq z\}) = 1 - F(z - s_1)$$

$$P(\{\omega: v_1(\omega) \geq z\}) = 1 - F(z - s_1)$$

Z tego, że $P(\{\omega: v_1(\omega) \geq z\}) = 1 - F(zs_1)$, otrzymujemy zależność na prawdopodobieństwo takiego zdarzenia, że wszystkie iloczyny w ZPS są równe 1 ($\Pi_{p1} = \Pi_{p2} = \dots = \Pi_{pk} = 1$) i wynosi ono:

$$\prod_{x_j \in \pi_{p1} \pi_{p2} \dots \pi_{pk}} (1 - F(z - s_{i+j-N-1}))$$

gdzie $x_j \in \Pi$ oznacza, że iloczyn arytmetyczny jest wzięty po wszystkich indeksach j , dla których x_j jest zmienną w boolowskim Π . Jeśli Π jest iloczynem mniejszych iloczynów, to jest to równoważne powiedzeniu, że x_j jest zmienną w co najmniej jednym z tych mniejszych iloczynów.

Ostatecznie sumując po wszystkich możliwych zbiorach indeksów p_i członów iloczynowych i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) = & 1 - \sum_{p=1}^m \prod_{l=1}^k (1 - F(z - s_{i+j(p,l)} - N - 1)) + \\
 & + \sum_{\{p_1 p_2\}} \prod_{x_j \in \tau_{p_1} \pi_{p_2}} (1 - F(z - s_{i+j} - N - 1)) + \dots \\
 & + (-1)^k \sum_{\{p_1, p_2, \dots, p_k\}} \prod_{x_j \in \pi_{p_1} \pi_{p_2} \dots \pi_{p_k}} (1 - F(z - s_{i+j} - N - 1)) \dots \\
 & + (-1)^m \prod_j \prod_{x_j \in \tau_1 \pi_2 \dots \pi_m} (1 - F(z - s_{i+j} - N - 1)) \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Jeśli $s_i = 0$, to mając na wejściu sygnał o rozkładzie równomiernym otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) = & 1 - \sum_{p=1}^m (1 - F(z)) + \sum_{\{p_1 p_2\}} (1 - F(z))^{k(\Pi_{p_1} \Pi_{p_2})} + \\
 & + (-1)^k \sum_{\{p_1 p_2 \dots p_k\}} (1 - F(z))^{k(\Pi_{p_1} \Pi_{p_2} \dots \Pi_{p_k})} + \dots \\
 & + (-1)^m (1 - F(z))^{k(\Pi_{p_1} \Pi_{p_2} \dots \Pi_{p_m})} \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Jako przykład rozpatrzmy filtr medianowy z aperturą o szerokości 3, oparty na funkcji boolowskiej $x_1, x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$,

Jeśli mamy $\Pi_1 = x_1 x_2$, $\Pi_2 = x_1 x_3$ i $\Pi_3 = x_2 x_3$, to wtedy $\Pi_i \Pi_j = \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 = x_1 x_2 x_3$ dla $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$. Dlatego $k(\Pi_i) = 2$, $k(\Pi_i \Pi_j) = 3$.

Korzystając z (3.7) dla rozkładu równomiernego na wejściu otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) = & 1 - 3(1 - F(z))^2 + 3(1 - F(z))^3 - (1 - F(z))^3 = \\
 = & 1 - 3(1 - F(z))^2 + 2(1 - F(z))^3 = 1 - 3 + 6(F(z))^2 - 3(F(z))^2 \quad (3.9) \\
 & + 2 - 6F(z) + 6(F(z))^2 - 2(F(z))^3 = 3(F(z))^2 - 2(F(z))^3.
 \end{aligned}$$

Z drugiej strony wiemy, że dla filtru medianowego o trzech punktach w aperturze mamy:

$$\begin{aligned}
 F_z(z) &= P(\text{co najmniej dwie próbki w aperturze } \leq z) = \\
 &= P(\text{dokładnie dwie próbki w aperturze } \leq z) + \\
 &+ P(\text{wszystkie próbki w aperturze } \leq z) = \\
 &= 3(F(z))^2 \cdot (1 - F(z)) + (F(z))^3 = \\
 &= 3(F(z))^2 - 3(F(z))^3 + (F(z))^3 = \\
 &= 3(F(z))^2 - 2(F(z))^3.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Jest to zgodne z poprzednim wynikiem.

Następnie dla konkretnego rozkładu porównamy wyniki zastosowania podanej powyżej metody i sposobu otrzymania dystrybuanty ciągu wyjściowego zaproponowanego w [2].

Zakładamy, że na wejściu filtru medianowego mamy ciąg o rozkładzie równomiernym:

$$F(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0,5 \\ z + 0,5 & -0,5 < z < 0,5 \\ 1 & z \geq 0,5 \end{cases}$$

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0,5 \\ 1 & -0,5 < z < 0,5 \\ 0 & z \geq 0,5 \end{cases} \tag{3.11}$$

a filtr medianowy posiada aperturę o szerokości 3. Przez $g(z)$ oznaczmy funkcję gęstości wyjścia filtru medianowego. Według [2] dla n punktów w aperturze mamy:

$$g(z) = n \binom{n-1}{(n-1)/2} f(z) F(z)^{(n-1)/2} [1 - F(z)]^{(n-1)/2} \tag{3.12}$$

czyli dla $n = 3$ otrzymujemy:

$$g(z) = 6f(z)F(z)[1 - F(z)]$$

Po podstawieniu $f(z)$ i $F(z)$ otrzymujemy:

$$g(z) = 6 \cdot 1 \cdot (z + 0,5) \cdot [1 - (z + 0,5)] = -6z^2 + 1,5$$

Jednocześnie według (3.9) mamy:

$$G(z) = 3(F(z))^2 - 2(F(z))^3 = 32(z + 0,5)^2 - 2(z + 0,5)^3 = -2z^3 + 1,5z + 0,5$$

zatem:

$$g(z) = \frac{dG(z)}{dz} = -6z^2 + 1,5$$

i w ten sposób otrzymujemy identyczny wynik z poprzednim.

4. PRZYKŁADY MODYFIKACJI HISTOGRAMÓW

Obecnie zostaną podane jeszcze inne przykłady obliczania dystrybuanty ciągu wyjściowego z przetwornika stosowego dla przetworników opartych na różnych funkcjach boolowskich, w przypadku gdy na wejściu mamy ciąg o rozkładzie równomiernym.

Przykład 4.1

Przetwornik stosowy oparty jest na funkcji boolowskiej:

$$\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_3,$$

$\Pi_1 = \mathbf{x}_2$ i $\Pi_2 = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2$, $\Pi_i \Pi_j = \Pi_1 \Pi_2 = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3$ dla $i, j = 1, 2$ i $i \neq j$.

Stąd $k(\Pi_1) = 1$, $k(\Pi_2) = 2$, $k(\Pi_1 \Pi_2) = 3$.

Korzystając z (3.7) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F_z(z) &= 1 - \sum_{p=1}^2 (1 - f(z))^{k(\Pi_p)} + (-1)^2 (1 - F(z))^{k(\Pi_{p_1} \Pi_{p_2})} = \\ &= 1 - ((1 - F(z)) + (1 - F(z))^2) + (1 - F(z))^3 = 2(F(z))^2 - (F(z))^3. \end{aligned}$$

Przykład 4.2

Przetwornik stosowy oparty jest na funkcji boolowskiej:

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3.$$

$\Pi_1 = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ i $\Pi_2 = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$, $\Pi_i\Pi_j = \Pi_1\Pi_2 = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$ dla $i, j = 1, 2$ i $i \neq j$.

Stąd $k(\Pi_1) = k(\Pi_2) = 2$, $k(\Pi_1\Pi_2) = 3$.

Korzystając z (3.7) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= 1 - \sum_{p=1}^2 (1 - F(z))^{k(\Pi_p)} + (-1)^2 (1 - F(z))^{k(\Pi_{p_1}\Pi_{p_2})} = \\ &= 1 - ((1 - F(z))^2 + (1 - F(z))^2) + (1 - F(z))^3 = F(z) + (F(z))^2 - (F(z))^3. \end{aligned}$$

Przykład 4.3

Przetwornik stosowy oparty jest na funkcji boolowskiej:

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3.$$

$\Pi_1 = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$ i $k(\Pi_1) = 3$,

Korzystając z (3.7) otrzymujemy:

$$F_Z(z) = 1 - ((1 - F(z))^3) = 3F(z) - 3(F(z))^2 + (F(z))^3.$$

Przykład 4.4

Przetwornik stosowy oparty jest na funkcji boolowskiej:

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3.$$

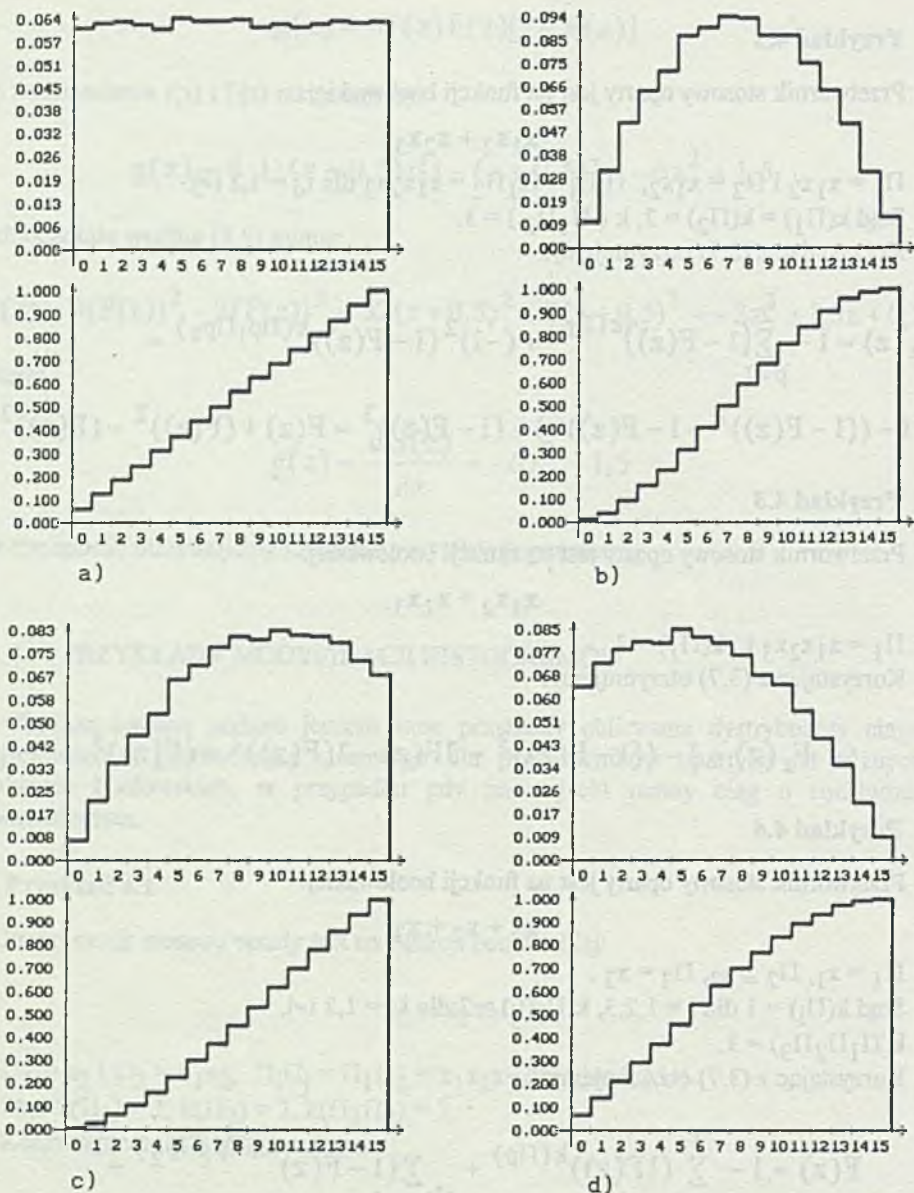
$\Pi_1 = \mathbf{x}_1$, $\Pi_2 = \mathbf{x}_2$, $\Pi_3 = \mathbf{x}_3$.

Stąd $k(\Pi_i) = 1$ dla $i = 1, 2, 3$, $k(\Pi_i\Pi_j) = 2$ dla $i, j = 1, 2$ i $i \neq j$,

$k(\Pi_1\Pi_2\Pi_3) = 3$.

Korzystając z (3.7) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F(z) &= 1 - \sum_{p=1}^3 (1 - F(z))^{k(\Pi_p)} + \sum_{\{p_1 p_2\}} (1 - F(z))^{k(\Pi_{p_1}\Pi_{p_2})} + \\ &+ (-1)^3 (1 - F(z))^{k(\Pi_{p_1}\Pi_{p_2}\Pi_{p_3})} = \\ &= 1 - 3((1 - F(z)) + 3((1 - F(z))^2 - ((1 - F(z))^3) = ((F(z))^3. \end{aligned}$$

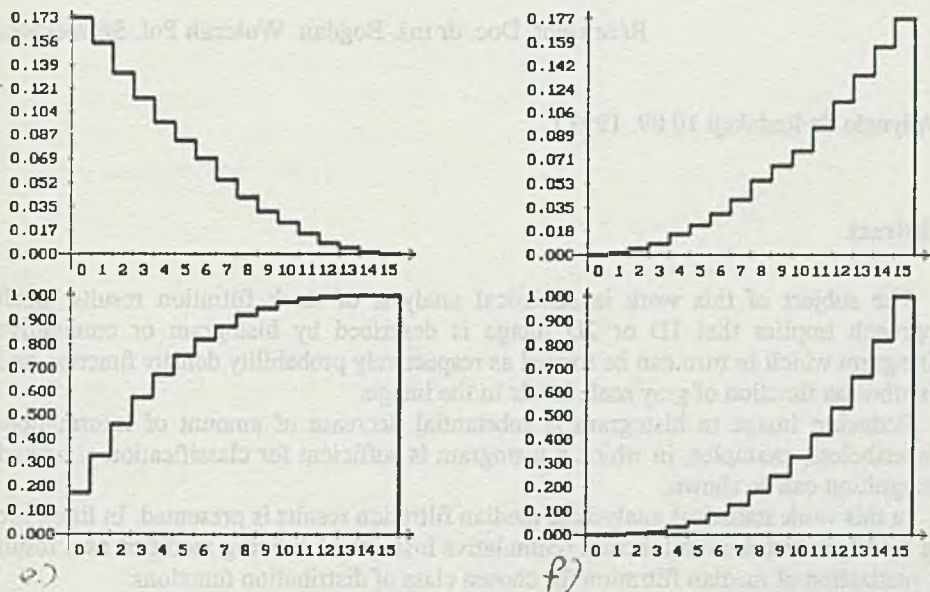


Rys. 4.1. Wykresy histogramów: różnicowego (u góry) i kumulacyjnego (u dołu) a) histogramy wygenerowanego ciągu wejściowego, b) histogramy wyjścia przetwornika stosowego dla $B(x_1x_2x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ c) histogramy wyjścia przetwornika stosowego dla $B(x_1x_2x_3) = x_2 + x_1x_3$ d) histogramy wyjścia przetwornika stosowego dla $B(x_1x_2x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$

Fig. 4.1. Histograms: differential (top) and cumulative (bottom) a) histogram of original input image, b) histograms output stack filter image for $B(x_1x_2x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ c) histograms output stack filter image for $B(x_1x_2x_3) = x_2 + x_1x_3$ d) histograms output stack filter image for $B(x_1x_2x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$

Rysunek 4.1. przedstawia wykresy histogramów: różnicowego i kumulacyjnego ilustrujące modyfikację właściwości statystycznych przy przejściu ciągu wejściowego o rozkładzie równomiernym (liczba przyjmowanych wartości wynosi 16, od 0 do 15) przez różne przetworniki stosowe.

Można się zastanawiać, czy podobną modyfikację histogramów, jak pokazana przykładowo na rys. 4.1. można uzyskać przetwarzając obraz funkcją statyczną $z_1 = h(v_1)$. Przetwarzając statycznie obrazy różne, ale mające taki sam histogram, uzyskamy obrazy wynikowe mające taki sam histogram dla nich wszystkich, niezależnie od konkretnego rozmieszczenia pikseli na obrazie. Natomiast przy przetwarzaniu stosowym uzyskalibyśmy obrazy wynikowe o histogramach różnych - zależnie od ułożenia pikseli na obrazie. Można przykładowo rozważyć przetwarzanie medianowe wykonane na dwóch obrazach o rozkładzie równomiernym. Jeżeli założymy, że pierwszy z nich ma duże obszary jednobarwne, a drugi dużo pojedynczo rozsianych pikseli, to wiemy, że wpływ przetwarzania medianowego na pierwszy będzie nieznaczny, natomiast drugi będzie przekształcony w znacznym stopniu. W ten sposób mając na wejściu przetwornika medianowego obrazy o takich samych histogramach na wyjściu uzyskamy obrazy o histogramach różnych.



Rys. 4.1. cd. e) histogramy wyjścia przetwornika stosowego dla $B(x_1 x_2 x_3) = x_1 x_2 x_3$
 f) histogramy wyjścia przetwornika stosowego dla $B(x_1 x_2 x_3) = x_1 + x_2 + x_3$
 Fig. 4.1. continued e) histograms output stack filter image for $B(x_1 x_2 x_3) = x_1 x_2 x_3$
 f) histograms output stack filter image for $B(x_1 x_2 x_3) = x_1 + x_2 + x_3$

LITERATURA

- [1] Peter D. Wendt, Edward J. Coyle, Neal C. Gallagher: Stack Filters, IEEE Transactions On Acoustics, Speech And Signal Processing, vol. ASS-34, pp. 898-911, August 1986.
- [2] T.S. Huang: Two Dimensional Digital Signal Processing II - Transforms and Medians Filters, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1981.
- [3] F. Kuhlman, G. L. Wise: On the spectral characteristics of median filtered independent data, IEE Trans, Comun, vol. COM-29, pp. 1374-1379, September 1981.
- [4] T.A. Nodas, N.C. Gallagher: The output distribution of median type filters, IEE Trans. Comun., vol. COM-32, pp. 532-541, May 1984.
- [5] E. Ataman, V. K. Aatre, K. M. Wong: Statistical properties of median filters, IEEE Transactions On Acoustics, Speech And Signal Processing, vol ASSP-29, pp. 1073-1075, October 1981.

Recenzent: Doc. dr inż. Bogdan Wołczak Pol. Szczecińska

Wpłynęło do Redakcji 10.09. 1993 r.

Abstract

The subject of this work is statistical analysis of stack filtration results. Such approach implies that 1D or 2D image is described by histogram or cumulative histogram which in turn can be treated as respectively probability density function and distribution function of gray scale levels in the image.

Reducing image to histogram is substantial decrease of amount of information. Nevertheless, examples, in which a histogram is sufficient for classification aims and recognition can be shown.

In this work statistical analysis of median filtration results is presented. In literature we find how distribution function (cumulative histogram) is being modified as a result of realization of median filtration for chosen class of distribution functions.

Considering median filtration as a particular example of stack filtration in this work results in generalization of the stack filtration. Because of characteristic feature of the stack filtration based on decomposition of processed image into set of binary images (only two gray scale levels are used) the work shows general, different from usually presented in literature approach to median filtration for random variable median (quantile) distribution function determination.

In this work the way of determining output sequence of the stack filtration assuming that input sequence is the summ of given sequence and i.i.d. sequence.

The numeric examples and histograms: differential and cumulative as well as results of different stack filtrations for 16 gray scale levels are shown.

STATYSTYCZNE WŁAŚCIWOŚCI PRZETWARZANIA STEROWEGO

Streszczenie: W pracy omówiono sposób wyznaczania sekwencji wyjściowej filtracji stercowej.

Przyjęto, że sekwencja wejściowa jest sumą sekwencji danej i sekwencji niezależnych i o jednakowej rozkładzie. W pracy podano przykłady numeryczne i histogramy: różnicowy i kumulacyjny, oraz wyniki filtracji stercowej dla 16 poziomów szarości.

W pracy przedstawiono numeryczne przykłady i histogramy różnicowy i kumulacyjny dla 16 poziomów szarości.

STATISTICAL PROPERTIES OF STACK FILTRATION

Abstract: In this work the way of determining output sequence of the stack filtration

assuming that input sequence is the summ of given sequence and i.i.d. sequence. The numeric examples and histograms: differential and cumulative as well as results of different stack filtrations for 16 gray scale levels are shown.

The numeric examples and histograms: differential and cumulative as well as results of different stack filtrations for 16 gray scale levels are shown.

STATISTISCHES EIGENSCHAFTEN VON STACKFILTRATION

Zusammenfassung: In dieser Arbeit wird die Bestimmung der Ausgangssequenz einer Stackfiltration unter der Annahme, dass die Eingangssequenz die Summe einer gegebenen Sequenz und einer i.i.d. Sequenz ist, beschrieben.