ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: AUTOMATYKA z. 113 Nr kol. 1246

Zygmunt KUŚ
Konrad WOJCIECHOWSKI

DETERMINISTYCZNE WŁAŚCIWOŚCI PRZETWARZANIA STOSOWEGO

Streszczenie. W pracy przedstawia się deterministyczne właściwości przetwarzania stosowego.

Analizuje się tutaj związek pomiędzy funkcją boolowską, na której oparty jest dany przetwornik stosowy, a postacią niezmienników tego przetwornika. Podaje się również warunki konieczne i wystarczające zbieżności wyjścia przetwornika stosowego do niezmiennika filtracji medianowej. Pokazano, że istnieją filtry stosowe różne od filtracji medianowej, a jednocześnie zachowujące niezmienniki filtracji medianowej.

W pracy sklasyfikowano przetworniki stosowe oparte na funkcjach boolowskich trzech zmiennych pod kątem zachowywania przez nie odpowiednich niezmienników oraz przeanalizowano działanie tych przetworników.

DETERMINISTIC PROPERTIES OF STACK FILTRATION

Summary. In this work deterministic properties of stack filtration are presented.

The paper contains an analysis of interference between Boolean function that provides a basis for a stack filter and a from of such element's roots. Neccessary and sufficient conditions for convergence of stacking filter output to a root of median filtration are given. Existence of stack filtres that differ from the ones in median filtration, while preserving roots of median filtration is proven.

Stack filters based on 3-variable Boolen function are classified concerning their ability to preserve particular roots and subsequently their performance is analysed.

ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТЕКОВОЙ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Резюме. В равоте представлены детерминистические свойства стековой обработки. Анализируется связь между логической функцией, на основе которой

построен данный стековой преобразователь а видом инвариантных признаков этого преобразователя. Формулируются также необходимые и достаточные условия сходимости выхода стекового преобразователя к инвариантному признаку медианной фильтрации. Показывается, что существуют стековые фильтры разные от медианной фильтрации и одновременно соблюдающие инвариантные признаки медианной фильтрации. Классифицируются стековые преобразователи, которые основаны на логических функциях 3 переменных с точки зрения соблюдения инвариантных признаков. Анализируется действие таких преобразователей.

1. WSTĘP

Ogólnie efekty przetwarzania obrazu oraz realizujące je przetworniki mogą być charakterystyczne w kategoriach statystycznych, "częstotliwościowych" lub niezmienniczych. W przypadku pierwszym zarówno obraz wejściowy, jak i wyjściowy opisane są przez histogram. Z punktu widzenia przetwarzania interesujące są jedynie możliwe do osiągnięcia "modyfikacje" histogramu będące wynikiem przetwarzania obrazu [9]. W przypadku drugim obraz charakteryzowany jest przez swoje widmo częstotliwościowe, lub ogólniej współczynniki rozwinięcia w wybranym układzie funkcji ortonormalnych i interesuje nas, jakim zmianom podlega widmo w wyniku wykonania przetwarzania. W tym zakresie dobrze znanymi są przetworniki "dolnoprzepustowe", "górnoprzepustowe" i "pasmowoprzepustowe", jak również ich różne modyfikacje. W przypadku trzecim przetwarzanie charakteryzowane jest najbardziej bezpośrednio. Badamy mianowicie, jakim zmianom w wyniku wykonania przetwarzania podlegają "charakterystyczne fragmenty" obrazu. Impulsem do rozwoju tego kierunku oceny przetwarzania stały się własności filtrów medianowych, tzw. niezmienniki przetwarzania medianowego. Dla kontrastu ze statystyczną ocenę, opartą na badaniu niezmienników nazywać będziemy dalej deterministycznymi właściwościami przetwarzania.

W pracy przedstawia się deterministyczne właściwości przetwarzania stosowego, którego szczególnym przypadkiem jest przetwarzanie medianowe.

W punkcie 2 przedstawiono podstawowe pojęcia i definicje dotyczące przetwarzania stosowego.

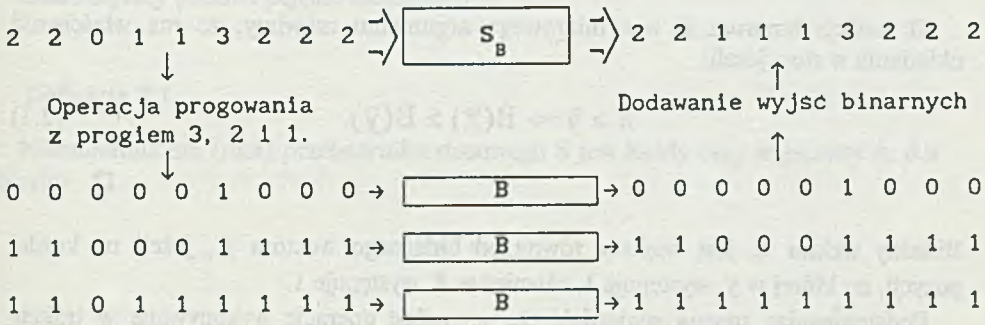
W punkcie 3 analizuje się związek pomiędzy funkcją boolowską, na której oparty jest dany przetwornik stosowy, a postacią niezmienników tego przetwornika. Podaje się również warunki konieczne i wystarczające zbieżności wyjścia przetwornika stosowego do niezmiennika filtracji medianowej.

W punkcie 4 sklasyfikowano przetworniki stosowe oparte na funkcjach boolowskich trzech zmiennych pod kątem zachowywania przez nie odpowiednich niezmienników oraz przeanalizowano działanie tych przetworników.

Praca finansowana z BK 603/RAu1/93/2

2. WPROWADZENIE DO PRZETWARZANIA STOSOWEGO

Pojęcie przetwarzanie stosowe zawiera w sobie szeroką klasę przetworników zrealizowanych za pomocą progowej dekompozycji (threshold docomposition) z uwzględnieniem właściwości układania w stos (stacking property). Konstrukcję takiego przetwornika prześledźmy za [1] na przykładzie asymetrycznego filtru medianowego o aperturze szerokości 3, zrealizowanego techniką przetwarzania stosowego, na ciągu o długości I = 9, którego elementy mogą przyjmować M = 4 wartości, przykładowo {0, 1, 2,3}, (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Filtr stosowy - asymetryczny filtr medianowy z aperturą o szerokości 3
Fig. 2.1. Stack filter - window with 3 asymetric median filter

Właściwość progowej dekompozycji sprawia (co ilustruje rys. 2.1.), że przetworzenie M-wartościowego ciągu przez asymetryczny filtr medianowy jest równoważne następującej procedurze:

1) Dekompozycji M-wartościowego ciągu wejściowego w zbiór M-1 ciągów binarnych. k-ty ciąg binarny, gdzie k jest liczbą całkowitą ze zbioru {1, 2, ..., M-1}, jest otrzymywany przez progowanie ciągu wejściowego progiem o wartości k. Przyjmujemy wartość 1 dla elementu ciągu większego lub równego k i O dla elementu ciągu mniejszego od k. Zauważmy, że sumowanie tych M-1 ciągów binarnych daje nam oryginalny ciąg wejściowy (rys. 2.1.).
2) Filtracji każdego ciągu binarnego niezależnie, za pomocą jego własnego binarnego asymetrycznego filtru medianowego. Wszystkie te operacje mogą być wykonane równolegle. Również każdy z filtrów, dzięki ciągom binarnym na wejściu jest realizowany przez odpowiednią funkcję boolowską.
3) Dodaniu elementów ciągów wyjściowych odpowiadających tej samej chwili czasowej.

Kontynuując przykład z rys. 2.1. dla funkcji boolowskiej

$$B(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 + x_2,$$

gdzie x_i, i = 1, 2, 3 są elementami ciągów binarnych i stosując opisaną procedurę ogólną łatwo sprawdzić, że rozpatrywany przetwornik usuwa zakłócenia punktowe, o wartości mniejszej od "tła". Przykładowo 0 w podciągu (22011) w wyniku przetwarzania zastąpione zostanie przez 1 i otrzymamy podciąg (22011). Pozostawia on natomiast zakłócenia punktowe, o wartości większej od "tła" (11322) → (11322) element ciągu o wartości 3 nie został zmieniony).

Za pomocą progowej dekompozycji z wykorzystaniem właściwości układania w stos można zrealizować różne przetworniki zmieniając tylko odpowiednio funkcję boolowską. Dopuszczalne funkcje boolowskie muszą posiadać właściwość układania w stos.

Definicja 2.1

O funkcji binarnej **B** n-wymiarowego argumentu mówimy, że ma właściwość układania w stos, jeżeli:

$$\bar{x} \geq \bar{y} \Rightarrow B(\bar{x}) \geq B(\bar{y}). \tag{2.1}$$

□

Binarny wektor $\bar{x}$ jest większy równy od binarnego wektora $\bar{y}$, jeżeli na każdej pozycji, na której w $\bar{y}$ występuje 1, również w $\bar{x}$ występuje 1.

Podsumowując można stwierdzić, że wszystkie operacje wykonywane w trakcie przetwarzania ciągu (obrazu) przez przetwornik stosowy sprowadzają się do:

a) progowania M-wartościowego ciągu wejściowego,
b) obliczania wartości funkcji boolowskiej dla odpowiednich podciągów,
c) detekcji numeru najwyższego poziomu (wartości k), dla której wartość funkcji boolowskiej wynosi 1.

Na zakończenie wspomnijmy o pewnym zabiegu formalnym. Otóż, aby wejście filtru stosowego było określone dla wszystkich położeń apertury nakładanej na ciąg, umownie rozszerzamy go powtarzając odpowiednią liczbę razy pierwszy i ostatni element ciągu. Bez tego zabiegu apertura filtru obejmowałaby elementy spoza ciągu przy ustawieniu środka apertury na pierwszym lub ostatnim elemencie.

Niech $\bar{s}$ = (s(1), s(2),...,s(L)) będzie M-poziomowym ciągiem o długości L. Wtedy ciągiem rozszerzonym dla apertury o szerokości 2N + 1 jest ciąg:

$$\bar{s}(s(1),\ldots,s(1),s(2),s(3),\ldots,s(L-1),s(L),\ldots,s(L))$$

gdzie s(1) i s(L) są powtórzone N+1 razy.

3. DETERMINISTYCZNE WŁAŚCIWOŚCI PRZETWARZANIA STOSOWEGO

Ponieważ zarówno przetworniki medianowe, jak i inne przetworniki ze statystykami porządkowymi oraz przetworniki stosowe są nieliniowe, nie obowiązuje tutaj zasada

superpozycji i nie możemy zdekomponować analizy tych przetworników do rozważania przetwarzania obrazu idealnego i osobno przetwarzania addytywnego szumu. Zamiast tego musimy podejść do problemu całościowo i zapytać, które cechy obrazu wejściowego filtr stosowy zachowuje, a które eliminuje. Takie podejście prowadzi do idei niezmiennika [6, 2-5], który jest obrazem niezmieniającym się w wyniku przetwarzania stosowego. Ponieważ przetworniki stosowe są uogólnieniem filtracji medianowej, ich niezmienniki można analizować w podobny sposób. Zostaną też wyprowadzone warunki istnienia obrazów niezmienniczych i warunki zbieżności dowolnych obrazów do obrazów niezmienniczych w trakcie powtarzania przetwarzania. Jako że struktura niezmienników filtracji medianowej jest dobrze znana, pokazane będzie, jakie jeszcze inne filtry stosowe zachowują niezmienniki filtracji medianowej.

Zdefiniujemy obecnie pojęcie niezmiennika.

Definicja 3.1

Niezmiennikiem (root) przetwornika stosowego S jest każdy ciąg wejściowy **a**, dla którego

$$S(\mathbf{a}) = \mathbf{a}.$$

□

Przykładowo niezmiennikiem filtracji medianowej z aperturą o szerokości 2N + 1 są ciągi składające się z podciągów monotonicznych o szerokości co najmniej N + 1.

Definicja 3.2

Ciąg jest lokalnie monotoniczny przy aperturze 2N+1, jeżeli każdy jego podciąg o długości N + 1 jest monotoniczny.

□

Notacja

Dla prostoty przedstawienia ciągów binarnych będziemy używać 0^m i 1^m dla zapisania 0 lub 1 powtórzonych m-razy, natomiast $\mathbf{B}(1^m0^m)$ oznacza wartość wyrażenia boolowskiego **B** od 2m zmiennych dla m pierwszych zmiennych równych 1 i m drugich zmiennych równych 0.

□

Na wstępie zauważmy, że każdy filtr stosowy (FS) posiada jakieś niezmienniki, ponieważ każdy FS zachowuje sygnały stałe. Jeśli dodatnia funkcja boolowska B nie jest równa identycznie 0 lub 1, to $\mathbf{B}(0^n) = 0$, a $\mathbf{B}(1^n) = 1$. Stąd tez filtr binarny bazujący na funkcji **B** będzie zachowywał wszystkie stałe sygnały binarne, co prowadzi do następującego wyniku:

Twierdzenie 3.1

Jeżeli S_B jest przetwornikiem stosowym bazującym na nietrywialnej dodatniej funkcji boolowskiej **B**, to każdy ciąg stałowartościowy jest niezmiennikiem S_B.

□

Jeśli natomiast **B** jest identyczne z 0, to S_B będzie zachowywał tylko stałe sygnały o wartości 0, a jeśli **B** jest identyczne z 1, to S_B będzie zachowywał tylko stałe sygnały o wartości M-1.

Aby znaleźć nietrywialne niezmienniki filtrów stosowych, zaczniemy od analizy przetworników stosowych zachowujących ciągi rosnące i malejące oraz takich, które zachowują niezmienniki filtracji medianowej.

Twierdzenie 3.2

Załóżmy, że przetwornik stosowy S_B, bazujący na dodatniej funkcji boolowskiej **B**, ma aperturę o szerokości 2N+1. S_B zachowuje wszystkie rosnące (niemalejące) ciągi wtedy i tylko wtedy, jeśli

$$B(0^N 1^{N+1}) = 1 \quad \text{i} \quad B(0^{N+1} 1^N) = 0.$$

□

Dowód twierdzenia 3.2

Wszystkie rosnące M-poziomowe ciągi dekomponują się na ciągi binarne o następujących postaciach:

... 0 0 0 0 ... lub ... 1 1 1 1 ... lub ... 0 0 0 0 1 1 1 1 1 .....

Stąd ciąg binarny w aperturze każdego binarnego filtru składającego się na przetwornik S_B będzie miał postać:

$$0^k 1^{2N+1-k}$$

Jeśli $k \le N$, to wtedy centralny bit będzie równy 1, natomiast jeśli $k \le N+1$, to będzie on równy 0. Ponadto jeśli $k_1 < k_2$, to wtedy $0^{k2}\, 1^{2N+1-k2} < 0^{k1}\, 1^{2N+1-k1}$. Ponieważ $(\bar{x} \le \bar{y}) \Rightarrow B(\bar{x}) \le B(\bar{y})$, mamy co następuje:

$$\text{jeśli} \quad (B(0^N 1^{N+1}) = 0 \quad \text{i} \quad B(0^{N+1} 1^N) = 1), \quad \text{to:}$$

$$B(0^k 1^{2N+1-k}) = 0 \quad \text{dla} \quad k \ge N+1 \qquad (a)$$

$$B(0^k 1^{2N+1-k}) = 1 \quad \text{dla} \quad k \le N \qquad (b)$$

Dlatego też, ponieważ B zachowuje wszystkie binarne ciągi rosnące, S_B zachowuje również rosnące ciągi M-wartościowe. Odwrotnie, jeśli S_B zachowuje wszystkie rosnące sygnały M-poziomowe, to wtedy (a) i (b) obowiązują. W szczególności dla $k = N$, $\mathbf{B}(0^N 1^{N+1}) = 1$, a dla $k = N + 1$, $\mathbf{B}(1^N 0^{N+1}) = 0$.

□

Czasem jest wygodniej przedstawić funkcję boolowską przetwornika stosowego w postaci wyrażenia logicznego, niż w postaci tablicy stanów. Twierdzenie 3.2. przeformułowane do takiej postaci przedstawia

Wniosek 3.1

Niech S_B i **B** będą takie jak w twierdzeniu 3.2. S_B zachowuje M-wartościowe ciągi rosnące wtedy i tylko wtedy, gdy:

a) każdy składnik zminimalizowanej postaci sumacyjnej (ZPS) wyrażenia określającego funkcję $\mathbf{B}(x_1, x_2, \ldots, x_{2N+1})$ i zawierający zmienne ze zbioru $\{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots, x_{2N+1}\}$ zawiera x_{N+1};

b) istnieje tam co najmniej jeden taki składnik.

□

Dowód wniosku 3.1

Z twierdzenia 3.3. potrzebujemy tylko udowodnić, że a) i b) we wniosku są równoważne:

$$\mathbf{B}(0^N 1^{N+1}) = 1$$

$$\mathbf{B}(0^{N+1} 1^N) = 0 \quad .$$

Jeśli a) i b) są prawdziwe, to wtedy:

z tego, że ($x_{N+1} = 0$ i $x_{N+2} = x_{N+3} = \ldots = x_{2N+1} = 1$) wynika, że

$$(\mathbf{B}(x_1, x_2, \ldots, x_{2N+1}) = 0, \text{ to jest } \mathbf{B}\,(0^{N+1} 1^N) = 0).$$

Zauważmy, że w tym przypadku każdy składnik, który nie zależy od $\{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots, x_{2N+1}\}$, będzie równy 0.

Również jeśli a) i b) są prawdziwe, to wtedy:

z tego, że ($x_{N+1} = x_{N+2} = \ldots x_{2N+1} = 1$) wynika, że

$$(\mathbf{B}(x_1, x_2, \ldots, x_{2N+1}) = 1, \text{ to jest } \mathbf{B}(0^N 1^{N+1}) = 1).$$

Reasumując:

$(B(0^N 1^{N+1}) = 1) \Rightarrow$

$(\exists\ \bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{2N+1}) \leq 0^N 1^{N+1}$ takie, że $B(\bar{y}) \Rightarrow 1) \Rightarrow$

(istnieją składniki w ZPS wyrażenia dla **B**, które zależą tylko od $\{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots, x_{2N+1}\}$)

$(B(0^{N+1} 1^N) = 0) \Rightarrow$

(żaden składnik **B** zależny tylko od $\{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots, x_{2N+1}\}$ nie może być równy 1, jeśli $x_{N+1} = 0$) $\Rightarrow$ (wszystkie składniki **B**, które zależą tylko od zmiennych ze zbioru $\{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots, x_{2N+1}\}$, muszą zawierać x_{N+1}).

□

Na przykład, dla apertury o szerokości 3, FS bazujący na funkcji $B(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 x_3$ będzie zachowywał ciągi rosnące.

Poprzez odwrócenie kolejności zmiennych w poprzednich rozważaniach otrzymujemy podobne wyniki dla filtrów zachowujących ciągi malejące.

Twierdzenie 3.3

Niech S_B będzie M-poziomowym FS z aperturą o szerokości 2N+1, S_B zachowuje niezmienniki filtracji medianowej z aperturą o szerokości 4N+1 wtedy i tylko wtedy, gdy S_B zachowuje wszystkie M-poziomowe ciągi lokalnie monotoniczne w obszarze 2N+1.

□

Wykorzystując poprzednie wyniki możemy sklasyfikować filtry stosowe według lokalnie monotonicznych sygnałów, które te filtry zachowują. FS może zachowywać nie tylko sygnały monotoniczne, ale również nie będące lokalnie monotonicznymi.

Zauważmy, że jeśli filtr stosowy z aperturą szerokości 2N+1 (FS(2N+1)) zachowuje niezmienniki filtracji medianowej (FM) o aperturze większej od 4N+1, to musi również zachowywać niezmienniki FM o aperturze równej 4N+1. Również jeśli FS zachowuje niezmienniki FM o aperturze mniejszej od 4N+1, to musi zachowywać również wszystkie niezmienniki FM dla większych szerokości apertury, włączając 4N+1. Zatem jeśli filtr stosowy zachowuje niezmienniki dowolnej filtracji medianowej, to musi spełniać twierdzenie 3.3.

Teraz rozważmy, czy taki filtr zachowuje niezmienniki FM dla apertury o szerokości mniejszej od 2N + 1.

Twierdzenie 3.4

Załóżmy, że FS $S_B(2N+1)$ bazuje na dodatniej funkcji boolowskiej **B**. S_B zachowuje niezmienniki FM (2N'+1), gdzie: (O ≤ N' ≤ N) wtedy i tylko wtedy, jeśli spełnia warunki:

a) $B(0^m 1^{N'+1} 0^{2N-N'-m}) = 1 \quad N-N' \le m \le N$

b) $B(1^m 0^{N'+1} 1^{2N-N'-m}) = 0 \quad N-N' \le m \le N$

□

Dowód twierdzenia 3.4

Spełnianie warunków a) i b), gdy S_B zachowuje niezmienniki FM (2N'+1) wynika z tego, że wszystkie stałe obszary długości 2N+1 lub więcej są zachowywane.

Zachowywanie niezmienników FM (2N'+1), gdy spełnione sa warunki a) i b), wynika z właściwości dodatnich funkcji boolowskich.

Jeżeli zachodzi a), to wszystkie stałe obszary jedynek o długości większej lub równej N"=1 są zachowywane.

Jeżeli zachodzi b), to wszystkie stałe obszary zer o długości większej lub równej N'+1 są zachowywane.

Ponieważ **B** zachowuje wszystkie binarne niezmienniki filtracji medianowej z aperturą szerokości 2N'+1, zatem S_B musi zachowywać wszystkie M-poziomowe niezmienniki tej samej filtracji.

□

Warunki twierdzenia 3.4. zapewniają, że każdy filtr binarny w S_B będzie zachowywał podciągi składające się z co najmniej N'+1 jedynek lub zer. Stąd każdy binarny filtr będzie zachowywał wszystkie binarne niezmienniki FM(2N'+1) i S_B zachowuje wszystkie M-poziomowe niezmienniki tego samego filtru.

Niech będzie dana dodatnia funkcja boolowska n zmiennych $B(\bar{x}_{b,n})$ i ustalony ciąg binarny $\bar{y}_{b,n}$; $B(\bar{y}_{b,n}) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy przyporządkowanie $x_i = y_i$, i = 1,2,...,n powoduje, że wartość co najmniej jednego składnika w wyrażeniu zredukowanym B wynosi 1. Stąd możemy otrzymać wersję twierdzenia 3.4. w postaci wyrażenia boolowskiego:

Wniosek 3.2

Niech S_B i B będą jak powyżej i $0 \le N' \le N$. Wtedy S_B zachowuje niezmienniki FM(2N"+1) wtedy i tylko wtedy, gdy:

a) dla każdego m takiego, że $N-N' \le m \le N$, postać zredukowana wyrażenia **B** zawiera składnik, który zależy od zmiennych ze zbioru:

$$\{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+N'-1}\} \quad \text{i}$$

b) dla każdego m, $N-N' \le m \le N$, nie ma w postaci zredukowanej wyrażenia **B** składnika, który byłby zależny od zmiennych ze zbioru:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \cup \{x_{M+N'+2}, x_{m+N'+3}, \ldots, x_{2N-N'-m}\}$$

□

Na koniec omawiania właściwości deterministycznych rozważymy właściwość zbieżności filtracji stosowej do zmiennika. Podany zostanie **warunek wystarczający zbieżności** (dla dowolnego ciągu na wejściu FS) wyjścia filtru stosowego do zmiennika filtracji medianowej w skończonej liczbie przejść przez filtr. W ogólności FS może się nigdy nie zbiegać, może okresowo powtarzać te same sygnały na wyjściu lub zbiegać się do innych niezmienników niż FM dla tej samej szerokości apertury.

Twierdzenie 3.5

Niech S_B będzie M-poziomowym FS z aperturą o szerokości 2N+1, opartym na dodatniej funkcji boolowskiej **B**. Każdy rozszerzony ciąg M-poziomowy zbiegnie się do niezmiennika filtracji medianowej (2N+1) po skończonej liczbie przejść przez S, jeżeli:

a) $\mathbf{B}(0^N 1^{N+1}) = 1$ i dla $\bar{\mathbf{x}}_b < 0^N 1^{N+1}$, $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}_b) = 0$;

b) $\mathbf{B}(1^N 0^{N+1}) = 0$ i dla $\bar{\mathbf{x}}_b > 1^N 0^{N+1}$, $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}_b) = 1$;

c) $\mathbf{B}(1^{N+1} 0^N) = 1$ i dla $\bar{\mathbf{x}}_b < 1^{N+1} 0^N$, $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}_b) = 0$;

d) $\mathbf{B}(0^{N+1} 1^N) = 0$ i dla $\bar{\mathbf{x}} > 0^{N+1} 1^N$, $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}_b) = 1$;

□

Te cztery warunki zapewniają, że podciągi inwariantne znajdujące się już na końcach rozszerzonego ciągu wydłużają się w trakcie powtarzania filtracji. Przy każdym powtórzeniu filtracji każdy z tych inwariantnych podciągów zwiększa się do wewnątrz o co najmniej jeden element. Gdy dwa takie podciągi spotykają się, cały ciąg staje się niezmiennikiem filtracji medianowej. Mamy tym samym ograniczenie na liczbę przejść koniecznych do osiągnięcia niezmiennika.

Dowód twierdzenia 3.5

Załóżmy, że a) - d) obowiązują. Rozważymy zbieżność będącą wydłużeniem się podciągów inwariantnych (podciągów mających pewne punkty takie same jak niezmienniki) z końców przetwarzanego przez filtr ciągu rozszerzonego. Na końcach ciągu mamy podciągi inwariantne składające się z końcowych bitów ciągu binarnego plus dodane bity z ze stałego podciągu o długości N+1. Jeżeli potrafimy wykazać, że te skrajne podciągi rozszerzają się do środka po każdym przejściu przez filtr (wyjąwszy przypadek, gdy ciąg jest niezmiennikiem), wtedy mamy dowiedzione, że ciąg zbiegnie się do niezmiennika w skończonej liczbie przejść przez filtr.

Jeśli lewy bit oryginalnego ciągu (bez dodanych na początku i na końcu bitów) jest równy zero, to apertura wyśrodkowana na pierwszy bit będący jedynką ma postać:

$$0^N, 1, x_{N+2}, x_{N+3}, \ldots, x_{2N+1} \cdot$$

Jeśli a) obowiązuje, to filtr zostawi te pierwszą jedynkę niezmienioną wtedy i tylko wtedy, gdy $x_{N+2}, x_{N+3}, \ldots, x_{2N+1} = 1$, to jest wtedy, gdy ta jedynka stanowi lewy koniec podciągu co najmniej N+1 jedynek. W przeciwnym wypadku ta jedynka stanie się zerem. Podobnie b) kryje w sobie przypadek, gdy lewobrzeżny bit jest jedynką, podczas gdy c) i d) są związane z prawym końcem wprowadzanego ciągu. Razem od a) do d) implikują, że dokąd cały ciąg nie jest niezmiennikiem, dotąd końcowe obszary niezmiennicze muszą się rozwijać do wewnątrz przy każdym przejściu przez filtr. Dla stałych ciągów żaden z tych warunków nie ma zastosowania, ale te są trywialnym niezmiennikiem FM.

□

Wniosek 3.3

Niech S_B będzie FS(2N+1) spełniającym warunki poprzednich twierdzeń. Wtedy dowolny ciąg oryginalny o długości L będzie w trakcie powtarzania jego przejść przez S_B i zbiegał się do niezmiennika FM(2N+1) w co najwyżej [(L-2)/2] przejściach przez filtr S_B.

□

Ostatecznie otrzymujemy wersję twierdzenia 3.5. w postaci zminimalizowanego wyrażenia boolowskiego dla funkcji **B**:

Wniosek 3.4

Niech S_B będzie FS(2N+1) opartym na **B**. Wtedy każdy M-poziomowy ciąg wejściowy będzie zbiegał się do niezmiennika filtracji medianowej (2N+1) w skończonej liczbie przejść przez S_B, jeżeli:

1) $x_1, x_2 \ldots x_{N+1}$ jest składnikiem ZPS **B**;
2) $x_{N+1} x_{N+2} \ldots x_{2N+1}$ jest składnikiem ZPS **B**;
3) dla każdego = 1,2,...,N+1 istnieje składnik w ZPS **B** taki, że zawiera tylko x_i oraz zmienne ze zbioru:

$\{x_{N+2}, x_{N+3}, \ldots, x_{2N+1}\}$;

4) dla każdego i = N+1, N+2,..,2N+1 istnieje składnik w ZPS **B** taki, że zawiera tylko x_i oraz zmienne ze zbioru: $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$;

□

Dowód wniosku 3.4

Chcemy pokazać, że warunki tego wniosku są równoważne warunkom twierdzenia 3.5. Rozważając tamte warunki w odwrotnej kolejności, mamy co następuje:

a) $(B(0^N1^{N+1}) = 1$, ale dla $\bar{x}_b < 0^N1^{N+1}$, $B(\bar{x}_b) = 0 \Leftrightarrow$ (istnieje w ZPS **B** składnik, który zależy od zmiennych ze zbioru $\{x_{N+1}x_{N+2}\ldots x_{2N+1}\}$, ale żaden ze składników nie zależy od odpowiedniego jego podzbioru) $\Leftrightarrow$ ($x_{N+1}x_{N+2}\ldots x_{2N+1}$ jest składnikiem w ZPS **B**).

c) $(B(1^{N+1}0^N) = 1$, ale dla $\bar{x}_b < 1^{N+1}0^N$, $B(\bar{x}_b) = 0) \Leftrightarrow (x_1x_2\ldots x_{N+1}$ jest składnikiem w ZPS **B**).

b) $(B(1^N0^{N+1}) = 0$, ale dla $\bar{x}_b > 1^N0^{N+1}$, $B(\bar{x}_b) = 1) \Leftrightarrow (B(1_N0^{N+1}) = 0$, ale $B(1^N0^k10^{N-k}) = 1$ dla każdego k = 0,1,.. N) $\Leftrightarrow$ (dla każdego i = N+1, N+2,..., 2N+1, istnieje składnik w ZPS **B**, który zawiera x_i oraz zmienne ze zbioru $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$).

d) $(B\ (0^{N+1}1^N) = 0$, ale dla $\bar{x}_b > 0^{N+1}1^N$, $B(\bar{x}_b) = 1) \Leftrightarrow$ (dla każdego i = 1,2,...,N+1, istnieje składnik w ZPS **B**, który zawiera tylko x_i oraz zmienne ze zbioru $\{x_{N+2}, x_{N+3}, \ldots, x_{2N+1}\}$)

□

Faktycznie filtr medianowy nie jest jedynym filtrem spełniającym twierdzenie 3.5. lub wniosek 3.4. (dla N=1 jedynym jest FM).

Przykład 3.1

Dla N > 1, dodatnia funkcja:

$$B(x_1,\ldots,x_{2N+1}) = (x_1x_2\ldots x_N)(x_{N+1}+x_{N+2}+\ldots+x_{2N+1}) + \\ +(x_{N+2}x_{N+3}\ldots x_{2N+1})(x_1+x_2+\ldots+x_N) \tag{3.1}$$

definiuje jeszcze inny filtr spełniający warunki wniosku 3.4.

□

Wszystkie te filtry mają dokładnie takie same niezmienniki i dla każdego filtru dowolny ciąg wejściowy zbiega się do niezmiennika. Tak więc mogą się one różnić jedynie szybkością osiągania niezmiennika.

4. PRZYKŁADY I ZASTOSOWANIA PRZETWORNIKÓW STOSOWYCH DLA APERTUR O SZEROKOŚCI TRZY

Na podstawie [2] wiemy, że jest dokładnie 20 dodatnich funkcji logicznych trzech zmiennych, 7581 funkcji pięciu zmiennych i nieznana, ale bardzo duża liczba dodatnich funkcji logicznych siedmiu zmiennych. Dlatego sensowne będzie wyliczenie jedynie filtrów stosowych dla apertur o szerokości trzy. Wyliczamy tutaj dodatnie funkcje logiczne tworzące filtry zbieżne do niezmienników, a także rozważamy właściwość zbieżności filtracji. Wśród tych filtrów jest kilka bardzo użytecznych. Ważną rzeczą jest to, że wszystkie dodatnie funkcje trzech zmiennych są funkcjami progującymi [7,8]. Dlatego też wszystkie odnośne filtry stosowe są uogólnionymi filtrami ze statystykami porządkowymi.

W następującej klasyfikacji wymienione będą filtry stosowe według ich niezmienników. Dla każdego filtru zostanie podana dodatnia funkcja boolowska i równoważna jej funkcja rzeczywista ilustrująca działanie filtru stosowego. Można pokazać, że każdy z tych filtrów posiada niezmienniki, które można otrzymać iteracyjnie rozpoczynając od dowolnego początkowego ciągu wejściowego. Wszystkie te filtry zostały zebrane w tabelach: tab. 4.1. do 4.4.

Tabela 4.1

Filtry stosowe zachowujące tylko sygnały stałe		
$B(x_1, x_2, x_3)$	$S_B(s_1, s_2, s_3)$	Uwagi
0	0	dowolne wejście filtruje do zera
1	M -1	dowolne wejście filtruje do M-1
x_1	s_1	działanie przesuwają w lewo
x_3	s_3	działanie przesuwają w prawo
$x_1 \cdot x_3$	$\min(s_1, s_3)$	
$x_1 + x_3$	$\max(s_1, s_3)$	
$x_1 + x_2 + x_3$	$\min(s_1, s_2, s_3)$	wybór minimum
$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$\max(s_1, s_2, s_3)$	wybór maksimum

Tabela 4.2

Filtry stosowe zachowujące tylko sygnały rosnące	
$B(x_1, x_2, x_3)$	$S_B(s_1, s_2, s_3)$
$x_2 \cdot x_3$	$\min(s_2, s_3)$
$x_1 + x_2$	$\max(s_1, s_2)$
$x_1 + x_2 \cdot x_3$	drugi największy element zbioru $\{s_1, s_1, s_2, s_3\}$
$x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$	drugi najmniejszy element zbioru $\{s_1, s_2, s_3, s_3\}$

Tabela 4.3

Filtry stosowe zachowujące tylko sygnały malejące	
$B(x_1, x_2, x_3)$	$S_B(s_1, s_2, s_3)$
$x_1 \cdot x_2$	$\min(s_2, s_2)$
$x_2 + x_3$	$\max(s_2, s_3)$
$x_3 + x_1 \cdot x_2$	drugi największy element zbioru $\{s_1, s_1, s_3, s_3\}$
$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$	drugi najmniejszy element zbioru $\{s_1, s_1, s_2, s_3\}$

Tabela 4.4

Filtry stosowe zachowujące niezmienniki FM i/lub inne sygnały		
$B(x_1, x_2, x_3)$	$S_B(s_1, s_2, s_3)$	Uwagi
x_2	s_2	funkcja tożsamości zachowuje wszystkie sygnały
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$	mediana (s_1, s_2, s_3)	filtr medianowy
$x_2 + x_1 x_3$	drugi największy element ze zbioru $\{s_1, s_2, s_2, s_3\}$	eliminuje impulsy mniejsze od tła
$x_1x_2 + x_2x_3$	drugi najmniejszy element ze zbioru $\{s_1, s_2, s_2, s_3\}$	eliminuje impulsy większe od tła

Po pominięciu dwóch pierwszych trywialnych filtrów i odpowiadających im funkcji logicznych mamy do rozważenia siedemnaście filtrów. Z tych natomiast, jak wiemy, funkcje maksimum i minimum czynią każdy sygnał wejściowy zbieżny do sygnału stałego, a filtr medianowy filtruje sygnał do jakiegoś niezmiennika. Ostatecznie przez użycie operacji dualnych i odwrócenia czasu (zmiana kolejności zmiennych) możemy uprościć zadanie jeszcze bardziej i ostatecznie wystarczy przeanalizować działanie filtrów opartych na funkcjach: x_1, x_1x_3, x_2x_3, $x_1x_3 + x_2x_3$ i $x_2 + x_1x_3$.

Rozważmy zatem następujące przypadki:

$$B(x_1, x_2, x_3) = x_1$$

S_B będzie filtrował dowolny wprowadzony sygnał do sygnału stałego przez wydłużanie stałego podciągu występującego na lewym końcu ciągu rozszerzonego.

$$B(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_3$$

Jeśli $x_2 = 0$, to wtedy:
$B(x_1, x_2, x_3) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy ($x_1 = 0$ lub $x_2 = 0$).
Jeśli $x_2 = 1$, to wtedy:
$B(x_1, x_2, x_3) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy ($x_1 = 1$ i $x_2 = 1$).

Stąd każdy podciąg w ciągu binarnym, zawierający 2 lub więcej zer, będzie rozszerzany w obu kierunkach przy każdym przejściu przez filtr. Natomiast dowolny podciąg dwóch lub więcej jedynek będzie się skracał o dwa elementy przy każdym przejściu przez filtr. Podciąg postaci ...0 1 0 1 0 1 ..., ograniczony przez podciągi jedynek będzie wydłużał się kosztem skracania podciągów jedynek aż do ich całkowitego zaniku. Dowolny ciąg będzie się zbiegał do ciągu stałego, jeśli jeden końcowy element tego ciągu jest zerem. Stały podciąg zer na tym końcu będzie się rozszerzał do wewnątrz przy każdym przejściu przez filtr. Jeśli ciąg składa się z samych jedynek, to pozostanie on niezmieniony. Jeżeli końcowym elementem jest jedynka i występuje gdziekolwiek zero, to podciąg jedynek na końcu ciągu rozszerzonego będzie się kurczył przy każdym przejściu przez filtr, aż ostatni element stanie się zerem. Równocześnie drugi koniec podciągu zer będzie się przesuwał do wewnątrz. Dlatego jeżeli ciąg zawiera jakiekolwiek zero, to ostatecznie będzie się zbiegał do zera na wszystkich pozycjach.

$$\underline{B(x_1, x_2, x_3) = x_2 \cdot x_3}$$

Funkcja ta jest równoważna $S_B = \min(x_2, x_3)$. Widzimy, że dowolny minimalny element podciągu będzie się przesuwał w lewo przy każdym przejściu przez filtr, dopóki nie napotka elementu mniejszego. Przesuwający się w lewo element minimalny wydłuża podciąg identycznych z nim elementów minimalnych. Ostatecznie niezmiennik jest określony przez kolejne, licząc od prawej strony, minimalne wartości elementów przetwarzanego ciągu

$$\underline{B(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3}$$

Jeśli $x_2 = 0$, to wtedy:
$B(x_1, x_2, x_3) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy ($x_1 = 0$ lub $x_3 = 0$).
Jeśli $x_2 = 1$, to wtedy:
$B(x_1, x_2, x_3) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy ($x_3 = 1$).

W czasie każdego przejścia przez filtr binarny, każdy podciąg zerowy będzie się rozszerzał w lewo co najmniej o jedno zero z wyłączeniem odosobnionym zer, które będą przesuwane w lewo przy kolejnych przejściach. Odosobnione zero przestanie się przemieszczać, gdy napotka większy podciąg zer. To i rozszerzanie się takich podciągów w lewo zapewnia, że ostatecznie binarny niezmiennik będzie sygnałem wzrastającym. Dlatego też filtr oparty na tej funkcji będzie filtrował dowolny wielopoziomowy sygnał do sygnału wzrastającego.

$$\underline{B(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_1 \cdot x_3}$$

Jeśli $x_2 = 1$, to wtedy:
$B(x_1, x_2, x_3) = 1$ bez względu na to jakie są x_1 i x_3.
Jeśli $x_2 = 0$ to wtedy:
$B(x_1, x_2, x_3) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy ($x_3 = 0$ lub $x_3 = 0$).

Stad filtr binarny będzie wycinał 0 w podciągu 1 0 1, ale będzie zachowywał niezmieniony każdy inny element przetwarzanego ciągu. S_B będzie wycinał wszystkie "opadające impulsy" w przetwarzanym ciągu w jednym przejściu zachowując równocześnie wszystkie inne cechy.
Niezmiennik tego filtru otrzymuje się już po jednokrotnym przejściu przez filtr.

Ponieważ pięć omówionych powyżej filtrów daje wejście zbieżne do odpowiednich niezmienników, zatem również inne filtry oparte na funkcjach boolowskich trzech zmiennych muszą być zbieżne do swoich niezmienników.

LITERATURA

[1] Peret D., Wendt, Edward J. Coyle, Neal C, Gallagher: Stack Filters, IEEE Transactions On Acoustics, Speech And Signal Processing, vol. ASS-34, pp. 898-911, August 1986.
[2] E.N. Gilbert: Lattice-teoretic properties of frontal switching functions, J. Math. Phys., vol. 33, pp. 57-67, Aprill 1954.
[3] Jean-Hsang Lin, Thomas M. Sellke, Edward J. Coyle: Adaptive stack filtering under the mean absolute error criterion, IEEE Transactions On Acoustics, Speech And Signal Processing, vol 38, pp. 938-953, June 1990.
[4] Threshold decomposition of multidimensional ranked-order operations, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-32, pp. 445-450, May 1985.
[5] T.A. Nodes, N. C. Gallagher" Theoretical results on the properties of median type filters, School Elac, Eng., Purdue Univ., West Lafayette, IN, Tech, Rep. EE 82-32, September 1982.
[6] N. C. Gallagher, G. L. Wise: A theoretical analysis of the properties of medians filters, IEEE Transactions On Acoustics, Speech And Signal Processing, vol ASSP-29, pp. 1136-1141, December 1981.
[7] E. Ataman. V. K. Aatre, K. M. Wong: Statistical properties of median filters, IEEE Transactions On Acoustics, Speech An Signal Processing, vol. ASSP-29, pp. 1073-1075, October 1981.
[8] P.M. Lewis, C. L. Coates: Threshold logic, New York: Wiley, 1967.
[9] Z. Kuś, K. Wojciechowski: Statystyczne właściwości przetwarzania stosowego, złożone w redakcji Zeszytów Naukowych Politechniki Śląskiej.

Recenzent: Doc. dr inż. Bogdan Wolczak

Wpłynęło do Redakcji 26.10. 1993 r.

Abstract

In this work deterministic properties od stack filtration are presented. The basic terms of stack processing and appropriate definitions are considered.

The paper contains an analysis of interference between Boolean function that provides a basis for a stack filter and a from of such element's roots. Neccessary and sufficinet conditions for convergence of stacking filter output to a root of median filtration are given. Existence of stack filters that differ from the ones in median filtration, while preserving roots of median filtration is proven.

Stack filters based on 3-variable Boolean function are calassified concerning their ability to preserve particular roots and subsequently their performance is analysed.

In general, tehe results of image processing and filters that perform these tasks can be described in statical, "frequential" or root categories. The approach proposed in this work is based on the idea of root, thus characterizing filtration results most directly, concerning three mentioned ways. This is an effect of examining changes of particular parts of image emerging during processing. The very concept of developing such a from of processing evaluation has been created on the basis of median filter features, so called median filtration roots. To make it contrary to probalistic on the evaluation based on root examining is further called the deterministic features of processing.