ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: AUTOMATYKA z. 113 Nr kol. 1246

Andrzej POLAŃSKI

PROSTY ALGORYTM WYZNACZANIA POŁOŻENIA I ORIENTACJI BRYŁ SZTYWNYCH NA PODSTAWIE INFORMACJI WIZYJNEJ [1]

Streszczenie. W pracy przedstawia się prosty algorytm wyliczania położenia i orientacji bryły sztywnej na podstawie informacji wizyjnej. Prostota algorytmu jest uzyskana dzięki założeniu o znajomości struktury obserwowanej sceny. Założenie to ogranicza zakres możliwych zastosowań, jednak w wielu sytuacjach może być uzasadnione. Przyjmując transformację perspektywiczną jako model działania obiektywu kamery zapisuje się układ równań liniowych jednorodnych, które zawierają poszukiwane parametry - elementy macierzy obrotu i wektora translacji. Rozwiązania dla układów jednorodnych można uzyskać tylko z dokładnością do współczynnika skali. Nieznany współczynnik skali wyznacza się korzystając z warunku ortogonalności macierzy obrotu. Zakłada się, że dane dla algorytmu obarczone są błędami pomiarowymi, a także, że liczba uzyskanych równań przekracza liczbę nieznanych parametrów. Zgodnie z tym w algorytmie obliczeniowym stosuje się metodę najmniejszych kwadratów.

A SIMPLE ALGORITHM FOR DETERMINING THE POSITION AND THE ORIENTATION OF EIGID BODIES BASING ON WISUAL INFORMATION

Summary. The paper presents a simple algorithm for determining the position and orientation of rigid bodies basing on visual information. The simplicity is achieved thanks to the assumption that some information about the structure of the observed scene is given. This assumption limits the area of possible applications of the algorithm, however

[1] *Praca była finansowana częściowo z grantu wewnętrznego BK - 465, a częściowo z grantu wewnętrznego BW - 741/5*

in many situations it can be justified. The prespective transformation is taken as the model of vision channel. Then the system of linear equations is constructed, which contains the parameters of the rotation matrix and the translation vector. The solution contains the unknown scaling parameter α which is then determined by the condition that the rotation matrix is orthogonal. It is assumed that the measurements are distrubed by noise and that the number of equations is greater than the number of unknown parameters. According to this the least squares algorithm is employed.

ПРОСТОЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ И ОРИЕНТАЦИИ ЖЕСТКИХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ ЗРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Резюме. В работе представлен простой алгоритм определени положения и ориентации жестких тел на основе зрительной информации. Простота алгоритма получена благодаря предпосылке о знании структуры наблюдаемой сцены. Такая предпосылка ограничивает диапазон возможных применений, но во многих случаях она допустима. Принимая перспективное преобразование, как модель действия объектива камеры, формулируется система линейных однородных уравнений с искомыми параметрами - элементами матриц вращения и вектора трансляции. Решения для однородных систем можно получать только с точностью до коэффициента масштаба. Неизвестный коэффициент масштаба определяется из условия ортогональности матрицы вращения. Предлагается, что данные для алгоритма содержат измерительные ошибки и число полученных уравнений больше числа неизвестных параметров. Поэтому в вычислительном алгоритме принимаеася метод наименьших квадратов.

1. WSTĘP

Pomiar wzajemnego położenia i orientacji brył sztywnych jest obecnie jednym z podstawowych zagadnień techniki wizyjnej. Wizyjne systemy pomiaru położenia i orientacji znajdują coraz szersze zastosowanie. Ich rozwój odbywa się dwutorowo. Z jednej strony przetworniki wizyjne i urządzenia cyfrowe osiągają coraz lepsze parametry: dokładność, rozdzielczość, szybkość przetwarzania. Z drugiej zaś strony pojawiają się coraz bardziej efektywne algorytmy obliczeniowe wyznaczania położenia, przemieszczeń i orientacji przestrzennej ciał na podstawie obrazów przesyłanych z kamery.

Informację wejściową dla algorytmów wyznaczanie położenia i przemieszczeń na podstawie informacji wizyjnej stanowi seria kolejnych obrazów przekazanych przez kamerę. Na obrazach tych jest uwidoczniony efekt ruchu obiektu, na którym umieszczona jest kamera (lub tez ruchu elementów sceny). Wynikiem działania algorytmu jest wyliczenie przemieszczeń pomiędzy chwilami przesyłania obrazów [3] - [7]. Zwykle przyjmuje się, że nie ma informacji apriori dotyczącej elementów sceny. Dzięki temu algorytmy są elastyczne - mogą być stosowane w różnych sytuacjach. Jednak ceną jest dość duża złożoność i niekiedy konieczność przetworzenia kilku obrazów przed uzyskaniem pierwszych wyników [6], [7].

W niniejszej pracy przedstawia się prosty algorytm wyliczania położenia i orientacji bryły sztywnej na podstawie informacji wizyjnej. Prostota algorytmu jest uzyskana dzięki założeniu o znajomości struktury obserwowanej sceny. Założenie to ogranicza zakres możliwych zastosowań, jednak w wielu sytuacjach może być uzasadnione. Oceny parametrów opisujących położenie i orientację przestrzenną uzyskuje się przy zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów.

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

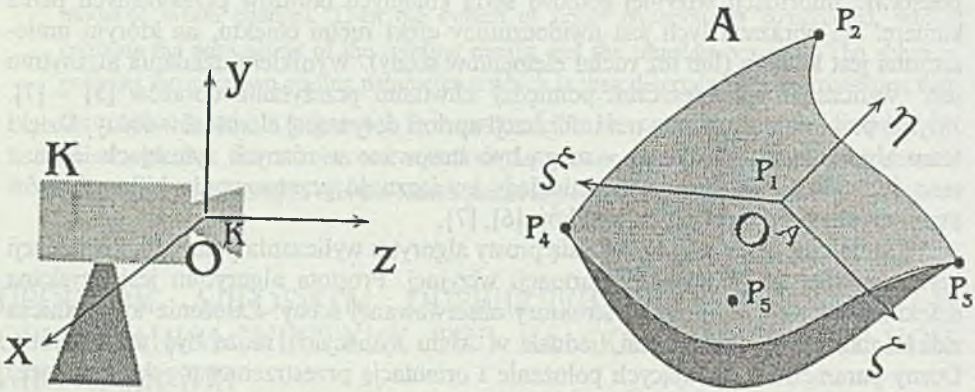
W punkcie tym przedstawione będą wstępne informacje konieczne, aby można było sformułować rozważany problem. Określone zostanie, co rozumie się przez strukturę sceny, zdefiniowane zostaną parametry określające położenie i orientację przestrzenną bryły oraz opisany będzie model matematyczny działania kamery.

2.1. Struktura sceny

Rozważana sytuacja jest przedstawiona na rys. 1. Kamera K, z którą związany jest układ współrzędnych $O^K xyz$ przekazuje obraz bryły sztywnej A. Z bryłą sztywną A związany jest układ współrzędnych $O^A \xi\eta\zeta$. Przyjmujemy, że można wyróżnić N punktów bryły A - P_1, P_2, ... P_n, (na rys. 1 N = 5). Współrzędne tych punktów w układzie $O^A \xi\upsilon\zeta$ są znane i wynoszą odpowiednio:

$$\xi_1^p, \eta_1^p, \zeta_1^p \; ; \quad \xi_2^p, \eta_2^p, \zeta_2^p \; ; \ldots, \xi_N^p, \eta_N^p, \zeta_N^p \, . \tag{1}$$

Punkty te są widoczne i identyfikowane na obrazie przekazywanym przez kamerę. Nie jest natomiast znane położenie bryły A, i tym samym punktów P_1, P_2,...P_N w układzie współrzędnych kamery. Wyznaczenie tego położenia jest celem obliczeń.



Rys. 1. Struktura sceny
Fig. 1. Structure of the scene

2.2. Parametry określające położenie i orientację przestrzenną bryły sztywnej A

Jak wiadomo [1], parametrami, które określają położenie bryły sztywnej w danym układzie współrzędnych, są wektor translacji (przesunięcia) oraz macierz rotacji (obrotu). Dla dowolnego punktu P_k bryły sztywnej A jego współrzędne w układzie kamery, które oznaczamy przez x_k^p, y_k^p, z_k^p, mogą być obliczone według wzoru:

$$\underline{x}_k^p = R\,\underline{\xi}_k^p + T, \tag{2}$$

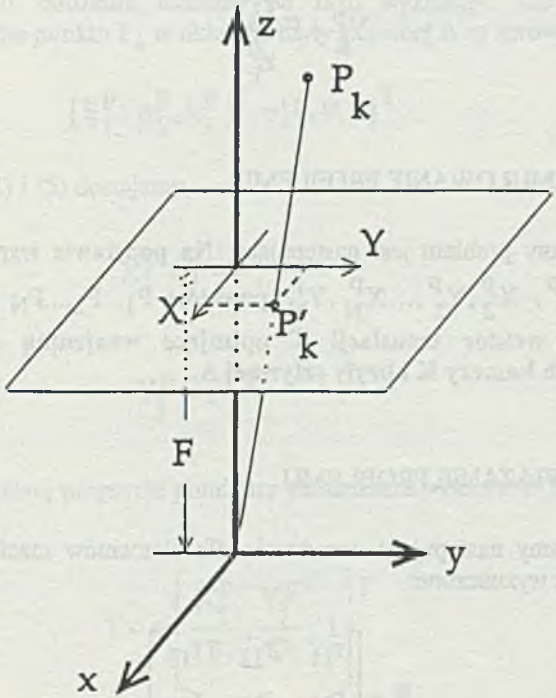
gdzie

$$\underline{x}_k^p = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}, \qquad \underline{\xi}_k^p = \begin{bmatrix} \xi_k \\ \eta_k \\ \zeta_k \end{bmatrix} \tag{3}$$

są wektorami zbudowanymi ze współrzędnych punktu P w dwóch układach współrzędnych. Występujące w powyższym wzorze 3x3 - wymiarowa macierz rotacji R i 3-wymiarowy wektor translacji T określają wzajemne położenie i orientację układów współrzędnych kamery K i bryły sztywnej A.

2.3. Transformacja perspektywiczna

Kamera przekazuje dwuwymiarowy obraz trójwymiarowej sceny. Jest on uzyskiwany przez tzw. transformację perspektywiczną [1], która polega na rzutowaniu środkowym punktów trójwymiarowej sceny na płaszczyznę obrazu. Schemat transformacji perspektywicznej dla punktu P_k jest przedstawiony na rys. 2. Przyjmuje się, że środek układu współrzędnych kamery pokrywa się ze środkiem soczewki obiektywu kamery, oś O^K z jest osią soczewki kamery.



Rys.2. Transformacja perspektywiczna
Fig. 2. Perspective transformation

Płaszczyzna obrazu jest równoległa do płaszczyzny $O^k xy$, jest umieszczona w odległości F od środka układu, wielkość F nazywa się ogniskową soczewki kamery. Rzutem punktu P_k, o współrzędnych (w układzie kamery): x_k^p, y_k^p, z_k^p jest punkt P_k'. Jego współrzędne na płaszczyźnie obrazu oznaczamy przez X_k^p, Y_k^p i nazywamy współrzędnymi ekranowymi. Związek pomiędzy współrzędnymi ekranowymi X_k^p, Y_k^p a współrzędnymi przestrzennymi x_k^p, y_k^p, z_k^p dany jest wzorem:

$$X_k^p = F\frac{x_k^p}{z_k^p}, \tag{4}$$

$$Y_k^p = F\frac{y_k^p}{z_k^p} \tag{5}$$

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozpatrywany problem jest następujący: **Na podstawie współrzędnych ekranowych X_1^p, Y_1^p; X_2^p, Y_2^p;...X_N^p, Y_N^p punktów P_1, P_2,...P_N wyznaczyć macierz rotacji R i wektor translacji T opisujące wzajemną orientację układów współrzędnych kamery K i bryły sztywnej A.**

4. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Wprowadzamy następujące oznaczenia dla elementów macierzy R i wektora T, które mają być wyznaczone:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$T=[t_1,t_2,t_3]^T. \tag{7}$$

Zauważmy teraz, że bez straty ogólności możemy założyć, że jeden z punktów P_1, P_2,...P_N znajduje się w środku układu współrzędnych $O^A\xi\eta\zeta$, na rys. 1 przyjęto, że punktem tym jest P_1. Gdyby tak nie było, to możemy wprowadzić nowy układ współrzędnych $O^{P1}\xi\eta\zeta$, o środku w punkcie P_1 i osiach równoległych do osi układu $O^A\xi\eta\zeta$. Następnie, korzystając z dalej opisanej procedury wyznaczymy wzajemne położenie układu $O^{P1}\xi\eta\zeta$ i układu kamery O^Kxyz. Znając położenie układu $O^{P1}\xi\eta\zeta$ łatwo wyznaczymy, przez przesunięcie, położenie układu $O^A\xi\eta\zeta$.

Dlatego w dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że punkt P_1 jest środkiem układu współrzędnych $O^A\xi\eta\zeta$, oczywiście numer punktu także nie ma znaczenia.

4.1. Wyznaczanie kierunku wektora translacji

Dzięki przyjętemu założeniu możemy od razu wyznaczyć kierunek wektora translacji. Współrzędne punktu P_1 w układzie bryły sztywnej A są zerowe:

$$[\xi_1^p,\eta_1^p,\zeta_1^p]^T=[0,0,0]^T \tag{8}$$

Podstawiając (8) w (4) i (5) dostajemy

$$X_1^p=F\frac{t_1}{t_3}, \tag{9}$$

$$Y_1^p=F\frac{t_2}{t_3}. \tag{10}$$

Powyższe wzory określają proporcje pomiędzy elementami wektora T. Możemy zatem napisać:

$$T=\alpha\left[\frac{X_1^p}{F},\frac{Y_1^p}{F},1\right]^T \tag{11}$$

gdzie α jest współczynnikiem skali, który należy jeszcze określić. Na podstawie dotychczasowych założeń wiadomo jedynie, że $\alpha > 0$, dlatego, że punkt P_1 jako widoczny na ekranie musi mieć dodatnią współrzędna "z".

4.2. Obliczanie macierzy rotacji R

Podstawiając (2) w (3) i korzystając z oznaczeń (6)-(7) możemy dla punktu P_k zapisać układ równań:

$$X_k^p = F\frac{r_{11}\xi_k^p + r_{12}\eta_k^p + r_{13}\zeta_k^p + t_1}{r_{31}\xi_k^p + r_{32}\eta_k^p + r_{33}\zeta_k^p + t_3} \tag{12}$$

$$Y_k^p = F\frac{r_{21}\xi_k^p + r_{22}\eta_k^p + r_{23}\zeta_k^p + t_2}{r_{31}\xi_k^p + r_{32}\eta_k^p + r_{33}\zeta_k^p + t_3} \tag{13}$$

Uwzględniając (11) i wymnażając obie strony równości (12) - (13) przez mianowniki otrzymujemy:

$$\alpha(X_k^p - X_1^p) = (F\xi_k^p r_{11} + F\eta_k^p r_{12} + F\zeta_k^p r_{13}) - (X_k^p\xi_k^p r_{31} + X_k^p\eta_k^p r_{32} + X_k^p\zeta_k^p r_{33}) \tag{14}$$

$$\alpha(Y_k^p - Y_1^p) = (F\xi_k^p r_{21} + F\eta_k^p r_{22} + F\zeta_k^p r_{23}) - (Y_k^p\xi_k^p r_{31} + Y_k^p\eta_k^p r_{32} + Y_k^p\zeta_k^p r_{33}) \tag{15}$$

Oznaczając dalej wektor zbudowany z elementów macierzy R przez:

$$R_{vec} = [r_{11}, r_{12}\ r_{13}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{31}, r_{32}, r_{33}]^T \tag{16}$$

możemy układ równań (14) - (15), dla K=2,3,...N, zapisać w postaci:

$$\alpha B = U R_{vec} \tag{17}$$

gdzie U jest macierzą 2(N-1) x 9 - wymiarową, o postaci:

$$U=\begin{bmatrix} F\xi_2^p & F\eta_2^p & F\zeta_2^p & 0 & 0 & 0 & -X_2^p\xi_2^p & -X_2^p\eta_2^p & -X_2^p\zeta_2^p \\ 0 & 0 & 0 & F\xi_2^p & F\eta_2^p & F\zeta_2^p & -Y_2^p\xi_2^p & -Y_2^p\eta_2^p & -Y_2^p\zeta_2^p \\ F\xi_3^p & F\eta_3^p & F\zeta_3^p & 0 & 0 & 0 & -X_3^p\xi_3^p & -X_3^p\eta_3^p & -X_3^p\zeta_3^p \\ 0 & 0 & 0 & F\xi_3^p & F\eta_3^p & F\zeta_3^p & -Y_3^p\xi_3^p & -Y_3^p\eta_3^p & -Y_3^p\zeta_3^p \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ F\xi_k^p & F\eta_k^p & F\zeta_k^p & 0 & 0 & 0 & -X_k^p\xi_k^p & -X_k^p\eta_k^p & -X_k^p\zeta_k^p \\ 0 & 0 & 0 & F\xi_k^p & F\eta_k^p & F\zeta_k^p & -Y_k^p\xi_k^p & -Y_k^p\eta_k^p & -Y_k^p\zeta_k^p \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ F\xi_N^p & F\eta_N^p & F\zeta_N^p & 0 & 0 & 0 & -X_N^p\xi_n^p & -X_N^p\eta_N^p & -X_N^p\zeta_N^p \\ 0 & 0 & 0 & F\xi_N^p & F\eta_N^p & F\zeta_N^p & -Y_N^p\xi_N^p & -Y_N^p\eta_N^p & -Y_N^p\zeta_N^p \end{bmatrix} \tag{18}$$

B zaś jest wektorem 2(N-1) wymiarowym:

$$B=[X_2^p-X_1^p \;\; Y_2^p-Y_1^p \ldots X_k^p-X_1^p \;\; Y_k^p-Y_1^p \ldots X_N^p-X_1^p \;\; Y_N^p-Y_1^p]^T \tag{19}$$

Gdyby wartość α była znana, to wektor R_{vec}, a tym samym elementy macierzy R można byłoby wyznaczyć stosując metodę najmniejszych kwadratów. Ocena $\hat{R}_{vec}$ wektora R_{vec} metoda najmniejszych kwadratów dana jest przez [9]:

$$\hat{R}_{vec}=(U^TU)^{-1}U^TB\alpha \tag{20}$$

Jest ona wyznaczona z dokładnością do nieznanego współczynnika skali α.

Jednak z drugiej strony wiadomo, że norma macierzy R jako ortogonalnej musi wynosić $\sqrt{3}$ (zob. [1]), tzn:

$$\|R\|=\sqrt{tr(RR^T)} = \sqrt{R_{vec}^T R_{vec}} = \sqrt{3} \tag{21}$$

Zakładając, że ta sama własność musi zachodzić dla oceny, mamy:

$$\hat{R}_{vec}^{T}\,\hat{R}_{vec} = \hat{\alpha}^2\, B^T U (U^T U)^{-2} U^T B = 3, \tag{22}$$

stąd:

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{3}{B^T U (U^T U)^{-2} U^T B}} \tag{23}$$

W powyższym wzorze używa się symbolu $\hat{\alpha}$ zamiast α dla zaznaczenia, że (23) nie wyznacza dokładnej wartości współczynnika skali, a jedynie jego ocenę.

Podstawiając (23) do (20) oraz do (11) otrzymujemy:

$$\hat{R}_{vec} = \sqrt{\frac{3}{B^T U (U^T U)^{-2} U^T B}}\,(U^T U)^{-1} U^T B. \tag{24}$$

$$\hat{T} = \sqrt{\frac{3}{B^T U (U^T U)^{-2} U^T B}} \left[\frac{X_1^p}{F}, \frac{Y_1^p}{F}, 1 \right]^T \tag{25}$$

Układając ponownie elementy wektora $\hat{R}_{vec}$ w macierz dostajemy ocenę $\hat{R}$:

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{vec}(1), & \hat{R}_{vec}(2), & \hat{R}_{vec}(3) \\ \hat{R}_{vec}(4), & \hat{R}_{vec}(5), & \hat{R}_{vec}(6) \\ \hat{R}_{vec}(7), & \hat{R}_{vec}(8), & \hat{R}_{vec}(9) \end{bmatrix} \tag{26}$$

gdzie $\hat{R}_{vec}(k)$ jest k-tym elementem wektora $\hat{R}_{vec}$.

Wzory (25) i (26) określające oceny poszukiwanych wielkości są podsumowaniem podstawowej części algorytmu.

5. PARAMETRYZACJA MACIERZY OBROTU

Z powodu błędów (z których najważniejsze są błędy pomiaru współrzędnych ekranowych) oceny parametrów położenia i orientacji dane wzorami (25) i (26) będą się różnić od rzeczywistych wartości.

O ile oceny wektora translacji $\hat{T}$ nie da się już poprawić, to dla macierzy rotacji, której ocena dana jest przez (26), można jeszcze uzyskać dokładniejsze oszacowanie. Podstawą dla tego oszacowania jest spostrzeżenie, że ocena $\hat{R}$ dana przez (26) na ogół nie będzie macierzą ortogonalna - z powodu wspomnianych błędów. Ponieważ macierz rotacji musi być ortogonalna (o wyznaczniku równym +1), zatem z powyższego wynika, że można jeszcze poprawić ocenę (26) przez dobór takiej macierzy ortogonalnej $\hat{R}_1$, dla której norma

$$\left\| \hat{R} - \hat{R}_1 \right\| \tag{27}$$

osiąga minimum. Problem ten jest znany w literaturze. Jego analityczne rozwiązanie otrzymane z zastosowaniem teorii kwaternionów jest przedstawione w [3]. Ma ono następującą postać:

$$\hat{R}_1 = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_2q_1 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_3q_1 - q_0q_2) & 2(q_3q_2 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Przyjęto przy tym następujące założenia:
Wektor:

$$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T \tag{29}$$

jest wektorem własnym (o długości jednostkowej) odpowiadającym najmniejszej wartości własnej macierzy:

$$D = \sum_{i=1}^{3} D_i^T D_i \tag{30}$$

W powyższym wzorze 4 x 4-wymiarowe macierze D_i określone są następująco:

$$D_i = \begin{bmatrix} 0 & (I_i - \hat{R}_i)^T \\ I_i - \hat{R}_i & [I_i + \hat{R}_i]_{\oplus} \end{bmatrix} \tag{31}$$

Z kolei I - jest 3 x 3-wymiarową macierzą jednostkową, I_i oraz $\hat{R}_i$ oznaczają i-te kolumny macierzy I_i oraz $\hat{R}_i$, natomiast oznaczenie

$$[C]_{\oplus} \tag{32}$$

gdzie $C = [c_1, c_2, c_3]^T$ jest wektorem 3-wymiarowym - określa macierz zbudowana z elementów C:

$$[C]_{\oplus} = \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

LITERATURA

[1] K. Kanatani, Group theoretical methods in image understanding, Springer-Verlag, 1990.
[2] R.Y. Tsai, T.S.Huang: Uniqueness and estimation of 3-D motion parameters of rigid bodies with curved surfaces, IEEE Trans., PAMI, vol. 6, 1984, pp. 71-180.
[3] J. Weng, T.S. Huang, N. Ahuja: Motion and structure from twoperspective views: Algorithmas, error analysis and error estimation, IEEE Trans. PAMI, vol.11., 1989, pp. 451-476.
[4] A. Polański: Algorytm wyznaczania parametrów ruchu na podstawie pola przemieszczeń ZN Pol. Śl. Automatyka 97, 1990.
[5] A. Polański, K. Wojciechowski: Wybór funkcji celu w algorytmach wyznaczania parametrów ruchu, ZN Pol. Śl. Automatyka 107, 1992.
[6] J. Wneg, T.S. Huang, N. Ahuja: Motion and structure from linecorrespondences closed from solution, uniqueness, and optimization, IEEE Trans. PAMI, vol. 14, 1992, pp. 318-336.
[7] A. Świerniak: Wyznaczanie parametrów ruchu na podstawie długiego ciągu obrazów, ZN Pol. Śl. Automatyka 97, 1990.

[8] R. Jóźwicki: Teoria odwzorowania optycznego, PWN, Warszawa 1988.
[9] K. Mańczak: Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania, WNT, Warszawa 1979.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ryszard Tadeusiewicz

Wpłynęło do Redakcji 14.12. 1992 r.

Abstract

The measurements of the relative positions and orientations of rigid bodies belong to the most important problems of image analysis. The input onformation for the algorithms for determining positions and orientations is the sequence of images transmitted by the camera. Usually it is assumed that no additional informatiuon about the structure of the transmitted scene images is available. With this assumption the algorithma are flexible, thhey, can be applied in many different situations. However their drawback is their complexity. Sometimes at least three or even more images must be processed before any results are obtained.

The paper presents a simple algorithm for determining the position and orientation of rigid bodies basing on visual information. The simplicity is achieved due to the assumption that some information about the structure of the observed scene is given. This assumption limits the area of possible applications of the algorithm, however in many situations is can be justified.

The perspective transformation is taken as the model of vision channel. Then the system of linear equations is constructed, which constains the parameters of the rotation matrix and the translation vector. The solution contains the unknown scaling parameter α which id then determined by the condition that the rotation matrix is orthogonal. It is assumed that the measurements are disturbed by noise and that the number of equations is greater tha the number of unknown parameters. According to this the least squares algorithm is employed.