ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: AUTOMATYKA z.113 Nr kol. 1246

Jacek ŁĘSKI

NOWA METODA TŁUMIENIA ZAKŁÓCEŃ MIĘŚNIOWYCH SYGNAŁU EKG W BADANIACH WYSIŁKOWYCH PRZEZ WAŻONE UŚREDNIANIE W DZIEDZINIE CZASU

Streszczenie. Powszechnie stosowana metoda uśredniania sygnału w dziedzinie czasu zakłada równość wag uśrednianych okresów sygnału. Jak wykazano, jest ona optymalna przy założeniu stacjonarności zakłóceń. Jednak zakłócenia mięśniowe sygnału EKG nie są stacjonarne. Artykuł przedstawia metodę doboru optymalnych wag uśrednianych okresów sygnału przy wykorzystaniu teorii filtru Kalmana.

A NEW METHOD FOR ATTENUATION MUSCLE NOISE OF EXERCISE ECG SIGNAL BY WEIGHTED AVERAGING IN TIME DOMAIN

Summary. Traditional method of signal averaging in time domain usually assumes equal weights of averaged signal cycles. The method is optimal under assumption of stationarty of the noise. But muscle noise is usually not stationary. The paper deals with the method based on Kalman filter theory provides optimal weights of averaged signal cycles.

НОВЫЙ МЕТОД ПОДАВЛЕНИЯ МЫШЕЧНЫХ ПОМЕХ СИГНАЛА ЭКГ В УСИЛИЕВЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ВЕСОВОЕ УСРЕДНЕНИЕ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Резюме. Общепринятый метод усреднения сигнала во временной области предполагает одинаковые значения весов усредняемых периодов сигнала. Как

уже показано метод является оптимальным, если одновременно принять предпосылку о стационарности помех. Но мышечные помехи сигнала ЭКГ нестационарны. Статья представляет метод подбора оптимальных весов усредняемых периодов сигнала с использованием теории фильтра Кальмана.

1. STOSOWANE METODY UŚREDNIANIA SYGNAŁU W DZIEDZINIE CZASU

Stosowane algorytmy można podzielić na dwie klasy: przetwarzanie blokowe i rekurencyjne [17].

Przetwarzanie blokowe prowadzi do jednej estymaty morfologii zespołu P-QRS-T na pewien interwał czasu. W pierwszych systemach analizę dzielono na n-sekund zbierania danych oraz m-sekund ich przetwarzania. Powodowało to utratę pewnej części zapisu. Nie jest to dopuszczalne w badaniach wysiłkowych ze względu na bezpieczeństwo pacjenta. Rozwój komputeryzacji spowodował, że obecnie przetwarzane są sąsiadujące bloki danych. Wybór długości bloku podyktowany jest kompromisem pomiędzy taką długością, aby można śledzić powolne zmiany obniżenia odcinka ST, a taka liczbą zawartych w bloku zespołów QRS, aby zapewnić odpowiednią redukcję zakłóceń. Rozsądnym kompromisem jest czas 10 do 15 sekund.

Dwoma stosowanymi estymatami morfologii zespołu P-QRS-T w przetwarzaniu blokowym są średnia i mediana wartość próbek sygnału EKG scentrowanych za pomocą punktu centrującego FP [4]. Estymaty te liczone są punkt po punkcie, tzn. estymata każdego punktu liczona jest niezależnie od estymaty innego punktu. Zastosowanie średniej prowadzi do większego tłumienia zakłóceń mięśniowych. Z drugiej strony stosowanie mediany powoduje mniejszą czułość estymaty na próbki "obce", np. artefakty szpilkowe czy włączenie do uśredniania zespołów QRS należących do innej klasy [15].

Inną stosowaną metodą jest obliczanie estymaty jako średniej z wartości próbek uporządkowanych po odrzuceniu wartości ekstremalnych. W pracy [14] opisana jest metoda oddzielnego przetwarzania nisko- i wysokoczęstotliwościowych składników sygnału EKG. Estymata morfologii P-QRS-T obliczana jest, jako średnia obu składników.

Przetwarzanie rekurencyjne prowadzi do zmiany estymaty morfologii zespołu P-QRS-T przy wystąpieniu każdego zespołu QRS. Metodę przetwarzania rekurencyjnego można zapisać jako [17]:

$$x_k(l) = x_k(l-1) + \alpha\psi[r_k(l) - x_k(l-1)], \tag{1}$$

gdzie:

$r_k(l)$ - wartość k-tej próbki l-tego zakłóconego P-QRS-T,

$x_k(l)$ - wartość k-tej próbki l-tego uśrednionego P-QRS-T,

α - stały parametr,

$\psi(\cdot)$ - pewna funkcja,

Stosowane jest rozwiązanie $\psi(x) = x$. Współczynnik α wybierany jest z zakresu <0,1>. Decyduje on o wadze, z jaką uwzględniania jest poprzednia estymata morfologii P-QRS-T, oraz wyznacza pamięć algorytmu:

$$N_M = \frac{1-\alpha}{\alpha} \tag{2}$$

N_M - liczba zespołów P-QRS-T uwzględnianych przy obliczaniu estymaty. Jeżeli $r_k(l)$ odpowiada "obcej" próbce, wtedy $r_k(l) - x_k(l-1)$ przyjmuje dużą wartość i ma duży wpływ na obliczenie estymaty. Prostą metodą zapobiegająca temu jest zastosowanie $\psi(x) = \mathrm{sign}(x)$ oraz dodatniego współczynnika α. W ten sposób w zależności od znaku różnicy $r_k(l) - x_k(l-1)$ modyfikujemy o α dawną wartość estymaty. Przez zwiększanie wartości α powodujemy, że estymata P-QRS-T nadąża za zmianami obniżenia odcinka ST, ale obniżamy tłumienie zakłóceń.

2. WYKORZYSTANIE FILTRU KALMANA DO UŚREDNIANIA SYGNAŁU

Sygnał EKG jest guasi-okresowy, tzn. powtarza się ze zmiennym okresem. Właściwość te wykorzystujemy do tłumienia zakłóceń sygnału. Model sygnału EKG uwzględniający jego quasi-okresowość ma postać:

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{x}(k) \\ \underline{z}(k) = \underline{x}(k) + \underline{v}(k) \end{cases} \tag{3}$$

gdzie:

$$\underline{x}(k) = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{CP,k} \\ \vdots \\ x_{j,k} \end{bmatrix} \text{ - wektor stanu,} \tag{4}$$

$x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{CP,k}, \ldots, x_{j,k}$ - kolejne próbki sygnału EKG odpowiadające k-temu P-QRS-T,

$x_{CP,k}$ - próbka sygnału, dla której został wyznaczony punkt centrujący k-tego P-QRS-T,

$\underline{z}(k)$ - wektor wyjściowy odpowiadający k-temu zakłóconemu zespołowi P-QRS-T,

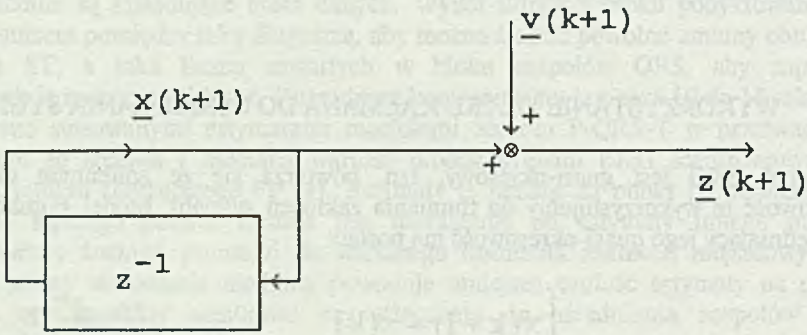
$\underline{v}(k)$ - wektor zakłóceń,

k - wskaźnik uśrednianych zespołów QRS.

Pomiędzy składowymi wektora stanu a sygnałem EKG zachodzi zależność:

$$\forall_{CP-1 \le l \le CP-j} \quad x_{CP-l,k} = x(FP(k)-l) \tag{4a}$$

Prezentowanemu modelowi zakłóconego sygnału EKG możemy przyporządkować graf przepływu sygnału przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1. Model sygnału EKG uwzględniający jego quasi-okresowość
Fig. 1. Quasi-periodical model of ECG signal

Zgodnie z [14,44] zakłócenia mięśniowe można modelować za pomocą białego szumu gaussowskiego. Ponieważ v jest szumem białym, model sygnału EKG możemy zapisać jako:

$$\forall_{1 \le i \le j} \quad \begin{cases} x_i(k+1) = x_i(k) \\ z_i(k) = x_i(k) + v_i(k) \end{cases} \tag{5}$$

Dalsze rozważania przeprowadzane będą dla pewnej wartości wskaźnika i. Upraszcza to przekształcenia nie rezygnując z ogólności. Szum v(k) spełnia następujące założenia:

$$E[v(k)] = 0 \tag{6}$$

$$E[v(k)v(l)] = R(k)\delta_{k,l} \tag{7}$$

gdzie: k,l = 0,1,2,...

$\delta_{k,l}$ - delta Kroneckera,

jest to gaussowski proces losowy:

$$f[v(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi R(k)}} EXP\left[\frac{v^2(k)}{2R(k)}\right] \tag{8}$$

Zakładamy ponadto, że stan początkowy układu jest zmienną losową gaussowską o wartości średniej x_0 i wariancji P_0:

$$E[x(0)] = x_0 \tag{9}$$

$$E\{[x(0) - x_0][x(0) - x_0]\} = P_0 \tag{10}$$

$$E[x(0)v(k)] = 0 \quad ; \; k = 0,1,2,.... \tag{11}$$

Należy zaznaczyć, że warunek (7) sprowadza się w tym przypadku do wymagania, aby funkcja autokorelacji zakłóceń opadała do zera przy odstępie równym odległości pomiędzy uśrednianymi zespołami QRS. W pracy [13] udowodniono, że warunek (11) jest równoważny wymaganiu nieskorelowania sygnału z szumem. Wiadomo z [3], że wymaganie to jest spełnione.

Przez $\hat{x}$ (k/j) oznaczymy estymatę wartości x(k) otrzymaną na podstawie pomiarów z(i); i = 0,1,2,...,j. W pracy interesować nas będzie estymata $\hat{x}$ (k/k). Definiujemy tzw. dopuszczalną funkcję strat L(∘), która ma następujące właściwości [13]:

- L(0) = 0,
- L jest symetryczna,
- jest to niemalejąca funkcja skalarna.

Najczęściej stosowana jest funkcja strat $L(\bar{x}) = \bar{x}^2$,

gdzie: $\bar{x}(k/k) = x(k) - \hat{x}(k/k)$ - błąd estymacji. (12)

Tworzymy wskaźnik jakości:

$$J[\bar{x}(k/k)] = E\{L[\bar{x}(k/k)]\} \tag{13}$$

Minimalizując wskaźnik jakości J przy poczynionych założeniach otrzymujemy równania filtru Kalmana [1, 11, 13]:

$$\hat{x}(k+1/k)=\hat{x}(k/k) \tag{14}$$

$$\hat{x}(k+1/k+1)=\hat{x}(k+1/k)+K(k+1)\,[z(k+1)-\hat{x}(k+1/k)] \tag{15}$$

$$K(k+1)=\frac{P(k+1/k)}{P(k+1/k)+R(k+1)} \tag{16}$$

$$P(k+1/k)=P(k/k) \tag{17}$$

$$P(k+1/k+1)=[1-K(k+1)]\,P(k+1/k) \tag{18}$$

Upraszczając te równania otrzymujemy:

$$\hat{x}(k+1/k+1)=\hat{x}(k/k)+K(k+1)\,[z(k+1)-\hat{x}(k/k)] \tag{19}$$

$$K(k+1)=\frac{P(k/k)}{P(k/k)+R(k+1)} \tag{20}$$

$$P(k+1/k-1)=[1-K(k+1)]P(k/k) \tag{21}$$

gdzie: $$P(k/k)=E\{[x(k)-\hat{x}(k/k)]\,[x(k)-\hat{x}(k/k)]\} \tag{22}$$

- wariancja błędu estymacji,

Konieczne jest także przyjęcie warunków początkowych. Jako wartość estymaty morfologii zespołu P-QRS-T na początku obliczeń przyjmujemy pierwszy dostępny pomiarowo zakłócony zespół P-QRS-T. Wariancja błędu tak przyjętej estymaty jest równa wariancji szumu zakłócającego ten zespół.

Czyli: $$\hat{x}(0/0)=z(0) \tag{23}$$

$$P(0/0)=R(0) \tag{24}$$

Przekształcając równania (20) i (21) otrzymujemy:

$$P(k+1/k+1)=\left[\frac{P(k/k)}{P(k/k)+R(k+1)}\right]=\frac{P(k/k)R(k+1)}{P(k/k)+R(k+1)} \tag{25}$$

Stąd porównując (25) (20):

$$P(k+1/k+1)=K(k+1)R(k+1) \tag{26}$$

Podstawiając do równości (20) równość (26) otrzymujemy rekurencyjną zależność wmocnienia filtru Kalmana:

$$K(k+1)=\frac{1}{1+\frac{R(k+1)}{R(k)K(k)}} \tag{27}$$

K(1) obliczamy na podstawie (20):

$$K(1)=\frac{R(0)}{R(0)+R(1)}. \tag{28}$$

W ten sposób możemy rekurencyjnie obliczać wzmocnienie filtru Kalmana dysponując jedynie wariancją zakłóceń dodanych do sygnału EKG.
W uzupełnieniu A udowodniono następujące twierdzenie:

$$\hat{x}(i/i)=z(0)\prod_{n=1}^{i}[1-K(n)]+\sum_{n=1}^{i-1}K(n)z(n)\prod_{l=n+1}^{i}[1-K(l)]+K(i)z(i) \tag{29}$$

Na podstawie tego twierdzenia możemy inaczej zapisać estymatę morfologii zespołu P-QRS-T:

$$\hat{x}(i/i)=\sum_{n=0}^{i}a_n z(n) \tag{30}$$

gdzie:

$$a_0=\prod_{n=1}^{i}[1-K(n)] \tag{31}$$

$$\forall_{0<n<i} \quad a_n=K(n)\prod_{l=n+1}^{i}[1-K(l)] \tag{32}$$

$$a_i=K(i) \tag{33}$$

Czyli estymata morfologii zespołu P-QRS-T jest liniową kombinacją wartości zespołów zakłóconych z wagą zależną od wariancji zakłóceń. Z uzupełnienia B wynika, że współczynniki a_n spełniają zależność.

$$\sum_{n=0}^{i} a_n = 1 \tag{34}$$

oraz to, że estymata morfologii zespołu P-QRS-T otrzymana na podstawie równań (19--21) jest nieobciążona:

$$E[\tilde{x}(k)] = 0 \tag{34a}$$

Dla dalszych rozważań istotna jest następująca zależność udowodniona w uzupełnieniu c:

$$\forall_{k \geq 2} \quad K(k) = \frac{1}{1 + \frac{R(k)}{R(1)K(1)} + \sum_{l=2}^{k-1} \frac{R(k)}{R(l)}} \tag{35}$$

$$K(1) = \frac{R(0)}{R(0) + R(1)}. \tag{36}$$

Przykład

Jeżeli założymy stałość wariancji zakłóceń:

$$\forall_{0 \leq k \leq i} \quad R(k) = \sigma^2 \quad , \tag{37}$$

to na podstawie (35) (36): $K(k) = \frac{1}{k+1}$: $k = 0, 1, 2, \ldots$

Podstawiając tę zależność do (31-33) otrzymujemy:

$a_n = \frac{1}{n+1}$; $n = 0, 1, \ldots, i$

Czyli na podstawie (30) mamy:

$$\hat{x}(i/i) = \frac{1}{i+1} \sum_{n=0}^{i} z(n) \tag{38}$$

Obliczmy jeszcze wariancję błędu estymacji na podstawie (26):

$$P(i/i) = \frac{\sigma^2}{i+1} \tag{39}$$

Powyższy przykład pokazuje, że dla zakłóceń o stałej wariancji (zakłócenia stacjonarne) równania filtru Kalmana prowadzą do "klasycznej" metody uśredniania sygnału w czasie. Również zgodne z doniesieniami literaturowymi jest równanie (39) [3, 7, 8, 18]. W ten sposób "klasyczna" metoda jest optymalna tylko wtedy, gdy szum jest stacjonarny. Jednak szum występujący w praktyce nie jest stacjonarny [5].

Równość (19) można przepisać w następującej postaci:

$$\hat{x}(k+1/k+1) = [1 - K(k+1)]\,\hat{x}(k/k) + K(k+1)\,z(k+1) \tag{40}$$

Estymata morfologii zespołu P-QRS-T powstaje jako suma poprzedniej estymaty z wagą 1-K(k+1) i zakłóconego zespołu P-QRS-T z wagą K(k+1). Poprzednia estymata ma wariancję P(k/k), a zespół P-QRS-T ma wariancję R(k+1). Obliczmy stosunek obu wag:

$$\frac{\text{waga } \hat{x}(k/k)}{\text{waga } z(k+1)} = \frac{1-K(k+1)}{K(k+1)} = \frac{R(k+1)}{P(k/k)+R(k+1)}\,\frac{P(k/k)+R(k+1)}{P(k/k)} =$$

$$= \frac{R(k+1)}{P(k/k)} = \frac{\text{wariancja } z(k+1)}{\text{wariancja } \hat{x}(k+1)} \tag{41}$$

Wagi omawianych składników są odwrotnie proporcjonalne do wariancji szumów je zakłócających.

Podstawiając równość (35) do (26) otrzymujemy:

$$P(k/k) = \frac{R(k)}{1 + \dfrac{R(k)}{R(1)K(1)} + \sum\limits_{l=2}^{k-1} \dfrac{R(k)}{R(l)}} \tag{42}$$

Dzieląc licznik i mianownik prawej strony przez R(k) i podstawiając (36) otrzymujemy:

$$P(k/k)=\frac{1}{\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{R(l)}} \tag{43}$$

Jest to zależność, która umożliwia obliczanie wariancji szumu estymaty po uśrednianiu k+1 zespołów P-QRS-T na podstawie znajomości wariancji szumu zakłócającego. Zależność taką dla uśredniania "klasycznego" przy szumie stacjonarnym przedstawia (39). Obliczymy teraz wariancję szumu estymaty dla uśredniania "klasycznego" przy niestacjonarnym szumie. "Klasyczne" uśrednianie można zapisać jako:

$$x_{śr}(i)=\frac{1}{i+1}\sum_{n=0}^{i}z(n) \tag{44}$$

Ale każdy zespół P-QRS-T składa się ze składnika deterministycznego x oraz zakłóceń v(n):

$$z(n)=x+v(n) \tag{45}$$

Czyli:

$$E\{x_{sr}(i)\}=\frac{1}{i+1}\sum_{n=0}^{i}E\{x+v(n)\}=x \tag{46}$$

natomiast wariancja [9]:

$$E\{[x_{sr}(i)-x]^2\}=E\left\{\left[\frac{1}{i+1}\sum_{n=0}^{i}E\{v(n)\}\right]^2\right\} \tag{46a}$$

Na podstawie warunku (7) otrzymujemy:

$$E\{[x_{sr}(i)-x]^2\}=\frac{1}{(i+1)^2}\sum_{n=0}^{i}R(n)=\frac{R_{sr}}{i+1} \tag{47}$$

Na podstawie równań (43) i (47) w dodatku D wykazano, że zachodzi następująca nierówność:

$$\frac{R_{sr}}{i+1}\geq\frac{1}{\sum_{l=0}^{i}\frac{1}{R(l)}} \tag{48}$$

Zauważmy, że wariancja estymaty otrzymanej za pomocą metody "klasycznej" jest równa średniej wariancji szumu podzielonej przez liczbę uśrednianych zespołów P - QRS - T. Natomiast wariancja estymaty otrzymanej metodą filtru Kalmana jest mniejsza od najmniejszej wariancji szumu.

Metoda oparta na filtracji Kalmana daje zawsze większe tłumienie zakłóceń niż metoda "klasyczna". Tylko dla stałej wariancji zakłóceń (zakłócenia stacjonarne) obie metody dają ten sam wynik. Cena, jaką płacimy za optymalność estymaty otrzymanej metodą filtru Kalmana, jest konieczność posiadania wiedzy o wariancji zakłóceń.

W dalszej części pracy zakładamy stałość wariancji zakłóceń w obrębie jednego zespołu P-QRS-T. W związku z tym na podstawie (20) wzmocnienie filtru Kalmana będzie stałe dla każdego zespołu P-QRS-T. Natomiast estymata wartości każdego punktu tego zespołu obliczana będzie oddzielnie na podstawie równania (19).

Definiujemy proces innowacyjny filtru Kalmana jako ciąg $\{\tilde{z}(k)\}$:

$$\tilde{z}(k) = z(k+1) - \hat{x}(k/k) \tag{49}$$

Proces innowacyjny jest szumem białym o wariancji [1]:

$$\tilde{V}_z(k) = P(k/k) + R(k+1) \tag{50}$$

Czyli aby obliczyć wariancje zakłóceń, należy obliczyć wariancję procesu innowacyjnego $\tilde{V}_z$. Ponieważ założyliśmy stałość wariancji zakłóceń w obrębie jednego zespołu P-QRS-T, to wariancja procesu innowacyjnego jest również stała w obrębie jednego zespołu. W wyniku występowania zakłóceń wolnozmiennych proces innowacyjny posiada niezerową wartość średnią:

$$E\{\tilde{V}_z(k)\} = \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\tilde{z}_i(k) \tag{51}$$

Wariancję procesu innowacyjnego dla k-tego zespołu P-QRS-T obliczamy na podstawie równania:

$$E\{\tilde{V}_z(k)^2] = \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}[\dot{z}_i(k)]^2 \quad , \tag{52}$$

gdzie:

$\dot{z}_i(k)$ - oznacza scentrowaną wartość procesu innowacyjnego dla i-tej próbki k-tego zespołu P-QRS-T:

$$\dot{z}_i(k) = \bar{z}_i(k) - E\{\tilde{V}_z(k)\}, \tag{53}$$

gdzie:

$\bar{z}_i(k)$ - oznacza wartość procesu innowacyjnego dla i-tej próbki k-tego zespołu P-QRS-T.

Przekształcając równanie (50) otrzymujemy:

$$R(k+1) = \tilde{V}_z(k) - P(k/k) \tag{54}$$

Stąd na podstawie (52):

$$R(k+1) = \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}[\dot{z}_i(k)]^2 - P(k/k) \tag{55}$$

W ten sposób posiadamy na podstawie znajomości wariancji procesu innowacyjnego metodę obliczania wariancji zakłóceń na bieżąco, podczas estymacji morfologii zespołu P-QRS-T. Ponieważ znamy wariancję procesu innowacyjnego, możemy w prosty sposób usuwać wpływ próbek "obcych" na estymatę morfologii zespołu P-QRS-T. Przyjmujemy wzmocnienie filtru Kalmana równe zero dla próbek, dla których próbki procesu innowacyjnego mają wartość większą niż $3\sqrt{V_{\tilde{z}}(k)}$. Postępowanie takie jest uzasadnione przyjęciem gaussowskiego charakteru zakłóceń. Wtedy proces innowacyjny ma również rozkład gaussowski [1] i odrzucamy "ogony" rozkładu. Przejęcie zerowej wartości wzmocnienia filtru Kalmana prowadzi do wartości estymaty dla danej próbki równej poprzedniej wartości tej estymaty (40).

Powstaje problem inicjacji obliczeń. Za pomocą prezentowanej metody możemy obliczyć dopiero wariancje zakłóceń drugiego uśrednianego zespołu. Natomiast do obliczenia K(1) potrzebne są R(0) i R(1). Wariancje te obliczamy na podstawie zakłóconych zespołów P-QRS-T o numerach -1, 0, 1. Korzystamy z faktu, że wariancja różnicy dwóch dowolnych zespołów jest równa sumie wariancji zakłóceń do nich dodanych: (rozważamy zespoły P-QRS-T o wskaźnikach α, β):

$$z(\alpha) = x\,v(\alpha) + \xi \tag{56}$$

$$z(\beta) = x + v(\beta) \tag{57}$$

ξ - jest to składnik wywołany zakłóceniami wolnozmiennymi.

$$E[z(\alpha) - z(\beta)] = E[\xi + v(\alpha) - v(\beta)] = E[\xi] + E[v(\alpha)] - E[v(\beta)] = \xi \tag{58}$$

$$E\{[z(\alpha) - z(\beta) - E[z(\alpha) - z(\beta)]]^2\} = E\{[v(\alpha)]^2\} + E\{[v(\beta)]^2\} = R(\alpha) + R(\beta) \tag{59}$$

Wariancję różnicy obliczamy za pomocą równości:

$$R(\alpha)+R(\beta)=\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}[z_i(\alpha)-z_i(\beta)-\xi(\alpha,\beta)]^2 \tag{60}$$

Gdzie ξ jest składnikiem pojawiającym się z powodu zakłóceń wolnozmiennych:

$$\xi(\alpha,\beta)=\frac{1}{j}\sum_{j}^{1}[z_i(\alpha)-z_i(\beta)] \tag{61}$$

Oznaczamy: $R(\alpha,\beta):=R(\alpha)+R(\beta)$ (62)

Otrzymujemy następujące wyrażenia:

$$R(-1,0)=\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}[z_i(-1)-z_i(0)-\xi(-1,0)]^2 \tag{63}$$

$$R(0,1)=\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}[z_i(0)-z_i(1)-\xi(0,1)]^2 \tag{64}$$

$$R(-1,1)=\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}[z_i(-1)-z_i(1)-\xi(-1,1)]^2 \tag{65}$$

Z tych równości możemy łatwo obliczyć interesujące nas wariancje:

$$R(0)=\frac{R(-1,0)+R(0,1)=R(-1,1)}{2} \tag{66}$$

$$R(1)=R(0,1)-R(0) \tag{67}$$

Za pomocą tych równości i (36) możemy obliczyć K(1), a następnie obliczać wariancję szumu za pomocą równości (54).

Zaletą prezentowanej metody tłumienia zakłóceń jest możliwość zastosowania jej do przetwarzania blokowego lub rekursyjnego. Zastosowanie do przetwarzania rekursyjnego jest oczywiste i nie wymaga wyjaśnień. Natomiast przetwarzanie blokowe możemy łatwo uzyskać przez inicjacje obliczeń na podstawie obliczonych wariancji

zakłóceń oraz estymaty morfologii zespołu P-QRS-T na podstawie poprzedniego bloku. Inicjację dla pierwszego bloku. Inicjację dla pierwszego bloku przeprowadzamy tak samo jak dla przetwarzania rekursyjnego. Inną zaletą prezentowanej metody jest ciągła znajomość wariancji szumu dodanego do uśrednionego zespołu QRS na podstawie obliczeń P(k/k). W ten sposób możemy przy przetwarzaniu blokowym rozpoczynać obliczenia następnego bloku, gdy poziom zakłóceń uśrednionego zespołu P-QRS-T będzie mniejszy niż założony. Oczywiście potrzebne jest ograniczenie na maksymalną liczbę uśrednionych zespołów ze względu na śledzenie zmian obniżenia odcinka ST. Zestawiając cały algorytm otrzymujemy:

$$R(k+1)=\frac{1}{j}\sum_{i=FP+1}^{FP+j}[z_{i-FP}(k)]^2-P(k/k)$$

$$K(k+1)=\frac{P(k/k)}{P(k/k)+R(k+1)}$$

$$\forall_{1\le i\le j}\quad \hat{x}_i(k+1/k+1)=\hat{x}_i(k/k)+K(k+1)[z_i(k+1)-\hat{x}_i(k/k)]$$

$$P(k+1/k+1)=K(k+1)R(k+1) \tag{68}$$

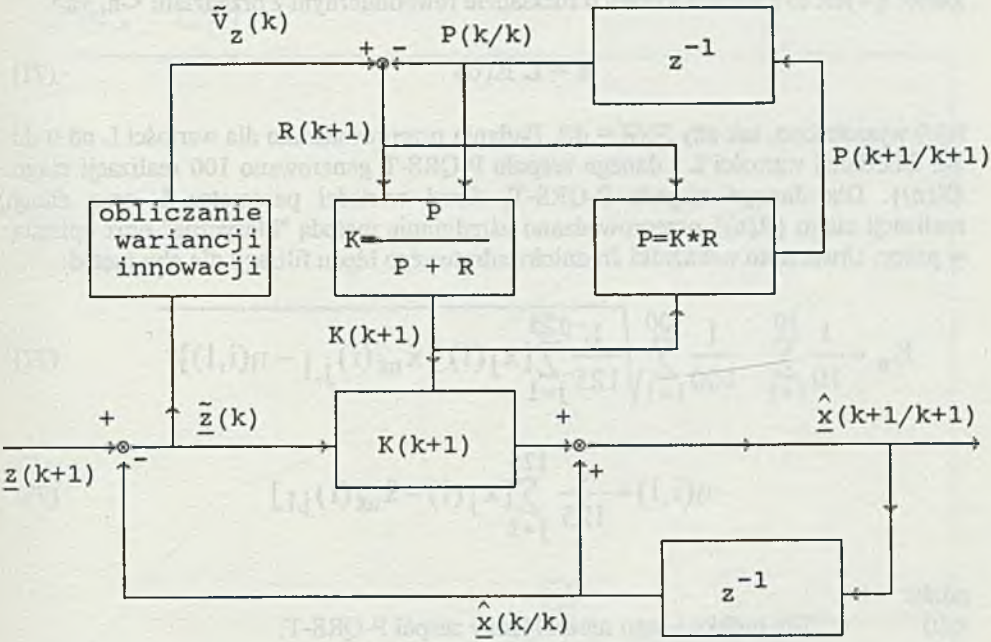
Oznaczenia jak poprzednio. Obliczenia inicjujemy następująco:

$$K(1)=\frac{R(0)}{R(0)=R(1)};\quad \hat{x}(0/0)=z(0) \tag{69}$$

R(0) i R(1) obliczamy na podstawie równań (63-67).

Omawianej metodzie można przyporządkować graf przepływu sygnału przedstawiony na rysunku 2.

Należy zaznaczyć, że jeżeli zakłócenia dodane do sygnału EKG nie będą miały gaussowskiego rozkładu amplitud, to filtr Kalmana będzie najlepszym estymatorem morfologii zespołu P-QRS-T z klasy estymatorów liniowych [1,2].



Rys. 2. Schemat metody tłumienia zakłóceń opisanej w pracy
Fig. 2. Graph of the new noise reduction method

3. TESTOWANIE METOD UŚREDNIANIA SYGNAŁU EKG W DZIEDZINIE CZASU

Przeprowadzono następujące testowanie porównawcze metod uśredniania "klasycznego" i opartego na filtrze Kalmana. Z bazy danych składających się z 5227 zespołów P-QRS-T wybrano losowo 10 zespołów. Dany zespół zakłócano 26 razy szumem białym o wariancji R(n), n = 0,1,...,25. Ciąg ({R(n)} był procesem Markowa [13]:

$$R(n+1) = R(n) + \xi \,, \tag{70}$$

gdzie: ξ - jest to zmienna losowa o rozkładzie równomiernym z przedziału <-a, +a>

$$a = L\,R(0)\,. \tag{71}$$

R(0) wyznaczono, tak aby SNR = dB. Badania przeprowadzano dla wartości L od 0 do 10. Dla danej wartości L i danego zespołu P-QRS-T generowano 100 realizacji ciągu {R(n)}. Dla danego zespołu P-QRS-T, danej wartości parametru L oraz danej realizacji ciągu {R(n)} przeprowadzano uśrednianie metodą "klasyczną" oraz opisaną w pracy. Utworzono wskaźniki średniokwadratowego błędu filtracji dla obu metod:

$$E_u = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}\sqrt{\frac{1}{125}\sum_{j=1}^{125}[x_j(i) - \hat{x}_{uś}(i)_{j,l} - \eta(i,l)]^2} \tag{72}$$

$$\eta(i,l) = \frac{1}{125}\sum_{j=1}^{125}[x_j(i) - \hat{x}_{uś}(i)_{j,l}] \tag{73}$$

gdzie:

$x_j(i)$ - j-ta próbka i-tego niezakłócony zespół P-QRS-T,

$\hat{x}_{uś}(i)_{j,l}$ - wynik uśredniania j-tej próbki i-tego zespołu P-QRS-T dla l-tej realizacji {R(n)}.

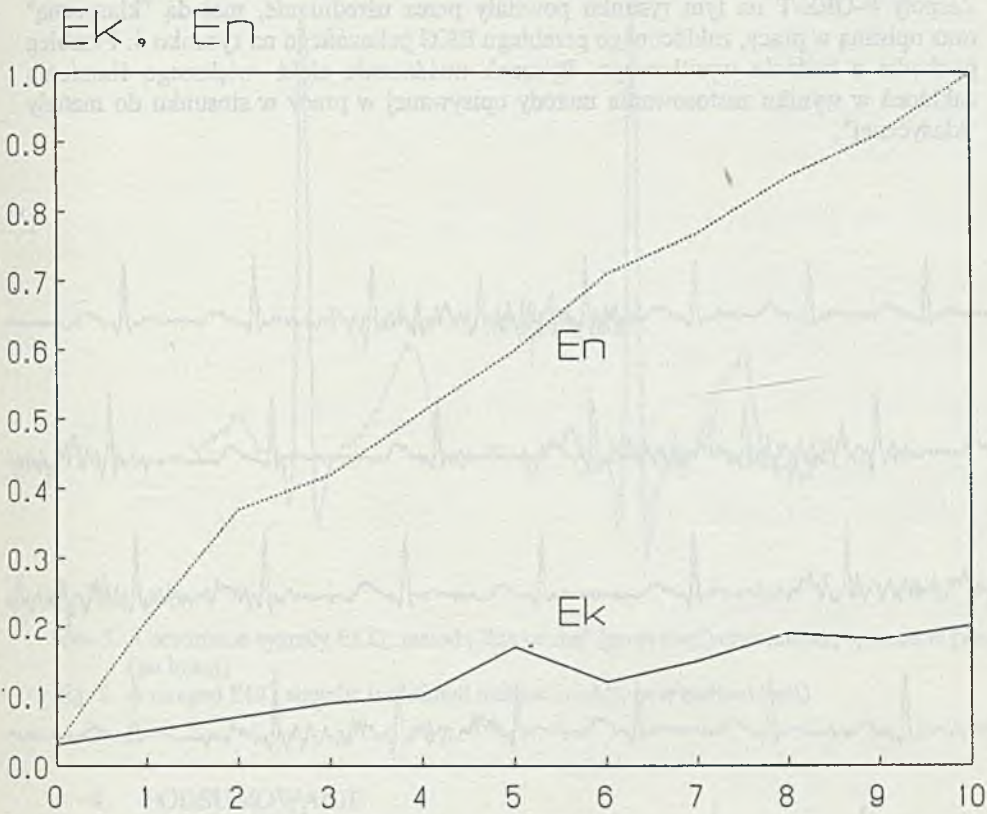
Analogicznie dla metody opartej na filtracji Kalmana:

$$E_k = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{100}\sum_{l=1}^{100}\sqrt{\frac{1}{125}\sum_{j=1}^{125}[x_j(i) - \hat{x}_k(i)_{j,l} - \eta(i,l)]^2} \tag{74}$$

$$\eta(i.l) = \frac{1}{125}\sum_{j=1}^{125}[x_j(i) - \hat{x}_k(i)_{j,l}] \tag{75}$$

gdzie: $\hat{x}_k(i)_{j,l}$ - uzyskana prezentowaną w pracy metodą estymata j-tej próbki i-tego zespołu P-QRS-T dla l-tej realizacji {R(n)}.

Dla każdego zespołu P-QRS-T obliczenia przeprowadzano dla przedziału: <FP-50, FP+75>; razem 125 próbek, co odpowiada przy częstotliwości próbkowania 250 Hz odcinkowi 0.5 s. Rysunek 3 przedstawia znormalizowany wykres E_u oraz E_k w zależności od parametru L.

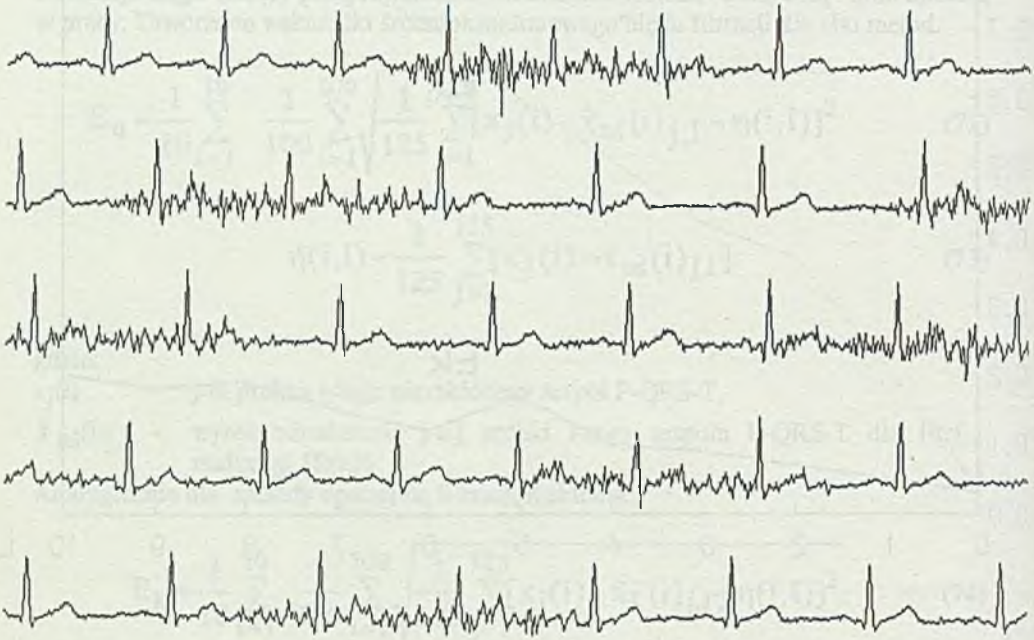


Rys. 3. Średniokwadratowy błąd metod: "klasycznej" oraz opisanej w pracy jako funkcja parametru L

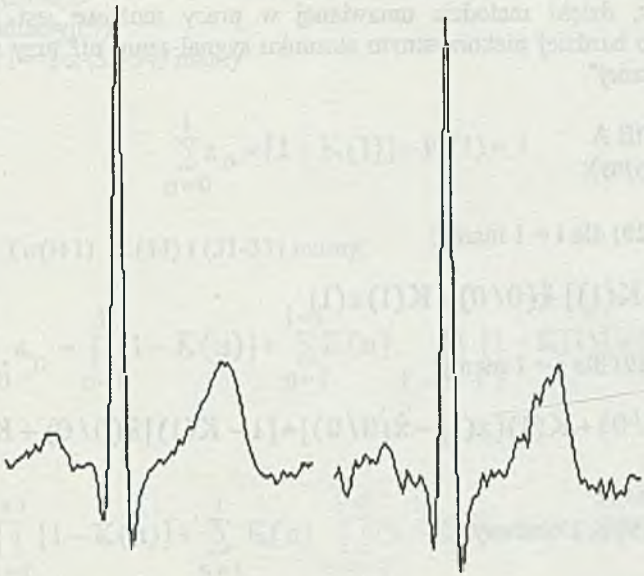
Fig. 3. Mean square error for the traditional and the new method as a function of L parameter

Z rysunku tego widzimy, że metoda oparta na filtrze Kalmana daje zawsze lepsze tłumienia zakłóceń niż metoda "klasyczna". Tylko dla wartości parametru L = 0 obie metody dają ten sam wynik. Przy testowaniu używano punktów centrujących wyznaczonych dla niezakłóconego przebiegu EKG. W ten sposób błędy centrowania nie dodawały się do błędów metod tłumienia zakłóceń.

Przykładowe wyniki tłumienia zakłóceń obiema metodami przedstawia rysunek 5. Zespoły P-QRS-T na tym rysunku powstały przez uśrednienie, metodą "klasyczną" oraz opisaną w pracy, zakłóconego przebiegu EKG pokazanego na rysunku 4. Przebieg pochodzi z badania wysiłkowego. Rysunek uwidacznia efekt większego tłumienia zakłóceń w wyniku zastosowania metody opisywanej w pracy w stosunku do metody "klasycznej".



Rys. 4. Sygnał EKG z zakłóceniami mięśniowymi
Fig. 4. Signal ECG with muscle noise



Rys. 5. Uśrednione sygnały EKG; metodą "klasyczną" (po prawej) oraz metodą opisaną w pracy (po lewej)
Fig. 5. Averaged ECG signals: traditional method (right), new method (left)

4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono nową metodę tłumienia zakłóceń, których widmo częstotliwościowe nakłada się na widmo sygnału EKG dla szerokiego zakresu częstotliwości. Metoda ta zapewnia tłumienie zakłóceń przy niezmienionym sygnale EKG. Zniekształcenia sygnału EKG zależą jedynie od stabilności punktu centrującego. Przedstawiona metoda wykorzystuje teorię filtru Kalmana.

Wykazano teoretycznie i praktycznie, że "klasyczna" metoda uśredniania sygnału EKG w dziedzinie czasu prowadzi do gorszego tłumienia zakłóceń niż metoda przedstawiona w pracy. Jedyny przypadek, gdy obie metody prowadzą do takiego samego tłumienia zakłóceń sygnału EKG, występuje wtedy, gdy zakłócenia są stacjonarne. W praktyce występujące zakłócenia są niestacjonarne, dlatego "klasyczna" metoda nie jest optymalna. Innymi zaletami przedstawionej metody są:
- możliwość ciągłej oceny jakości tłumienia zakłóceń,
- możliwość zastosowania do przetwarzania rekurencyjnego lub blokowego,

- możliwość usuwania próbek "obcych" bez pogorszenia jakości filtracji.

Reasumując, dzięki metodzie omawianej w pracy możliwe jest analizowanie sygnału EKG o bardziej niekorzystnym stosunku sygnał-szum niż przy zastosowaniu metody "klasycznej".

UZUPEŁNIENIE A

Dowód (indukcyjny):

1° i = 1:

Na podstawie (29) dla i = 1 mamy:

$$\hat{x}(1/1) = [1 - K(1)]\,\hat{x}(0/0) + K(1)\,z(1)$$

Na podstawie (19) dla i = 1 mamy:

$$\hat{x}(1/1) = \hat{x}(0/0) + K(1)[z(1) - \hat{x}(0/0)] = [1 - K(1)]\hat{x}(0/0) + K(1)\,z(1)$$

2° Tw(i) ⇒Tw(i+1)

Na podstawie (19) i (29) mamy:

$$\hat{x}(i+1/i+1) = \left[z(0) \prod_{n=1}^{i} [1 - K(n)] \right] [1 - K(i+1) +$$

$$+ \left[\sum_{n=1}^{i-1} K(n) z(n) \prod_{l=n+1}^{i} [1 - K(l)] \right] [1 - K(i+1)] + K(i+1) z(i+1) + K(i) z(i) =$$

$$= z(0) \prod_{n=1}^{i+1} [1 - K(n)] + \sum_{n=1}^{i} K(n) z(n) \prod_{l=n+1}^{i+1} [1 - K(l)] + K(i+1) z(i+1)$$

Na podstawie równości (29) otrzymujemy:

$$\hat{x}(i+1/i+1) = z(0) \prod_{n=1}^{i+1} [1 - K(n)] + \sum_{n=1}^{i} K(n) z(n) \prod_{l=n+1}^{i+1} [1 - K(l)] + K(i+1) z(i+1)$$

c.n.d.

UZUPEŁNIENIE B

Dowód 1 (indukcyjny)

1° i = 1: dla i = 1 z (31-34) mamy:

$$\sum_{n=0}^{i} a_n = [1 - K(1)] + K(1) = 1$$

2° Tw(i) ⇒ Tw(i+1) z (34) i (31-33) mamy:

$$\sum_{n=0}^{i} a_n = \prod_{n=1}^{i} [1 - K(n)] + \sum_{n=1}^{i-1} K(n) \prod_{l=n+1}^{i} [1 - K(l)] + K(i) = 1$$

Natomiast:

$$\sum_{n=0}^{i+1} a_n = \prod_{n=1}^{i+1} [1 - K(n)] + \sum_{n=1}^{i} K(n) \prod_{l=n+1}^{i+1} [1 - K(l) + K(i+1) =$$

$$= \left[\prod_{n=1}^{i} [1 - K(n)]\right] [1 - K(i+1)] + \left[\sum_{n=1}^{i-1} K(n) \prod_{l=n+1}^{i} [1 - K(l)]\right] [1 - K(i+1)] +$$

$$+ K(i)[1 - K(i+1)] + K(i+1) = \left[\sum_{n=0}^{i} a_n\right] [1 - K(i+1)] + K(i+1) =$$

$$= 1 - K(i+1) + K(i+1) = 1$$

c.n.d.

Dowód 2.

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k/k) = x(k) - \sum_{n=0}^{k} a_n z(n) = x(k) - \sum_{n=0}^{k} a_n [x(n) + v(n)] =$$

$$= x(k) - \sum_{n=0}^{k} a_n x(n) - \sum_{n=0}^{k} a_n v(n)$$

Czyli:

$$E[\tilde{x}(k)] = E[x(k)] - \sum_{n=0}^{k} a_n E[x(n)] - \sum_{n=0}^{k} a_n E[v(n)]$$

Ale:

$$\forall_n \begin{cases} x(n) = x_0 \\ E[v(n)] = 0 \end{cases}$$

Stąd: $E[\tilde{x}(k)]x_0 - x_0 \sum_{n=0}^{k} a_n = 0$

c.n.d.

UZUPEŁNIENIE C

Dowód (indukcyjny):

Równość (36) wynika z równości (20).

1° k = 2 : z równości (35) i (26) dla k = 2 otrzymujemy:

$$K(2) = \frac{1}{1 + \frac{R(2)}{R(1)K(1)}} = \frac{P(1/1)}{P(1/1) + R(2)}$$

jest to wynik zgodny z równością (20).

2° Tw(k) ⇒ Tw(k+1)

Z równości (27) otrzymujemy:

$$K(k+1) = \frac{1}{1 + \frac{R(k+1)}{R(k)K(k)}} = \frac{1}{1 + \frac{R(k+1)\left[1 + \frac{R(k)}{R(1)K(1)} + \sum_{l=2}^{k-1} \frac{R(k)}{R(l)}\right]}{R(k)}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{R(k+1)}{R(k)} + \frac{R(k+1)}{R(1)K)(1)} + \sum_{l=2}^{k-1} \frac{R(k+1)}{R(l)}} = \frac{1}{1 + \frac{R(k+1)}{R(1)K(1)} + \sum_{l=2}^{k} \frac{R(k+1)}{R(l)}}$$

Na podstawie równości (35) otrzymujemy:

$$K(k+1) = \frac{1}{1 + \frac{R(k+1)}{R(1)K(1)} + \sum_{l=1}^{k} \frac{R(k+1)}{R(l)}}$$

c.n.d.

UZUPEŁNIENIE D

Dowód:

Nierówność (48) możemy zapisać w postaci:

$$\sum_{l=0}^{i} \frac{1}{R(l)} \geq \frac{i+1}{R_{sr}}$$

Przekształcając dalej otrzymujemy kolejno:

$$\sum_{l=0}^{i} \frac{1}{R(l)} \geq \sum_{l=0}^{i} \frac{1}{R_{sr}}$$

$$\sum_{l=0}^{i} \left[\frac{1}{R(l)} - \frac{1}{R_{sr}} \right] \geq 0$$

$$\frac{1}{R_{sr}} \sum_{l=0}^{i} \left[\frac{R_{sr} - R(l)}{R(l)} \right] \geq 0$$

$$\sum_{l=0}^{i} \left[\frac{R_{sr} - R(l)}{R(l)} \right] \geq 0$$

Wyrażenie po lewej stronie nierówności możemy interpretować jako sumę różnic $R_{śr}$ - R(l) ważonych przez 1/R(l). Prawdziwa jest następująca równość:

$$\sum_{l=0}^{i} [R_{sr} - R(l)] = 0$$

Zauważmy ponadto, że wagi dla $R_{śr}$ - R(l) > 0 są większe niż wagi dla $R_{śr}$ - R(l). Nawet największa waga dla ujemnej różnicy jest mniejsza od najmniejszej wagi dla dodatniej różnicy. Czyli cała suma jest większa od zera. Aby była ona równa zeru, każda różnica musi być równa zeru. Zachodzi to dla przypadku, gdy R jest stałe.

LITERATURA

[1] B.D.O. Anderson, J.B. Moore: Filtracja optymalna, WNT, Warszawa 1984.
[2] F. Bartolii, S. Cerutti: A Kalman filter procedure for processing of electroencephalogram, Proceedings of ICASSP 1982, New York IEEE 1982, pp. 721-724.
[3] E.J. Berbari, et al: Evaluation of esophageal elecetrodes for recording His-Purkinje activity based upon signal variance, IEEE Trans. Biomed. Eng. BME-33, No.10, Oct. 1986, pp. 922-928.
[4] V. Bhargawa, K. Watanabe, V.F. Froelicher: Progress in computer analysis of the exercise electrocardiogram, Amer. J.Cardiol., vol. 47, pp. 1143-1151, 1981.
[5] O.Y.De Vel: R-wave detection in presence of muscle artifacts, IEEE Trans. Biomed. Eng., BME-31, No.11, Nov. 1984, pp. 975-986.
[6] W. Craellus, et al: Criteria for optimal averaging of cardiac sygnals, IEEE Trans. Biomed. Eng., BME-33, No. 10, October 1986, pp. 957-966.
[7] Z. Frankiewicz, T. Rawlik: Tłumienie zakłóceń w elektrokardiogramach wysiłkowych, Postepy Fizyki Medycznej, 1987, 22,4.
[8] R.P. Gaumond: Roundoff errors in sygnal averaging systems, IEEE Trans. Biomed. Eng., BME-33, No.3, March 1986, pp. 365-366.
[9] B. Gniedenko: The theory of probability, MIR, Moscow 1982.
[10] N.B. Jones, et al: Spectral analysis and the interference EMG, IEE Proc. , Vol. 129, No.9. Dec 1982, 987-992.
[11] P. Larminat, Y. Thomas: Automatyka-układy liniowe tom 2 Identyfikacja, WNT, Warszawa 1983.
[12] J Łęski: Zastosowanie filtru Kalmana do analizy EKG, Praca magisterska, Instytut Elektroniki Pol. Śl., Gliwice 1987.
[13] J.S. Meditch: Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych, WNT Warszawa 1975.
[14] J.Mertens, D.Mortara: A new algrithm for QRS averaging, Comput. Cardiol., pp. 367-369, 1984.
[15] A.T.Moser, T.D. Pierce: Optimization of an arrhythmia classyfication decision rule based on a fixed parameter set over an augmented MIT-BIH arrhythmia database, Comput. Cardiol., pp. 223-226, 1983.
[16] A.T. Mose, et al: Real-time sygnal processing of exercise electrocardiogram, Comput, Cardiol., pp. 461-464, 1982.
[17] O.Pahlm, L. Sörnmo: Data processing of exercise ECG's, IEEE Trans. Biomed. Eng., BME-34, No.2, Feb. 1987, pp. 158-165.
[18] P.A.Parker: Comments on "roundoff errors in sygnals averaging systems", IEEE Trans. BIomed. Eng., BME-34, No. 11, Nov. 1978, pp. 907-908.

[19] H. Rix, et al: Selective averaging of high resolution electrocardiograms, IEEE Ninth Annual Conference of the Engineering in Medicine and Biology Society 1987, pp. 535-536.
[20] M.L.Simoons, H.B.K.Boomm, E.Smallenburg: On-line processing of orthogonal exercise electrocardiograms, Comput. Biomed. Res., vol.8, pp. 105-117, 1975.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Tadeusz Palko

Wpłynęło do Redakcji 10.09. 1990 r.

Abstract

Signal averaging is a very common method for muscle noise reduction in exercise tests. Stationarity is usually assumed but most kinds of this noise are non stationary. The new method besed on the Kalman filter theory provides optimal ECG signal estimation (in variance minimization of noise in averaged signal sense). The unbiased estimator guarantees that the signal is not distorted. Noise reduction is a first step in every ECG signal processing system. Accuracy of all later measurements depends on the quality of this stage. Variance of noise in averaged signal is always better than the conventional one when the moise is not stationary. The method is suitable for late potential and high frequency ECG analysis.