ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: AUTOMATYKA z. 113 Nr kol. 1246

Andrzej POLAŃSKI

WYZNACZENIE STATYSTYCZNIE OPTYMALNYCH PRAW STEROWANIA W PROBLEMACH STATYCZNYCH Z OGRANICZENIAMI[1]

Streszczenie. Praca poświęcona jest problemowi rozszerzenia zasady minimalizacji i uśredniania na zadania optymalizacji stochastycznej, w których występują ograniczenia. Rozważa się klasę statycznych problemów optymalizacji stochastycznej, w których występują ograniczenia: sztywne, na warunkowe wartości oczekiwane i na wartości oczekiwane. Przedstawia się dwie metody rozwiązania. Pierwsza, słuszna dla problemów, w których nie występują ograniczenia na wartości oczekiwane, jest bezpośrednim uogólnieniem zasady minimalizacji i uśredniania. W drugiej metodzie, obowiązującej dla pełnego sformułowania problemu proponuje się wykorzystanie przy rozwiązaniu dualnej postaci zadania optymalizacji.

DETERMINING THE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL LAWS FOR CONSTRAINED STATIC PROBLEMS

Summary. The paper is devoted to the problem of extending the Minimization and Averaging (Min-E) Principle [4] to the case of stochastic optimization problems with constraints. Two approaches to the constrained stochastic optimization problem are presented. The first is a direct generalization of the Mine-E Principle. However it is valid only under some bounds imposed on the from of constraints. The second, general approach uses the dual from of the optimization problem.

[1] *Praca była finansowana z grantu wewnętrznego BK-464*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ В СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Резюме. Работа посвящена проблеме расширения Принципа Минимизации и Усреднения на задачи стохастической оптимизации с ограничениями. Рассматривается , в которых появляются жесткие ограничения на условные математические ожидания и математические ожидания. Представлены два метода решения. Первый метод, который предложен для проблем без ограничений на математическое ожидание, является непосредственным обобщением Принципа Минимизации и Усреднения. Вторый метод, предложен для полной формулировки проблемы, использует для решения дуальный вид оптимизационной задачи.

1. WSTĘP

W pracy rozważa się zagadnienie wyznaczania statystycznie optymalnych praw sterowania w problemach statycznych z ograniczeniami. Punktem wyjścia jest zasada minimalizacji i uśredniania [4]. Umożliwia ona sprowadzenia zadania wyznaczania praw sterowania do rodziny zadań optymalizacji, w których argumentem minimalizacji jest wektor liczb rzeczywistych. W oryginalnym sformułowaniu zasada minimalizacji i uśredniania obejmowała przypadek, gdy nie występują ograniczenia. Pierwszą pracą, w której rozważano problem rozwiązania idei tej zasady na przypadek z ograniczeniami, była [7]. Podano tam przykład obliczeniowy jej zastosowania dla szczególnej postaci statycznego problemu wyznaczania prawa sterowania.

Niniejsza praca ma charakter ogólniejszy. Rozważa się tu klasę problemów optymalizacji stochastycznej przedstawioną w punkcie 3. Przedstawia się dwie metody rozwiązania. Pierwsza, słuszna dla problemów, w których nie występują ograniczenia na wartości oczekiwane, jest bezpośrednim uogólnieniem zasady minimalizacji i uśredniania. W drugiej metodzie, obowiązującej dla pełnego sformułowania problemu, proponuje się wykorzystanie przy rozwiązaniu dualnej postaci zadania optymalizacji. Otrzymany problem jest dość złożony i dlatego przedstawia się pewną metodę przybliżoną upraszczającą rozwiązanie.

2. ZASADA MINIMALIZACJI I UŚREDNIANIA

Jako wprowadzenie do dalej przedstawionych zagadnień rozpatrzymy następujący problem minimalizacji bez ograniczeń:
wyznaczyć:

$$\min_{U=\mathcal{U}(Y)} E l_0(Y,U,V) \tag{1}$$

Dalej będą obowiązywały wprowadzone tu oznaczenia. We wzorze (1) l_0 oznacza mierzalna, rzeczywistą funkcję celu. Jej argumenty są następujące:
- Y jest r-wymiarowym wektorem dostępnych pomiarów,
- U jest m-wymiarowym wektorem sterowań,
- V jest - s-wymiarowym wektorem zakłóceń.

Zakłada się, że Y i V są wektorami losowymi; przestrzeń probabilistyczną, na której określone są składowe wektorów losowych Y i V, oznacza się przez $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Decyzje o wartościach składowych wektora sterowań należy podjąć na podstawie znajomości realizacji wektora dostępnych pomiarów $Y(\omega)$. To znaczy - optymalnych praw sterowania poszukuje się jako mierzalnego odwzorowania

$$\mathcal{U} : R^r \ni y \to u(y) \in R^m \ . \tag{2}$$

Biorąc pod uwagę, że argument y funkcji $\mathcal{U}$ we wzorze (2) jest realizacją wektora losowego Y.

$$y = Y(\omega) \ , \quad \omega \in \Omega \ . \tag{3}$$

widzimy, że każde prawo sterowania określa wektor losowy:

$$U(\omega) = \mathcal{U}(Y(\omega)) \ . \qquad \omega \in \Omega \ . \tag{4}$$

Oznaczamy przez $\mathfrak{N}$ σ - podciało σ - ciała $\mathfrak{N}$ generowane przez wektor losowy Y. Jak wiadomo, składowe wektora losowego U określonego wzorem (4) są zmiennymi losowymi mierzalnymi względem $\mathfrak{N}$. I na odwrót, dla dowolnego wektora losowego U, o składowych mierzalnych względem $\mathfrak{N}$, istnieje mierzalna odwzorowanie $\mathcal{U}$, o postaci (2), takie że zachodzi (4) ([1] tw. 20.1). Poszukiwanie optymalnego prawa sterowania $\mathcal{U}$ (Y) jest zatem równoważne poszukiwaniu wektora U zmiennych losowych mierzalnych względem σ - ciała $\mathfrak{N}$. Do problemu (1) można zastosować **zasadę minimalizacji i uśredniania.** Załóżmy, dla uproszczenia, że wektory losowe Y i V są

niezależne. Oznaczmy warunkową wartość oczekiwaną funkcji celu względem σ - ciała $\mathfrak{N}$ (generowanego przez wektor losowy Y) przez

$$\hat{I}_0(Y,U)=E(I_0(Y,U,V)\,|\,\mathfrak{N}) \quad . \tag{5}$$

Dla realizacji wektorów losowych

$$y=Y(\omega)\ ,\ u=U(\omega)\ ,\ y\in R^r\ ,\ u\in R^m,\ \omega\in\Omega \tag{6}$$

zachodzi

$$\hat{I}_0(y,u)=E(I_0(Y,U,V)|\ Y=y,\ U=u). \tag{7}$$

Na podstawie zasady minimalizacji i uśredniania (lemat 1 [4]) optymalna wartość wektora sterowań u_0, która odpowiada otrzymanej realizacji wektora pomiarów $y = Y(\omega)$, wynika z rozwiązania następującego problemu minimalizacji deterministycznej

$$\min_{u\in R^m} \hat{I}_0(y,u)=\hat{I}_0(y,u_0(y)) \ . \tag{8}$$

Na podstawie założonej niezależności wektorów losowych Y i V funkcja $\hat{I}_0(y,u)$, która podlega minimalizacji, określona jest przez [1]:

$$\hat{I}_0(y,u)=EI_0(y,u,V). \tag{9}$$

A zatem otrzymany przez zastosowanie zasady minimalizacji i uśredniania problem (8) polega teraz na wyznaczeniu optymalnego wektora liczb rzeczywistych $u_0(y)$. Problem ten jest dodatkowo parametryzowany przez realizację y wektora losowego dostępnych pomiarów Y.

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W pracy rozważa się problemy bardziej złożone od (1), w których występują ograniczenia. Ogólna postać rozpatrywanego statycznego problemu wyznaczania statystycznie optymalnych praw sterowania z ograniczeniami jest następująca:

wyznaczyć

$$\min_{U\in\overline{U}} EI_0(Y,U,V) \tag{10}$$

przy ograniczeniach
(sztywnych)

$$l_i(Y,U) \leq 0 \qquad \text{z p.1}, \quad i \in I, \tag{11}$$

(na warunkowe wartości oczekiwane)

$$E[l_j(Y,U,V) \mid \mathfrak{N}] \leq 0 \qquad \text{z p.1}, \quad j \in J, \tag{12}$$

(na wartości oczekiwane)

$$E\, l_k(Y,U,V) \leq 0, \quad k \in K. \tag{13}$$

Obowiązują tu wszystkie oznaczenia i założenia opisane poprzednio. Ponadto I.J.K oznaczają parami rozłączne, skończone zbiory indeksów nie zawierające zera. Mierzalne funkcje l_n, $n \in \{0\} \cup I \cup J \cup K$ przyjmują wartości rzeczywiste. Warunkowa wartość oczekiwana we wzorze (12) jest liczona względem σ - ciała $\mathfrak{N}$ generowanego przez wektor losowy Y. Ograniczenia zadane są tylko w postaci nierówności. Dla skrócenia zapisu nie umieszczono odrębnych wzorów na ograniczenia równościowe, mogą one być uwzględnione w postaci par ograniczeń nierównościowych o przeciwnych znakach [8]. Jawne rozróżnienie ograniczeń równościowych od nierównościowych nie jest dla przeprowadzanych rozważań konieczne.

Przyjmuje się precyzyjniejsze określenie zbioru, na którym przeprowadza się minimalizację. Minimum poszukuje się w przestrzeni wektorów losowych o składowych mierzalnych względem σ - ciała $\mathfrak{N}$. Przez $\overline{U}$ oznacza się zbiór takich wektorów losowych należących do tej przestrzeni, dla których zmienne losowe l_0, $n \in \{0\} \cup J \cup K$ są całkowalne. Tylko w takim zbiorze ma sens poszukiwanie minimum. Zakłada się także, że zbiór ten jest niepusty.

4. PRZYPADEK BRAKU OGRANICZEŃ NA WARTOŚCI OCZEKIWANE

W punkcie tym rozważamy problem minimalizacji (10) - (12), w którym nie występują ograniczenia (13) na wartości oczekiwane. Na taki przypadek można bezpośrednio uogólnić zasadę minimalizacji i uśredniania [4]. Aby to wykazać, rozważmy najpierw pewien problem pomocniczy o następującej postaci

wyznaczyć

$$\min_{U \in \overline{U}} E\, m_0(Y,U) \tag{14}$$

przy ograniczeniach

$$m_n(Y,U) \le 0 \qquad z\,p.1, \qquad n \in N \tag{15}$$

przy czym N jest zbiorem indeksów; m_i, $i \in \{0\} \cup N$ - mierzalnymi funkcjami rzeczywistymi. Podobnie jak poprzednio przez $\overline{U}$ oznacza się zbiór wektorów losowych o składowych mierzalnych względem σ - ciała $\mathfrak{N}$, dla których zmienna losowa m_0 jest całkowalna; $\mathfrak{N}$ jest r-wymiarowym wektorem losowym pomiarów; $\mathfrak{N}$ - σ - ciało generowane przez Y. Zadanie powyższe jest szczególną postacią problemu (10) - (12), w której nie występuje wektor zakłóceń V.

Zadanie (14) - (15) jest równoważne z rodziną problemów deterministycznych. Udowodnimy następujący lemat, który jest uproszczeniem tw. 3.1. str. 171 [5].

Lemat 1. Załóżmy, że istnieje taki zbiór $\tilde{Y} \subset R^r$, że:

1. $P\{Y \in \tilde{Y}\} = 1$. (16)

2. dla każdego $y \in \tilde{Y}$ istnieje rozwiązanie - $u_0(y)$ - zadania minimalizacji wyznaczyć

$$\min_{u \in R^m} m_0(y,u) \tag{17}$$

przy ograniczeniach

$$m_0(y,u) \le 0, \qquad n \in N, \tag{18}$$

3. wektor losowy U_0 określony przez

$$U_0(\omega) = u_0(Y(\omega)), \qquad \omega \in \Omega \tag{19}$$

należy do zbioru $\overline{U}$,

wtedy istnieje rozwiązanie problemu (16) - (17) i jest ono określone przez wektor losowy U_0 w (19).

Dowód. Wektor losowy U_0 we wzorze (19) jest określony prawidłowo, dlatego że odwzorowanie $u_0(y)$ dane przez rozwiązanie (17) - (18) jest mierzalne [5]. Na podstawie 1 i 2 wektor losowy U_0 spełnia z p.1 ograniczenia (15), na mocy 3 należy do zbioru $\overline{U}$. Weźmy dowolne inne odwzorowanie $u_1(y)$ takie, że $m_0(y, u_1, (y)) \le 0$, $n \in N$, dla $y \in \tilde{Y}$. Niech wektor losowy U_1 będzie określony przez

$$U_1(\omega) = u_1(Y(\omega)) . \tag{20}$$

Z (17) - (18) wynika, że

$$E\, m_0(Y,U_0) \le E m_0(Y,U_1)\ ,\quad \text{c.n.d.} \tag{21}$$

A zatem, przy założeniach lematu problem (15) - (16) jest równoważny z rodziną zadań deterministycznych (17) - (18) parametryzowaną przez realizacje wektora pomiarów $y = Y(\omega)$. Aby wyliczyć wartość poszukiwanego prawa sterowania w jednym punkcie należy rozwiązać jeden problem deterministyczny.

Powróćmy teraz do problemu (10) - (12). Korzystając z udowodnionego lematu wykażemy, że rozwiązanie tego zadania wynika z wykonania operacji minimalizacji deterministycznej (z ograniczeniami) i warunkowego uśredniania. Zachodzi

Twierdzenie 1. Zasada minimalizacji i uśredniania

Niech

$$\hat{l}_0(Y,U) = E[l_n(Y,U,V)\,|\,\mathfrak{N}]\ , \tag{22}$$

przy czym indeksy n są elementami zbioru $\{0\} \cup J$. Załóżmy także, że istnieje taki zbiór $\tilde{Y} \in R^r$, że:

1. $P\{Y \in \tilde{Y}\} = 1.$ (23)
2. dla każdego $y \in \tilde{Y}$ istnieje rozwiązanie - $u_0(y)$ - zadania minimalizacji: wyznaczyć

$$\min_{u \in R^m} \hat{l}_0(y,u) \tag{24}$$

przy ograniczeniach

$$l_i(y,u) \le 0\ ,\quad i \in I\ , \tag{25}$$

$$l_j(y,u) \le 0\ ,\quad i \in J\ , \tag{26}$$

3. wektor losowy U_0 - określony przez

$$U_0(\omega) = u_0(Y(\omega))\ ,\quad \omega \in \Omega \tag{27}$$

należy do zbioru $\overline{U}$ (zbiór $\overline{U}$, w przypadku zadania (10) - (12) jest zbiorem wektorów losowych o składowych mierzalnych względem σ - ciała $\mathfrak{N}$, takich że zmienne losowe l_0 i l_j, $j \in J$ są całkowalne).

Wtedy istnieje rozwiązanie problemu (10) - (12) i jest ono określone przez wektor losowy U_0 dany przez (27).

Dowód. Uzasadnienie, że warunkowe wartości oczekiwane można przedstawić w postaci (22) oraz że funkcje $\hat{l}_0$ i $\hat{l}_j$, $j \in J$ są mierzalne, można znaleźć np. w [1] [5]. Podstawiając (28) w (10) i (12) oraz uwzględniając fakt, że

$$El_0(Y,U,V) = EE[l_0(Y,UV) \mid \mathfrak{N}] = E\,\hat{l}_0(Y,U) \quad . \tag{28}$$

otrzymujemy następujący problem minimalizacji równoważny z (10) - (12):

wyznaczyć

$$\min_{U \in \bar{U}} E\,\hat{l}_0(Y,U) \tag{29}$$

przy ograniczeniach

$$l_i(Y,U) \le 0 \quad , \quad \text{z p.1} \quad , \quad i \in I \tag{30}$$

$$\hat{l}_j(Y,U) \le 0 \quad , \quad \text{z p.1.} \quad , \quad j \in J \ . \tag{31}$$

Z kolei do otrzymanego problemu można zastosować udowodniony poprzednio lemat 1, przy czym $m_0 = \hat{l}_0$, $m_0 = l_i$ lub $\hat{l}_j$, $N = I \cup J$. Wynika z tego bezpośrednio teza twierdzenia - istnieje rozwiązanie problemu (10) - (12), i jest ono określone przez wektor losowy U_0 dany przez (27) *cdn.*

Oznaczmy przez W_Y rodzinę wektorów losowych zadaną przez rozkład warunkowy $F_{V|y}$ [1], wektory losowe należące do tej rodziny oznaczać będziemy przez W_y. (W przypadku gdy wektory losowe Y i V są niezależne, zachodzi $W_y = V$ dla wszystkich $W_y \in W_Y$). Funkcje $\hat{l}_n$, $n \in \{0\} \cup J$ występujące we wzorze (22) można wyznaczyć jako:

$$\hat{l}_n(y,u) = El_n(y,u,W_y), \quad y \in R^r \quad , \quad u \in R^m \tag{32}$$

Problem (10) - (12) został sprowadzony do rodziny zadań o postaci (29) - (31), parametryzowanej przez realizacje wektora pomiarów $y = Y(\omega)$. Załóżmy, że celem jest wyznaczenie poszukiwanego prawa sterowania tylko w jednym punkcie - przy zadanej wartości realizacji i wektora pomiarów. Dla (pojedynczego) problemu (29) - (31) należy zminimalizować funkcje $\hat{l}_0$, która nie jest dana bezpośrednio, lecz przez wartość oczekiwaną (32) (gdy n = 0). Także część funkcji opisujących ograniczenia - $\hat{l}_j$ - otrzymuje się dopiero po wykonaniu uśredniania wg (32).

5. PRZYKŁAD OGÓLNY

Obecnie rozważamy ogólną postać zadania (10) - (13), w którym występują trzy typy ograniczeń. Istnienie ograniczeń na wartości oczekiwane (13) powoduje, że nie można postępować tak jak w poprzednim punkcie. Zwróćmy uwagę, że gdy wektory losowe Y i V są niezależne - to przy rozwiązywaniu problemu (10) - (12) rozkład wektora losowego Y ma znaczenie tylko dla określenia zbioru $\tilde{Y}$, tzn. dziedziny (zbioru argumentów) dla praw sterowania. Dla zadań, które różnią się tylko rozkładami wektorów losowych Y, lecz przy tym mają jednakowe zbiory $\tilde{Y}$ np. $\tilde{Y} = R^r$) otrzymuje się identyczne prawa sterowania. Natomiast przy występowaniu ograniczeń typu (13) postać rozkładu wektora losowego Y jest oczywiście istotna.

Aby uwzględnić także wpływ ograniczeń na wartości oczekiwane (13), skorzystamy z twierdzeń ogólnej teorii optymalizacji w przestrzeniach wektorowych, które są przedstawiane w wielu pracach, np. [3] [6] [9]. Tu stosować będziemy układ warunków wystarczających przedstawiony w [6] (rozdz. 8), konkretnie - twierdzenie o punkcie siodłowym (tw. 2 str. 301). Sformułowanie problemu optymalizacji (10) - (13) jest oczywiście nadal obowiązujące, lecz dla skorzystania z tego twierdzenia trzeba formułom nadać odpowiednią interpretację.

Sformułowanie zadania w przestrzeni wektorowej. Opiszemy kolejno elementy sformułowania zadania (10) - (13) w taki sposób, aby można było zastosować twierdzenie o punkcie siodłowym.

Przestrzeń wektorowa rozwiązań jest oznaczona w [6] przez X. W naszym przypadku jest to przestrzeń m-wymiarowych wektorów losowych o składowych mierzalnych względem σ - ciała $\mathfrak{N}$. Jest to przestrzeń nieunormowana, wykorzystywany wynik dopuszcza taką sytuację. Elementy przestrzeni X oznacza się w [6] przez x, tu są to wektory losowe sterowań - U.

Zadanie polega na minimalizacji funkcjonału oznaczonego w [6] przez f (x), odwzorowującego przestrzeń X w zbiór liczb rzeczywistych. W naszym przypadku funkcjonał ten dany jest przez wartość oczekiwaną E l_0 (Y, U, V). Jego argumentem jest U, natomiast Y i V uważamy za parametry.

Rozwiązania poszukuje się w pewnym podzbiorze przestrzeni X, w [6] jest on oznaczony przez Ω. W przypadku zadania (10) - (13) podzbiór przestrzeni wektorów losowych, w którym poszukuje się rozwiązania, oznaczać będziemy przez $\overline{U}_{I,J}$, jest to zbiór określony następująco

$$\overline{U}_{I,J} = \{U \in \overline{U} : l_i(Y,U) \le 0 \quad \text{z p.1}, \ i \in I,$$

$$E\,[l_j(Y,U,V) \,|\, \mathfrak{N}] \le 0 \quad \text{z p.1}, \ j \in J\}. \tag{33}$$

tzn. $\overline{U}_{I,J}$ jest zbiorem takich wektorów losowych $U \in \overline{U}$, dla których spełnione są ograniczenia (11), (12).

Odwzorowanie określające ograniczenia - w [6] jest oznaczone przez G(x) - odwzorowuje zbiór Ω w przestrzeń unormowaną Z z domkniętym stożkiem dodatnim P. Dla zadania (10) - (13) jest ono określone przez ograniczenia na wartości oczekiwane - (13). Jeśli liczbę elementów zbioru K oznaczymy przez $\overline{k}$, to odwzorowanie G dane przez (13) ma postać

$$G : \overline{U}_{IJ} \ni U \rightarrow G(U) = [El_k(Y,U,V)]_{k \in K} \in R^{\overline{k}} . \tag{34}$$

Przy czym przez $[\cdot]_{k \in K}$ oznaczono wektor o składowych złożonych z liczb $E\, l_k$ (Y,U,V), $k \in K$. Domknięty stożek dodatni P jest teraz zbiorem wektorów przestrzeni $R^{\overline{k}}$ - o nieujemnych składowych. Jest to stożek o niepustym wnętrzu, jak wymagają założenia wykorzystywanego twierdzenia.

Przy opisanej powyżej interpretacji zadania (10 - (13) można mu przypisać funkcjonał Lagrange'a, o następującej postaci

$$L(U,\lambda) = El_0(Y,U,V) + \sum_{k \in K} \lambda_k \, E\, l_k(U,Y,V). \tag{35}$$

przy czym mnożniki Lagrange'a λ_k, $k \in K$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi oraz $\lambda = [\lambda_k]$, $k \in K$.

Przechodzimy do rozpatrzenia rozwiązania zadania (10) - (13) przez minimalizację i uśrednianie. W rozważaniach zakładać będziemy, że istnieje punkt siodłowy funkcjonału Lagrange'a (35) (na zbiorze $\overline{U}_{I,J} \times \{\lambda : \lambda \geq 0\}$). (Jest to warunek dość trudny do sprawdzenia). Jest to, jak wiadomo [6] [10], warunek wystarczający do istnienia rozwiązania problemu (10) - (13), a także do równoważności zadania (10) - (13) z zadaniem do niego dualnym, które ma następującą postać

wyznaczyć

$$\max_{\lambda \geq 0} \Phi(\lambda) , \tag{36}$$

przy czym $\Phi(\lambda)$ jest funkcjonałem dualnym danym przez

$$\Phi(\lambda) = \min_{U \in \overline{U}_{IJ}} El_0(Y,U,V) + \sum_{k \in K} \lambda_k El_k(Y,U,V), \tag{37}$$

Zatem statystycznie optymalne prawa sterowania dla problemu (10) - (13) można otrzymać rozwiązując zadanie dualne (36) - (37). Rozważmy możliwość numerycznego rozwiązywania zadania dualnego (36) - (37). Zawiera ono dwie operacje optymalizacji dane przez każdą z formuł (36) i (37). Rozpatrzmy każdą z nich osobno, zaczynając od (37). Dla minimalizowanego funkcjonału wprowadzimy oznaczenia l (Y, U, V, λ), tzn.

$$\Phi(\lambda) = \min_{U \in \overline{U}_{IJ}} E\, l(Y,U,V,\lambda) \;, \tag{38}$$

gdzie

$$l(Y,U,V,\lambda) = l_0(Y,U,V) + \sum_{k \in K} \lambda_k l_k(Y,U,V) \tag{39}$$

Jeśli założymy, że wektor λ ma ustalona wartość, to biorąc pod uwagę określenie zbioru $\overline{U}_{I,J}$ - widać, że problem (37) należy do klasy opisywanej w punkcie 4. Przyjmijmy, ze spełnione są założenia twierdzenia 1. Wtedy na podstawie tego twierdzenia optymalny wektor losowy U_0 (Y,λ), określający rozwiązanie (37) otrzymać można rozwiązując nastepującą rodzinę zadań deterministycznych parametryzowaną przez y = Y(ω):

wyznaczyć

$$\min_{u \in R^m} E\, \hat{l}(y,u,\lambda) \tag{40}$$

przy ograniczeniach

$$l_i(y,u) \le 0 \qquad i \in I \;, \tag{41}$$

$$\hat{l}_j(y,u) \le 0 \qquad j \in J. \tag{42}$$

Przy czym funkcja $\hat{l}$ określona jest przez

$$\hat{l}(Y,U,\lambda) = E[l(Y,U,V,\lambda) \mid \mathfrak{N}] =$$

$$= \hat{l}_0(Y,U,\lambda) + \sum_{k \in K} \lambda_k \hat{l}_k(Y,U,\lambda) \tag{43}$$

Funkcje l_i, $\hat{l}_n$ wynikają z określenia zbioru $\overline{U}_{I,J}$, przy tym $\hat{l}_n$, $n \in \{0\} \cup J \cup K$, określone są przez (22).

Oznaczmy dodatkowo

$$\varphi(y,\lambda) = \min_{u \in R^m} \hat{I}(y,u,\lambda) \tag{44}$$

przy ograniczeniach (41) - (42).
Wtedy także na podstawie twierdzenia 1 zachodzi

$$\Phi(\lambda) = E\varphi(Y,\lambda). \tag{45}$$

Gdyby optymalna wartość mnożników λ_0 była znana, to wektor losowy U_0 (Y, λ_0) otrzymany na podstawie (40) - (42) byłby już optymalny dla zadania (10) - (13). Jednak wartość λ_0 dopiero należy wyznaczyć, prowadzi to do drugiego z problemów optymalizacji - (36).

Wyznaczenie λ_0 polega na maksymalizacji funkcji $\Phi(\lambda)$, która dana jest przez wartość oczekiwaną (45). Z kolei funkcja φ (y, λ) występująca w (45) także nie jest dana bezpośrednio, lecz wynika z rozwiązania zadania (40) - (42) i jest określona algorytmicznie. Zadania takiego typu są trudne do rozwiązywania, zwłaszcza metodami numerycznymi. Dlatego w następnym punkcie przedstawimy metodę przybliżoną pozwalającą na uproszczenie sformułowanego problemu.

6. METODA PRZYBLIŻONA

Opiszemy metodę, która pozwala na uproszczenie zadania (10) - (13). Tą metodą uzyskuje się już tylko rozwiązanie przybliżone.

Przybliżone deterministyczne odpowiedniki zadań stochastycznych. [2]. Aproksymacje, których stosowanie się tu proponuje, polegają na rozwinięciu metody przybliżonej rozwiązania przedstawionej w [2] (str. 80). Polega ona na rozpatrywaniu zamiast zadania (24) - (26), następującego problemu

wyznaczyć

$$\min_{u \in R^m} l_0(u,\overline{V}) \tag{46}$$

przy ograniczeniach

$$l_i(u) \le 0, \qquad i \in I, \tag{47}$$

$$l_j(u,\overline{V}) \le 0, \quad j \in J. \tag{48}$$

który nazywany jest przybliżonym deterministycznym odpowiednikiem zadania (24) - (26). We wzorach (46) i (48) oznaczono

$$\overline{V} = E(V) . \tag{49}$$

Powyższa aproksymacja jest sensowna przy niewielkim rozrzucie możliwych realizacji wektora losowego V wokół wartości średniej $\overline{V}$. Można zauważyć, że przybliżenia (46), (48) wynikają z rozwinięcia funkcji l_n, $n \in \{0\} \cup J$, w szereg Taylora względem V, wokół wartości $\overline{V}$, przy zaniedbaniu wyrazów od drugiego wzwyż, tzn.

$$l_n(u,v) \cong l_n(u,\overline{V}) + \frac{\partial l_n(u,\overline{V})}{\partial v}(v-\overline{V}) \quad , \quad n \in \{0\} \cup J. \tag{50}$$

W powyższym wzorze $\partial l_n / \partial v$ oznacza macierz pochodnych cząstkowych liczonych podług składowych wektora v. Wykonując operacje uśredniania obu stron wzoru (50) dla v=V, otrzymujemy sformułowanie zadania (46) - (48).

Idąc za tą koncepcją dalej, można uwzględnić więcej wyrazów rozwinięcia Taylora lub, ogólniej, poszukiwać przybliżenia w postaci

$$l_n(u,v) \cong \sum_{p=1}^{q_n} g_n(u)\, f_{np}(v) \quad , \quad n \in \{0\} \cup J. \tag{51}$$

Podstawiając przybliżoną zależność (51) w (24) i (26), otrzymujemy następujące zadanie

wyznaczyć

$$\min_{u \in R^m} \sum_{p=1}^{q_o} g_{op}(u)\, E\, f_{op}(V) \quad , \tag{52}$$

przy ograniczeniach

$$l_i(u) \le 0 \quad , \quad i \in I. \tag{53}$$

$$\sum_{p=1}^{q_o} g_{jp}(u)\, E\, f_{jp}(V) \le 0 \quad , \quad j \in J \quad , \tag{54}$$

które także można nazwać przybliżonym deterministycznym odpowiednikiem zadania (24) - (26). W zadaniu przybliżonym operacja uśredniania jest oddzielona od operacji minimalizacji; przy rozwiązywaniu uśrednianie wystarczy wykonać tylko raz. Aby metoda miała sens, muszą istnieć wartości oczekiwane we wzorach (52) i (54).

Zostanie teraz, zgodnie z podanymi wcześniej uwagami, przedstawiony efekt zastosowania aproksymacji (51) do problemu (36). Załóżmy, że funkcje l_n, $n \in \{0\} \cup J \cup K$, dane przez (10), (12), (13) można aproksymować w postaci analogicznej do (51):

$$l_n(y,u,v) \cong \sum_{p=1}^{q_n} g_{np}(y,u)\, f_{np}(v)\ , \quad n \in \{0\} \cup J \cup K, \qquad (55)$$

$$y \in R^r\ , \ u \in R\ , \ v \in R^g$$

Weźmy teraz pod uwagę funkcje $\hat{l}_n(y,u)$ we wzorze (32), które określają warunkowe wartości oczekiwane. Będziemy zakładać, że w (32) indeks n przyjmuje szerszy zakres wartości, tzn. $n \in \{0\} \cup J \cup K$. Podstawiając (51) w (32) otrzymujemy:

$$\hat{l}_n(y,u) \cong \sum_{p=1}^{q_n} g_{np}(y,u)\, \gamma_{np}(y), \quad n \in \{0\} \cup J \cup K\ , \qquad (56)$$

gdzie

$$\gamma_{np}(y) = E f_{np}(W_y)\ . \qquad (57)$$

Wprowadzamy także następujące oznaczenia dla wektorów zbudowanych z funkcji γ_{np}, $n \in \{0\} \cup J \cup K$:

$$\bar{\gamma}_n = [\gamma_{np}]\ , \quad p = 1 \ldots q_n\ , \qquad (58)$$

$$\bar{\gamma}_J = \mathrm{vec}[\bar{\gamma}_j]\ , \ j \in J\ , \qquad (59)$$

$$\bar{\gamma}_K = \mathrm{vec}\,[\bar{\gamma}_k]\ , \quad k \in K\ , \qquad (60)$$

przy czym vec [·] oznacza wektor blokowy zbudowany z wektorów wymienionych w nawiasie kwadratowym.

Rozważmy teraz uproszczenia wprowadzane w zadaniach (36) i (37) przez poczynione założenia odnośnie do postaci funkcji l_n - (51).

Zacznijmy od zadania wyznaczenia funkcjonału dualnego $\Phi(\lambda)$, które, jak wykazano, sprowadza się do rodziny zadań (40) - (42). Podstawiając (56) w (40), (43) otrzymujemy następującą aproksymację dla tego problemu:

wyznaczyć

$$\min_{u \in R^m} \sum_{p=1}^{q_o} g_{op}(y,u)\,\gamma_{op}(y) + \sum_{k \in K} \sum_{p=1}^{q_k} \lambda_k\, g_{kp}(y,u)\,\gamma_{kp}(y) \tag{61}$$

przy ograniczeniach

$$l_i(y,u) \le 0\ , \qquad i \in I\ , \tag{62}$$

$$\sum_{p=1}^{q_j} g_{jp}(y,u)\,\gamma_{jp}(y) \le 0 \qquad , \qquad j \in J\ , \tag{63}$$

w której operacje minimalizacji i uśredniania są oddzielone. Oznaczając, podobnie jak we wzorze (44), rozwiązanie powyższego problemu przez

$$\varphi(\lambda, y, \bar{\gamma}_o(y), \bar{\gamma}_J(y), \bar{\gamma}_K(y)) = \min_{u \in R^m} \sum_{p=1}^{q_o} g_{op}(y,u)\gamma_{op}(y) + \\ + \sum_{k \in K} \sum_{p=1}^{q_k} \lambda_k\, g_{kp}(y,u)\gamma_{kp}(y) \tag{64}$$

przy ograniczeniach (62) - (63),

stwierdzamy, że optymalna wartość wektora mnożników λ wynika z maksymalizacji

$$\max_{\lambda \ge 0} \Phi(\lambda)\ , \tag{65}$$

przy czym funkcja $\Phi(\lambda)$ dana jest przez wartość oczekiwaną

$$\Phi(\lambda) = E\,\varphi(\lambda, Y, \bar{\gamma}_o(Y), \bar{\gamma}_J(Y), \bar{\gamma}_K(Y))\ . \tag{66}$$

Z kolei w powyższym wzorze funkcja φ także nie jest dana bezpośrednio, lecz wynika z rozwiązania zadania minimalizacji (61) - (63). Uproszczenie w stosunku do problemu (36) polega na tym, że teraz w zadaniu optymalizacji, na podstawie którego wyznacza się funkcję φ, operacje minimalizacji i uśredniania są oddzielone.

LITERATURA

[1] Billingsley P.: Prawdopodobieństwo i miara. PWN. Warszawa 1987.
[2] Ermolev J.: Mietody stochastyczeskogo programirowania, Nauka, Moskwa 1976.
[3] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A.: Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji, PWN, Warszawa 1976.
[4] Gessing R.: Zasada minimalizacji i uśredniania jako metoda wyznaczania algorytmów sterowania statystycznie optymalnego. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, t. XXI, z. 4 1976, pp. 447-465.
[5] Judin A.B.: Zadaczi i mietody stochastyczeskogo programirowania, Sowetskoje Radio, Moskwa 1979.
[6] Luenberger D.G.: Teoria optymalizacji, PWN, Warszawa 1974.
[7] Ordys A.: Statyczne sterowanie stochastycznie optymalne z ograniczeniami, ZN Pol. Śl. Seria Automatyka, z. 71, 1983, pp. 107-118.
[8] Pshenichny B.N., Danilin Y.M.: Numerical methods in extremal problems, Mir, Moskwa 1978.
[9] Wierzbicki A.: Modele i wrażliwość układów sterowania, WNT, Warszawa 1977.
[10] Zangwill W.I.: Programowanie nieliniowe, WNT, Warszawa, 1974.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Wojciech Mietkowski

Wpłynęło do Redakcji 14.12. 1992 r.

Abstract

The paper is devoted to the problem of extending the Minimization and Averaging (MIn-E) Principle [4] ti the case of stochastic optimization problems with constraints. Three types of possible constraints are taken into account: rigid, on conditional expectations and on mean values.

Two methods of solution are presented. The first one, valid for the problems without constraints imposed on mean values, is the direct generalization of the Min-E Principle. The second approach, developed for the general formulation of the problem uses the dual form of the optimization problem.

Since the numerical solution of the considered problems can be very complicated, the approximate method to find a suboptimal solution is also discussed.