ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: AUTOMATYKA z. 113 Nr kol. 1246

Konrad WOJCIECHOWSKI

INWARIANTNOŚĆ PRAW STEROWANIA WZGLĘDEM INFORMACJI A PRIORI

Streszczenie. W pracy elipsoidalne zbiory informacyjne są parametryzowane przez środek ciężkości i dodatnio określoną macierz ze skalarnym parametrem γ interpretowanym jako "promień" elipsoidy. Pokazano, że środek ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego nie zależy od parametru γ i w rezultacie optymalne prawo sterowania jest inwariantne względem tego parametru. Zakładając szczególną blokowo-diagonalną strukturę macierzy T i powtarzając odpowiednie rozważania uzyskano rekurencyjne zależności pomiędzy parametrami warunkowego zbioru stanów oraz niezależność jego środka ciężkości od parametru γ.

INVARIABILITY OF CONTROL LAWS WITH RESPECT TO A PRIORI INFORMATION

Summary. In the paper ellipsoidal information sets are parameterized by their gravity center and positive definite matrix with scalar parameter γ describing the "radius" of the ellipsoid. It has been shown that the gravity center of the conditional information set does not depend on the parameter γ and in consequence the optimal control law is invariant with respect to them. Assuming specific block-diagonal structure of matrix T and repeated all considerations one can obtain recurrent dependencies between parameters of conditional sets of state, as well as invarianility of their gravity center on parameter γ.

ИНВАРИАНТНОСТЬ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Резюме. В работе эллипсоидные информационные множества параметризуются центром тяжести и положительно определенной матрицой со скалярным параметром γ, рассматриваемым как "радиус" эллипсоида. Показывается, что центр тяжести информационного множества не зависит от параметра γ и в результате оптимальный закон управления является инвариантным относительно этого параметра. Принимая особую блочно-диагональную структуру матрицы T и повторяя соответственные рассуждения, получают рекуррентные зависимости помежду параметрами условного множества состояния и независимость его центра тяжести от параметра γ.

1. WPROWADZENIE

W przypadku sterowania stochastycznie optymalnego w problemie LQ układ sterowania dekomponuje się na podukład określania warunkowej oceny wektora stanu i podukład wyznaczania sterowania jako liniowej funkcji tej oceny.

Odpowiednio do wyników przedstawionych w pracach [13], [14] analogiczna własność zachodzi również dla modelu niepewności ograniczonej, odpowiednikiem warunkowej oceny wektora stanu jest ogólnie rzut ortogonalny środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego na podprzestrzeń zmiennych stanu. W przypadku szczególnym, jeśli warunkowy zbiór informacyjny spełnia odpowiednie warunki symetrii, kolejność rzutowania i wyznaczania środka ciężkości może być zamieniona. Wystarczy zatem wyznaczyć środek ciężkości niskowymiarowego warunkowego zbioru stanów będącego rzutem ortogonalnym warunkowego zbioru informacyjnego na podprzestrzeń zmiennych stanu.

Dla zastosowań praktycznych istotna jest wrażliwość optymalnego prawa sterowania na parametry określające zbiór $\mathbb{T}$. W pracy pokazuje się, że założenie elipsoidalności zbioru łącznego oraz konsekwentne operowanie liniowymi przekształceniami, przekrojami i rzutami ortogonalnymi tego zbioru pozwala na parametryzację procesu wyznaczania środka ciężkości warunkowego zbioru informacyjnego oraz że jest on niezależny od parametru γ określającego "wielkość" zbioru $\mathbb{T}$. W konsekwencji pozwala to na pokazanie inwariantności praw sterowania względem parametru γ.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU INWARIANTNOŚCI PRAW STEROWANIA WZGLĘDEM INFORMACJI A PRIORI O ZMIENNYCH NIEPEWNYCH

2.1. Problem syntezy praw sterowania i jego rozwiązanie

Niech J oznacza zbiór liczb naturalnych. Jego ustalony podzbiór $\mathbb{H} = \{1,...,N\}$ nazywamy horyzontem decyzyjnym. Ciąg c: $\mathbb{H} \to R^q$ oznaczamy $c^N \triangleq (c'_1,...,c'_N)$, tym samym symbolem c^N oznaczamy również wektor $[c'_1,...,c'_N]$. Podobnie oznaczamy $c^k = (c'_1,...,c'_k)$, oraz $c^{N\backslash k} \triangleq (c'_{k+1},...,c'_N)$, gdzie w obu przypadkach $k \le N$.

Ciągami wyróżnionymi w rozpatrywanym problemie są: stan początkowy $x_1:\{1\}\to R^n$, trajektoria stanu x: $\mathbb{H} \cup \{N+1\} \to R^n$, pomiary z: $\mathbb{H} \to R^{pN}$, decyzje u: $\mathbb{H} \to R^{mN}$.

Zakładamy, że:

i) dyskretny, stacjonarny model dynamiczny określony w horyzoncie $\mathbb{H}$ ma postać:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ z_k = Cx_x + v_k \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $k \in H=\{1,...,N\}$, x_k, $w_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, z_k, $v_k \in R^p$, $A \in R^{nxm}$, $B \in R^{nxm}$, $C \in R^{pxn}$ oraz istnieje A^{-1},

ii) wartości zmiennych x_1, w_k, v_k dla $k \in \mathbb{H}$ nie są znane, wiadomo jedynie, że należą do danego w przestrzeni zmiennych $t = (x_1, w^N, v^N)$ ograniczonego i mierzalnego w sensie Lebesgue'a zbioru $\mathbb{T} \subset R^d$, gdzie $d = n + nN + pN$ oraz dla każdego $k \in H$ zachodzi

$$\int_{R_{ok}|z_o^k} w_k \, dr_{ok} = 0 \tag{2}$$

$$\int_{R_{ok}|z_o^k} x'_{ok} \, M \, w_k \, dr_{ok} = 0 \tag{3}$$

gdzie R_{ok} jest obrazem zbioru $\mathbb{T}$ poprzez wzajemnie jednoznaczne liniowe przekształcenie ρ_{ok}, a $R_{ok} | z_o^k$ jest "przekrojem" zbioru R_{ok} ustaloną wartością z_o^k. Macierz $M \in R^{nxm}$ w warunku (3) jest dowolna, indeks "o" informuje, że zapis dotyczy układu dynamicznego, w którym dla $k \in \mathbb{H}$ $u_k = 0$,

iii) struktura informacyjna jest typu "nested". Najprostszymi dopuszczalnymi prawami sterowania dla tej struktury są:

$$u_k \, u_k(z^k), \quad k \in \mathbb{H} \tag{4}$$

iv) kryterium optymalności ma postać:

$$q = \frac{1}{m^o} \sum_{k=1}^{k=N} \int_{\mathbb{T}} l_k(x_{k+1}, u_K)\, dt \tag{5}$$

gdzie dla $k \in \mathbb{H}$

$$l_k = x'_{k+1} \; P_{k+1} \; x_{k+1} + u'_k \; Q_k \; u_k \tag{6}$$

$$m^o = \int_{\mathbb{T}} dt \tag{7}$$

$$Q_k > 0, \tag{8}$$

$$P_{k+1} \geq 0, \tag{9}$$

Zadanie syntezy polega na znalezieniu dopuszczalnych praw sterowania $u_k^*(z^k)$, $k \in \mathbb{H}$, takich że odpowiadająca im wartość kryterium q^* jest minimalna.

Założenia wymienione w punktach i)-iv) stanowią informację apriori dla rozpatrywanego problemu syntezy praw sterowania. Informację aposteriori stanowi dla $k \in \mathbb{H}$ ciąg z^k.

W pracy [13] do rozwiązania sformułowanego problemu praw sterowania zastosowano oryginalną metodę zbiorów informacyjnych. Podstawowy wynik zawiera przytoczone poniżej twierdzenie. Dowód tego twierdzenia można znaleźć w pracy [13].

Twierdzenie. Jeżeli spełnione są założenia i)-iv), to optymalne prawo sterowania dla każdego $\mathbb{T} = E(\bar{t}, \gamma T)$ określone jest zależnościami:

$$u_k^* = -(Q_k + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1} A \, \hat{x}_k \tag{10}$$

gdzie

$$\hat{x}_k = \int_{R_k|z^k} x_k dr_k \Big/ \int_{R_k|z^k} dr_k \tag{11}$$

$$K_k = A'(K_{k+1} - K_{k+1} B(Q_k + B'K_{k+1}B)^{-1} BK_{k+1})\, A + P_k \tag{12}$$

$$K_{N+1} = P_{N+1} \tag{13}$$

Dodatkowo

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{ok} + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i \tag{14}$$

$$\hat{x}_{ok} = \int_{R_{ok}|z_o^k} x_{ok}\, dr_{ok} \Big/ \int_{R_{ok}|z_o^k} dr_{ok} \tag{15}$$

Wynik przedstawiony w twierdzeniu jest ogólny w tym sensie, że oprócz założeń wymienionych w ii) nie zakłada się żadnych ograniczeń na zbiór $\mathbb{T}$. W rezultacie wyznaczenie oceny $\hat{x}_k$ wymaga operowania wysokowymiarowym zbiorem warunkowym $R_{ok}|z_o \subset R^{d_k}$, $d_k = n + nN + p(N-k)$ lub wprowadzenia funkcji wagowej $g_k(z_o^k, x_{ok})$ pojawiającej się po przekształceniu wyrażenia na $\hat{x}_{ok}$.

Pojęcie efektywności techniki przestrzeni stanów w syntezie reguł decyzyjnych wprowadzono w pracy [12]. Mówimy, że technika taka jest efektywna, jeżeli zachodzi:

$$\hat{x}_{ok} = \int_{R_{ok}|z_o^k} x_{ok}\, dr_{ok} \Big/ \int_{R_{ok}|z_o^k} dr_{ok} = \int_{X_{ok}} x_{ok}\, dx_{ok} \Big/ \int_{X_{ok}} dx_{ok} \tag{16}$$

Oznacza to, że w przypadku ogólnym do wyznaczenia oceny $\hat{x}_{ok}$ potrzebna jest znajomość pełnego zbioru warunkowego $R_{ok}|z_o^k$, podczas gdy w przypadku efektywnym wystarczy znajomość zbioru X_{ok} będącego rzutem ortogonalnym zbioru $R_{ok}|z_o^k$ na podprzestrzeń zmiennych x_{ok}.

Inaczej przypadek nazywa się efektywnym, jeżeli rzut ortogonalny środka ciężkości zbioru $R_{ok} | z_0^k$ na podprzestrzeń zmiennych x_k jest równy środkowi ciężkości rzutu ortogonalnego zbioru $R_{ok} | z_0^k$ na tę podprzestrzeń. Przykładowo własność taka zachodzi dla rozpatrywanych dalej zbiorów elipsoidalnych.

2.2. Problem inwariantności praw sterowania względem parametrów zbioru $\mathbb{T}$

Informację apriori stanowi między innymi zbiór $\mathbb{T}$. W przypadku zbiorów wielościennych lub elipsoidalnych zbiór ten może być parametryzowany. Dla zbiorów elipsoidalnych parametryzacja taka ma postać $\mathbb{T} = E(m, M)$, gdzie m jest środkiem ciężkości elipsoidy, a M istotnie dodatnią macierzą formy kwadratowej występującej w nierówności określającej tę elipsoidę.

$$(x-m)' M^{-1} (x-m) \leq 1$$

Dla celów pracy wprowadzamy parametryzację zbiorów elipsoidalnych w postaci $\mathbb{T}=E(m, \gamma M)$, gdzie m ma zanczenie jak powyżej, γM jest macierzą istotnie dodatnio określona oraz $\gamma \in (0, \infty)$. Odpowiednia nierówność ma w tym przypadku postać

$$(x-m)' \gamma^{-1} M^{-1} (x-m) \leq 1$$

lub

$$(x-m)' M^{-1} (x-m) \leq \gamma$$

co wyjaśnia sens wprowadzenia dodatkowego parametru skalarnego $\gamma \in (0, \infty)$. Ustalonym wartościom parametrów m, M i zmieniającemu się parametrowi γ odpowiada rodzina elipsoid podobnych.

Obecnie możemy wprowadzić pojęcie inwariantności optymalnych praw względem parametru γ określającego "wielkość" elipsoidalnego zbioru $\mathbb{T}$.

Bezpośrednio z powyższego twierdzenia wynika, że optymalne prawa sterowania jako funkcje środka ciężkości $\hat{x}_k$ warunkowego zbioru stanów są inwariantne względem parametru γ, ponieważ zbiór $\mathbb{T} = E(\bar{\iota}, \gamma T)$ jest elipsoidalny dla każdej wartości parametru $\gamma \in (0, \infty)$ i spełnia warunki ii). Pozostaje zbadać inwariantność $\hat{x}_k$ względem parametru γ, Dotyczą tego następne punkty pracy.

3. ELIPSOIDALNE ZBIORY INFORMACYJNE

Zbiory elipsoidalne posiadają dwie własności podstawowe dla rozpatrywanego w pracy problemu wyznaczania środka ciężkości odpowiedniego zbioru warunkowego. Pierwsza z nich polega na tym, że założenie elipsoidalnego zbioru $\mathbb{T}$ implikuje dla każdego $k \in H$ elipsoidalność zbiorów R_{ok}, $R_{ok} | z_o^k$, X_{ok} (definicje i własności tych zbiorów podane są w dodatku A), drugą jest symetria środkowa szczególnie istotna dla zbioru warunkowego $R_{ok} | z_o^k$. Pierwszej z wymienionych własności dotyczy następujące:

Twierdzenie 1. Jeżeli:

i) układ dynamiczny dany jest w postaci:

$$\begin{cases} x_{ok+1} = Ax_{ok} + w_k \; ; \; x_1 \\ z_{ok} = Cx_{ok} + v_k \end{cases}$$

gdzie $k \in H$, $x_{ok}, w_k \in R^n$, $z_{ok}, v_k \in R^p$, $A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$, $C \in R^{pxn}$ oraz istnieje A^{-1},

ii) $\mathbb{T} = E(\bar{t}, \gamma T)$, gdzie $\bar{t} = [\bar{x}_1', \bar{w}^{N'}, \bar{v}^{N'}] \in R^d$, $0 < T \in R^{dxd}$, $\gamma \in (0, \infty)$, $d = n + nN + pN$, to dla każdego $k \in H$ zachodzi:

i) $R_{ok} = E(m_k, \gamma \Gamma_k)$

gdzie

$$m_k = \begin{bmatrix} G_r & O \\ H_r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{ok|o} \\ z_o^k \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} G_r' & H_r' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_r & 0 \\ H_r & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{k|k}^{-1} & G_{k|k} \\ G_{k|k}' & U_{22} \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}, \quad T_{12} = T_{21}', \quad U_{12} = U_{21}'$$

$U_{11}, T_{11} \in R^{(d-k)x(d-k)}$, $U_{12}, T_{12} \in R^{(d-k)xk}$, $U_{22}, T_{22} \in R^{kxk}$ oraz macierze G_r, H_r określone są jak w tw. A. 1, dodatek A, ii) $R_{ok} | z_o^k = E(\hat{r}_{ok|k}, c_k(z_o^k, \gamma) R_{k|k})$ gdzie

$$\hat{r}_{ok|k} = \bar{r}_{ok|o} - R_{k|k} G_{k|k} (z_o^k - \bar{z}_o^k)$$

$$\bar{r}_{ok|o}' = [\bar{x}_k', \bar{w}^{k-1'}, \bar{w}^{N\backslash k-1'}, \bar{v}^{N\backslash k'}]$$

$$\bar{z}_o^k = P_{41}\bar{x}_1 + P_{12}\bar{w}^{k-1}$$

$$c_k(z_o^k, \gamma) = \gamma - (z_o^k - \bar{z}_o^k)' (U_{22} - G_{k|k}' R_{k|k} G_{k|k})(z_o^k - \bar{z}_o^k)$$

$$P_{12} = [\bar{P}_{12}, 0]$$

macierze $R_{k|k}$, $G_{k|k}$, U_{22} określone są jak w i), a macierze P_{12}, P_{41} jak w tw. A.1, dodatek A.

Dowód. Podstawowa idea dowodu jest prosta i opiera się na tym, że dla każdego $k \in \mathbb{H}$ zbiór informacyjny R_{ok} jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem liniowym zbioru $\mathbb{T}$ oraz że "przekrój" zbioru elipsoidalnego jest nadal zbiorem elipsoidalnym. Jawne natomiast wyznaczenie zależności pomiędzy parametrami zbiorów $\mathbb{T}$, R_{ok}, $R_{ok} | z_o^k$ wymaga złożonych zapisów.

Jeżeli zbiór $\mathbb{T} = E(\bar{t}, \gamma T)$, gdzie $\bar{t}' = [\bar{x}_1', \bar{w}^{N'}, \bar{v}^{N'}]$, oraz $T>0$, $\gamma \in (0, \infty)$, to na podstawie def. A.1, tw. A.1 (kolejno określenie i postać od odwzorowania ρ_{ok}), oraz tw. B. 1 (liniowe przekształcenia zbioru elipsoidalnego), otrzymujemy, że dla każdego $k \in \mathbb{H}$ zbiór $R_{ok} = E(m_k, \gamma\Gamma_k)$, gdzie:

$$m_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_{ok} \\ \bar{w}^{k-1} \\ \bar{w}^{N\backslash k} \\ \bar{v}^{N\backslash k} \\ \bar{z}_o^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & \bar{P}_{12} & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ P_{41} & \bar{P}_{42} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{w}^{k-1} \\ \bar{w}^{N\backslash k-1} \\ \bar{v}^{N\backslash k} \\ \bar{v}^k \end{bmatrix} \tag{17}$$

W powyższym zapisie wykorzystano zmodyfikowane (w stosunku do określonych w tw. A. 1) postacie macierzy P_{12}, P_{42} uwzględniające fakt, że pewne ich bloki są macierzami zerowymi

$$P_{12} = [\bar{P}_{12}, \mathbf{O}], \qquad P_{42} = [\bar{P}_{42}, \mathbf{O}]$$

Podobnie, wykorzystując postać odwzorowania ρ_{ok}^{-1} (tw. A. 1),

$$\Gamma_k^{-1} = \begin{bmatrix} G_r' & H_r' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_r & \mathbf{O} \\ H_r & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} G_r' U_{11} G_r + 2G_r' U_{12} H_r + H_r' U_{22} H_r, & G_r' U_{12} + H_r' U_{22} \\ U_{21} G_r + U_{22} H_r & , \quad U_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} R_{k|k} & G_{k|k} \\ G_{k|k}' & U_{22} \end{bmatrix} \tag{18}$$

gdzie

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

oraz odpowiednio do wartości k, T_{11}, $U_{11} \in R^{(d-k)x(d-k)}$, T_{12}, $U_{12} \in R^{(d-k)xk}$, U_{22}, $T_{22} \in R^{kxk}$, $d = n + nN + pN$.

Inaczej macierze T i U przedstawiamy w postaci macierzy blokowych o wymiarach bloków zależnych od aktualnej wartości k. Odpowiednio do tego bloki o takich samych wymiarach występują w macierzy Γ_k^{-1} określającej zbiór R_{ok}, i dla wygody dalszych zapisów pierwszy z jej bloków oznaczamy przez $R_{k|k}^{-1}$.

Jeżeli zbiór $R_{ok} = E(m_k, \gamma\Gamma_k)$, to na podstawie twierdzenia B.5., dodatek B, zbiór warunkowy $R_{ok} | z_o^k$ jest dla każdego $z_o^k \in P_k$ (dodatek A, def. A.2) również elipsoidalny, tj. $R_{ok} | z_o^k = E(\hat{r}_{ok|k}, c_k(z_o^k, \gamma) R_{k|k})$, gdzie:

$$\hat{r}_{ok|k} = \bar{r}_{ok|o} - R_{k|k} G_{k|k} (z_o^k - \bar{z}_o^k) \tag{19}$$

$$\bar{r}_{ok|o} = [\bar{x}'_k, \bar{w}^{k-1'}, \bar{w}^{N\backslash k-1'}, \bar{v}^{N\backslash k'}]$$

$$\bar{z}_o^k = P_{41} x_1 + \bar{P}_{12} \bar{w}^{k-1}$$

$$c_k(z_o^k, \gamma) = \gamma - (z_o^k - \bar{z}_o^k)' (U_{22} - G'_{k|k} R_{k|k} G_{k|k})(z_o^k - \bar{z}_o^k)$$

Macierze $R_{k|k}$, $G_{k|k}$ określone są jak w (18). Skalarna funkcja $c_k(z_o^k, \gamma)$ modyfikuje "wielkość" elipsoidy $E(\hat{r}_{ok|k}, c_k(z_o^k, \gamma) R_{k|k})$. W przypadku $z_o^k = \bar{z}_o^k$, $c_k(z_o^k, \gamma) = \gamma$ i $E(\hat{r}_{ok|k}, c_k(z_o^k, \gamma) R_{k|k}) = E(\hat{r}_{ok|k}, \gamma R_{k|k})$. Jeżeli natomiast z_o^k należy do brzegu zbioru P_k (def. A.2), to $c_z(z_o^i) = 0$ i elipsoida $E(\hat{r}_{ok|k}, c_k(z_o^k, \gamma) R_{k|k})$ "redukuje się" do punktu $\hat{r}_{ok|k}$.

Na zakończenie dowodu zauważmy, że środek ciężkości warunkowego zbioru $E(\hat{r}_{ok|k}, c_k(z_o^k, \gamma) R_{k|k})$, tj. parametr $\hat{r}_{ok|k}$, nie zależy od γ.

Jeżeli elipsoidalny zbiór $\mathbb{T}$ posiada szczególną orientację względem układu współrzędnych x_1, w^N, v^N, to zachodzi,

Wniosek 1. Jeżeli macierz T określająca zbiór $\mathbb{T}$ w tw. 1 ma postać T=diag[X_1, W_1,...,W_N, V_1,...V_N], to dla każdego $k \in \mathbb{H}$ informacja pomiarowa z_o^k nie wpływa na $\overline{w}^{N\backslash k-1}$, $\overline{v}^{N\backslash k}$.

Dowód. Zakładając szczególną, blokowo diagonalną postać T = diag [X_1, W_1,..., W_N, V_1, ..., V_N], $X_1 > 0$, W_K, $V_K > 0$, $k \in \mathbb{H}$, dla macierzy określającej zbiór $\mathbb{T}$ możemy dokładniej rozpisać postacie macierzy $R_{k|k}^{-1}$, $G_{k|k}$ występujących w 18). Mamy:

$$\Gamma_k^{-1} = \begin{bmatrix} R_{k|k}^{-1} & G_{k|k} \\ G'_{k|k} & (V^{-1})^k \end{bmatrix} \tag{18a}$$

gdzie:

$$R_{k|k}^{-1} = \begin{bmatrix} D'_{11} X_1^{-1} D_{11} & D'_{11} X_1^{-1} \overline{D}_{12} + D_{41} (V^{-1})^k \overline{D}_{42} & o & o \\ D'_{12} X_1^{-1} D_{11} + \overline{D}_{42} (V^{-1})^k D_{41} & \overline{D}_{12} X_1^{-1} D_{12} + D'_{42} (V^{-1})^k \overline{D}_{42} + (W^{-1})^k & o & o \\ o & o & (W^{-1})^{N\backslash k-1} & \\ o & o & o & (V^{-1})^{N\backslash k} \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$G_{k|k} = \begin{bmatrix} D'_{41} (V^{-1})^k \\ D'_{42} (V^{-1})^k \\ O \\ O \end{bmatrix} \tag{21}$$

oraz $D_{12} = [\overline{D}_{12}, O]$, $D_{42} = [\overline{D}_{42}, O]$.

W powyższych zapisach macierzy Γ_k^{-1}, $R_{k|k}^{-1}$, $G_{k|k}$ zastosowano dla uproszczenia oznaczenia $(M^{-1})^k$ = diag $(M_1^{-1},\ldots,M_k^{-1})$, $(M^{-1})^{N\backslash l}$ = = diag $(M_{l+1}^{-1},\ldots,M_N^{-1})$.

Zbiór warunkowy $R_{ok}|z_o^k = E(\hat{r}_{ok|k}, c_k(z_o^k,\gamma)R_{k|k})$, gdzie parametry $\hat{r}_{ok|k}$, $c_k(z_o^k,\gamma)$, $R_{k|k}$ są określone przez (19) - (21) i (18a).

Odnośnie środka ciężkości $\hat{r}_{ok|k}$ zauważmy, że w wyniku szczególnej struktury macierzy $G_{k|k}$ obserwacja z_o^k modyfikuje jedynie dwie pierwsze składowe blokowe tego wektora, czyli $\hat{x}_{ok|k}$ i $\hat{w}_{|k}^{k-1}$ w porównaniu z $\bar{x}_{k|o} = P_{11}\bar{x}_1 + \bar{P}_{12}\bar{w}^{k-1}$, $\bar{w}_{|o}^{k-1}$. Składowe blokowe $\bar{w}_{|o}^{N\backslash k-1}$, $\bar{v}_{|o}^{N\backslash k}$ nie ulegają zmianie.

3. REKURENCJA PARAMETRÓW WARUNKOWEGO ZBIORU STANÓW

Na podstawie tw. 1 zbiór $R_{ok}|z_o^k$ jest elipsoidalny, posiada zatem wymaganą w [13] własność symetrii środkowej i wystarcza znajomość warunkowego zbioru stanów X_{ok}. Jednocześnie wynik zawarty w wniosku 1 sugeruje, że warunkowe zbiory stanów mogą być wyznaczone rekurencyjnie bez każdorazowego rzutowania zbioru $R_{ok}|z_o^k$.

Rzeczywiście zachodzi następujące

Twierdzenie 2. Jeżeli

i) układ dynamiczny dany jest w postaci:

$$\begin{cases} x_{ok+1} = Ax_{ok} + w_k ; x_1 \\ z_{ok} = Cx_{ok} + v_k \end{cases}$$

gdzie $k \in H$, x_{ok}, $w_k \in R^n$, z_{ok}, $v_k \in R^p$, $A \in R^{nxm}$, $B \in R^{nxm}$ $C \in R^{pxn}$ oraz istnieje A^{-1},

ii) $T = E(t, \gamma T)$ gdzie:

$$t' = [\bar{x}'_1, o^{N'}, o^{N'}]$$

$T = \mathrm{diag}(X_1, W_1, \ldots, W_N, V_1, \ldots, V_N)$, $X1>0$, W_i, $V_i>0$, $i \in H$

to dla każdego $i \in H$

$$X_{oi|i} = E(\hat{x}_{oi|i})\, c_i(z_o^i,\gamma)\, L_{i|i}$$

gdzie $X_{oi|i} = \Pi_{x_{oi}}(R_{oi}|z_o^i)$, oraz pomiędzy parametrami zbiorów $X_{ok|k}$, $X_{ok+1|k+1}$ zachodzą związki

$$x_{ok+1|k+1} = \hat{x}_{ok+1|k} + L_{k+1|k+1}\, C'\, V_{k+1}^{-1}(z_{ok+1} - C\bar{x}_{ok+1|k})$$

$$\bar{x}_{ok+1|k} = A\hat{x}_{ok|k}, \qquad \hat{x}_{01|0} = \bar{x}_{01}$$

$$L_{k+1|k+1}^{-1} = L_{k+1|k}^{-1} + C'\, v_{k+1}^{-1}\, C$$

$$L_{k+1|k} = A' L_{k|k} A + W_k, \qquad L_{1|o} = X_1$$

$$c_{k+1}(z_o^{k+1}, \gamma) = c_k(z_o^k, \gamma) + (z_{ok+1} - C\bar{x}_{ok+1|k}), (V_{k+1} + CL_{k+1|k+1}C')$$
$$(z_{ok+1} - C\bar{x}_{ok+1|k})$$

Dowód. Przystępując do dowodu tw. 2 wyznaczymy najpierw zależności rekurencyjne pomiędzy parametrami zbiorów R_{ok+1}, R_{ok} i odpowiednio $R_{ok+1}|z_o^{k+1}$, $R_{ok}|z_o^k$. Wykorzystamy w tym celu odwzorowanie ξ_{ok+1} (def. A.3, tw. A.2) określające związek pomiędzy elementami zbiorów R_{ok+1}, R_{ok}. Mamy

$$\begin{bmatrix} x_{ok} \\ w^{k-1} \\ w_k \\ w^{N\backslash k} \\ w^{N\backslash k+1} \\ v_{k+1} \\ z_o^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & & -A^{-1} & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ -C & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ok+1} \\ w^{k-1} \\ w_k \\ w^{N\backslash k} \\ v^{N\backslash k+1} \\ z_{ok+1} \\ z_o^k \end{bmatrix} \tag{22}$$

Pomiędzy elementami zbiorów $R_{ok+1}\big|z_o^k$, $R_{ok}\big|z_o^k$ istnieje związek:

$$\begin{bmatrix} x_{ok} \\ w^{k-1} \\ w_k \\ w^{N\backslash k} \\ v^{N\backslash k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & & & & & -A^{-1} \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ -C & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ok+1} \\ w^{k-1} \\ w_k \\ w^{N\backslash k} \\ w^{N\backslash k+1} \\ z_{ok+1} \end{bmatrix} \tag{23}$$

lub w zapisie skróconym:

$$\Gamma_{ok} = F^{-1}\begin{bmatrix} r_{ok+1} \\ z_{ok+1} \end{bmatrix}$$

Na podstawie dowodu wniosku 1 zbiór $R_{ok}\,|\,z_o^k = E(\hat{r}_{ok|k}, c_k(z_o^k, \gamma) R_{k|k})$, a jego parametry są określone przez (19), (4), (18a). Dla uproszczenia dalszych zapisów przedstawimy macierz $R_{k|k}$ (porównaj (18a)) w postaci:

$$R_{k|k}^{-1} = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} L_{k|k} & M_{k|k} \\ M'_{k|k} & N_{k|k} \end{bmatrix}, W_k^{-1}, (W^{-1})^{N\backslash k}, (V^{-1})^{N\backslash k+1}, V_{k+1}^{-1}\right) \tag{24}$$

oraz wprowadzimy pomocniczą macierz

$$R_{p,k|k}^{-1} = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} L_{k|k} & M_{k|k} \\ M'_{k|k} & N_{k|k} \end{bmatrix}^{-1}, W_k^{-1}\right) \tag{25}$$

Wykorzystując odwzorowanie (23) oraz tw. B.1 określamy zbiór $R_{ok}\,|\,z_o^k = E(\hat{r}_{ok|k}, c_k(z_o^k, \gamma)\Gamma_{k+1|k})$

gdzie:

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_{ok+1|k} \\ \bar{z}_{ok+1|k} \end{bmatrix} = F\,\hat{r}_{ok|k} \tag{26}$$

$$\Gamma^{-1}_{k+1|k} = F^{-1'} R^{-1}_{k|k} F^{-1} \tag{27}$$

Rozpisując szczegółowo prawą stronę (27) łatwo sprawdzić, że macierz $\Gamma^{-1}_{k+1|k}$ może być przedstawiona w postaci:

$$\Gamma^{-1}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} R^{-1}_{k+1|k+1} & G_{k+1} \\ G'_{k+1} & V^{-1}_{k+1} \end{bmatrix} \tag{28}$$

gdzie:

$$R^{-1}_{p,k+1|k+1} = \left(\begin{bmatrix} L_{k+1|k+1} & M^{11}_{k+1|k+1} & M^{12}_{k+1|k+1} \\ M^{11'}_{k+1|k+1} & N^{11}_{k+1|k+1} & N^{12}_{k+1|k+1} \\ M^{12'}_{k+1|k+1} & N^{21}_{k+1|k+1} & N^{22}_{k+1|k+1} \end{bmatrix}^{-1} \right) \tag{29}$$

$$R^{-1}_{k+1|k+1} = \mathrm{diag}\,(R^{-1}_{p,k+1|k+1}, (W^{-1})^{N\backslash k}, (V^{-1})^{N\backslash k+1}) \tag{30}$$

$$G'_{k+1} = \left[-V^{-1}_{k+1} C, O, O, O, O \right] \tag{31}$$

Na podstawie (27) pomiędzy macierzami $R_{p,k|k}, R_{p,k+1|k+1}$ zachodzi związek:

$$R^{-1}_{p,k+1|k+1} = F^{-1}_p R^{-1}_{p,k|k} F^{-1'}_p + B V^{-1}_{k+1} B' \tag{32}$$

$$F^{-1}_p = \begin{bmatrix} A^{-1} & O & -A^{-1} \\ O & 1 & O \\ O & O & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -C' \\ O \\ O \end{bmatrix} \tag{33}$$

Stosując do (32) wzór na odwrotność sumy macierzy otrzymujemy:

$$R_{p,k+1|k+1} = R_{p,k+1|k} - \Delta_{k+1|k+1} \tag{34}$$

$$R_{pk+1|k} = F'_p R_{pk|k} F_p \tag{35}$$

$$\Delta_{k+1|k+1} = F'_p R_{pk|k} F_p B(V_{k+1} + B'F'_p R_{pk|k} F_p B)^{-1} B'F'_p R_{pk|k} F_p \tag{36}$$

Uwzględniając szczegółową strukturę macierzy $R_{p,k|k}$ mamy:

$$R_{p,k+|k} = \begin{bmatrix} L_{k+1|k} & AM_{k|k} & W_k \\ M'_{k|k} A' & N_{k|k} & O \\ W_k & O & W_k \end{bmatrix} \tag{35a}$$

$$\Delta_{k+1|k+1} = \begin{bmatrix} L_{k+1|k} C' \\ M'_{k|k} A'C \\ WC' \end{bmatrix} (V_{k+1} + CL_{k+1|k} C')^{-1} [CL_{k+1|k}, CAM_{k|k}, CW_k] \tag{36a}$$

gdzie:

$$L_{k+1|k} = A' L_{k|k} A + W_k \tag{37}$$

Jeżeli zbiór $R_{ok}|z_o^k = E(\hat{r}_{ok|k}, z'_{ok}), c_k(z_o^k, \gamma)\Gamma_{k+1|k})$, to na podstawie tw. B.5 zbiór

$$R_{ok+1}\Big|z_o^{k+1} = E(\hat{r}_{ok+1|k+1}, c_{k+1}(z_o^{k+1}, \gamma)\, R_{k+1|k+1})$$

gdzie

$$\hat{r}_{ok+1|k+1} = \bar{r}_{ok+1|k} - R_{k+1|k+1}\, G_{k+1}(z_{ok+1} - \bar{z}_{ok+1|k}) \tag{38}$$

W szczególności dla pierwszego z wektorów stanowiących kolejne bloki wektora $\hat{r}_{ok+1|k+1}$ (jest nim $\hat{x}_{ok+1|k+1}$) mamy:

$$\hat{x}_{ok+1|k+1} = \bar{x}_{ok+1|k} + L_{k+1|k+1}\, C' V_{k+1}^{-1}(z_{ok+1} - C\bar{x}_{ok+1|k}) \tag{38a}$$

Macierz $R_{k+1|k+1}$ określona jest postacią:

$$R_{k+1|k+1} = \mathrm{diag}(R_{p,k+1|k+1}, W^{N\backslash k}, V^{N\backslash k+1}) \tag{39}$$

w której $R_{pk+1|k+1}$ określa zależność (34) z podstawieniami ogólnymi (35), (36) lub szczegółowymi (35a), (36a). Odpowiednio do (38a) ograniczymy się do wypisania zależności dla macierzy $L_{k+1|k+1}$, bowiem tylko ona występuje w (38a). Na podstawie (39) z odpowiednimi podstawieniami za $R_{pk+1|k+1}$ mamy:

$$L_{k+1|k+1} = L_{k+1|k} - L_{k+1|k}\, C'(V_{k+1} - CL_{k+1|k}\, C')^{-1}\, CL_{k+1|k} \tag{40}$$

gdzie: $L_{k+1|k} = A' L_{k|k}\, A + W_k$.

Zależność (40) przepisać można również w postaci:

$$L_{k+1|k+1}^{-1} = L_{k+1|k}^{-1} + C' V_{k+1}^{-1}\, C \tag{40a}$$

Warunkiem początkowym dla zależności rekurencyjnych (40) lub (40a) jest $L_{1|0} = X_1$.

W charakterze dodatkowego komentarza zauważmy, iż wyrażenie (38) określa również sposób wyznaczania ocen $\hat{w}^{k}_{k+1|k+1}$, $\hat{v}^{k+1}_{k+1|k+1}$ przez odpowiednią do z_{ok+1} modyfikację ocen $(\hat{w}^{k-1'}, \overline{w}'_k)_{k|k}$, $(\hat{v}', \overline{v}')_{k|k}$, gdzie $\overline{w}_k, \overline{v}_k$ są ocenami a priori (porównaj z postacią zbioru $\mathbb{T}$=E (t, γT)). Zauważmy również, że oceny $\hat{x}^{N\backslash k}_{k+1|k+1}$, $\hat{v}^{N\backslash k+1}_{k+1|k+1}$ będą równe swoim ocenom a priori, co formalnie wynika ze struktury macierzy $R_{pk+1|k+1}$ G_{k+1}. Zależność rekurencyjna dla $c_{k+1}(z_o^{k+1})$ ma postać:

$$c_{k+1}(z_o^{k+1},\gamma) = c_k(z_o^k,\gamma) + (z_{ok+1} - C\overline{x}_{ok+1|k})' \\ (V_{k+1} + CL_{k+1|k+1}C')(z_{ok+1} - Cx_{ok+1|k}) \tag{41}$$

Przypominając, że określone są rekurencyjne zależności dla parametrów zbiorów warunkowych $R_{ok+1}\left|z_o^{k+1}\right. = E\,(\hat{r}_{ok+1|k+1},\ c_{k+1}(z_o^{k+1},\gamma)\ R_{k+1|k+1})$, $k \in \mathbb{H}$ ostatnim krokiem tej części dowodu jest wyznaczenie zależności rekurencyjnych dla zbiorów $X_{ok+1|k+1}$ będących rzutami ortogonalnymi zbiorów $R_{ok+1}|z_o^{k+1}$ na podprzestrzeniach zmiennych x_{ok}. Na podstawie tw. B. 3 mamy:

$$x_{ok+1|k+1} = \Pi_{x_{ok}}(\mathbb{E}(\hat{r}_{ok+1|k+1}, c_{k+1}(z_o^{k+1},\gamma)R_{k+1|k+1})) = \\ = \mathbb{E}(\hat{x}_{ok+1|k+1}, c_{k+1}(z_o^{k+1},\gamma)L_{k+1|k+1}). \tag{27}$$

gdzie $\hat{x}_{ik+1|k+1}$ określa zależność (38a), $L_{k+1|k+1}$ (40) lub (40a) z warunkiem początkowym $L_{1|0} = X_1$, $c_{k+1}(z_o^{k+1})$ określa (41). Tym samym wyrażenie (27) kończy dowód tw. 3.

5. PODSUMOWANIE

Wyniki przedstawione w pracy dotyczą inwariantności praw sterowania względem "wielkości" elipsoidalnego zbioru $\mathbb{T}$ harakteryzującego łącznie zmienne niepewne

występujące w rozpatrywanym problemie syntezy praw sterowania. Wykazana inwariantność jest konsekwencją niezależności praw sterowania jako funkcji środka ciężkości od kształtu zbioru $\mathbb{T}$, jeżeli tylko spełnione są odpowiednie warunki symetrii oraz faktu, że w przypadku elipsoidalności zbioru $\mathbb{T}$ w powiązaniu z liniowością modelu sterowanego obiektu elipsoidalne są zbiory informacyjne R_k. Z kolei ponieważ przekrój (zbiór warunkowy) zbioru elipsoidalnego, jak również jego rzut ortogonalny na przestrzeń zmiennych stanu są zbiorami elipsoidalnymi, możliwa jest konsekwentna parametryzacja problemu wyznaczania środka ciężkości odpowiednich zbiorów; oraz dodatkowo nie zależą one od parametru γ określającego "wielkość" zbioru $\mathbb{T}$.

Wymienione powyżej wyniki udało się uzyskać dzięki założeniu elipsoidalności zbioru $\mathbb{T}$ charakteryzującego łącznie wszystkie zmienne niepewne występujące w rozpatrywanym problemie.

Fizykalna słuszność założenia elipsoidalnego zbioru $\mathbb{T}$ wymaga badań eksperymentalnych. Biorąc jednak pod uwagę, że otrzymany wynik jest z dokładnością do czynnika liczbowego $c_k(z^k, \gamma)$ formalnie identyczny z postacią filtru Kalmana, można się spodziewać równie pozytywnych wyników aplikacyjnych.

Wykazana w pracy inwariantność uzasadnia sukcesy odnoszone przy stosowaniu liniowego prawa sterowania pomimo wątpliwości odnośnie do rzeczywistych parametrów zakłóceń.

LITERATURA

[1] Akashi H., Nose K.: On certainty equivalence in stochastic optimal control, Int. J. Control, 21 (1975), pp. 875-863.

[2] Barmish B. R., Sankaran J.: The propagation of parametric uncertainty via polytopes, IEEE Trans. Automatic Control, AC-25 (1979), pp. 346-349.

[3] Bertsekas D.P.: Control of uncertain systems with a set-membership description of the uncertainty, Ph. D. dissertation, Dept. Elec. Eng., MiT, Cambridge, 1971.

[4] Clement T., Gentil S.: Reformulation of parameter identyfication with unknown-but-bounded errors, Mathematics and Computers in Simulation, 30 (1988), pp. 257-270.

[5] Fogel E., Huang Y.E.: On the value of information in system identification-bounded noise case, Automatica, 18 (1982), pp. 229-238.

[6] Glover J.D., Schweppe F.C.: Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances, IEEE Trans. Automatic Control, AC-16(1971), pp. 411-423.

[7] Kurzhanski A.B.: Control and Observation under Conditions of Uncertainty", Nauka, Moskow, 1977.

[8] Schweppe F.: Uklady dynamiczne w warunkach losowych. WNT, Warszawa 1978.

[9] Tse E., Bar-Shalom Y.: Generalized certainty equivalence and dual effect in stochastic control, IEEE Trans. Automatic Control, AC-20 (1975), pp. 817-819.
[10] Uchida K., Shimemura E.: Optimal control of linear stochastic system with quadratic criterion under classical information structure - On certainty equivalence - Trans, SCIE, 12 (1976), pp. 89-95.
[11] Wojciechowski K.W.: Recursive measurement data filtration with uncertainty described by convex polyherda, Syst. Anal. Model. Simul. 4(1987), pp. 557-560.
[12] Wojciechowski K.W.: Efektywność syntezy prawa sterowania techniką przestrzeni stanu dla zbiorowego modelu niepewności, Konf. RP. I. 02, Kazimierz Dolny 1988.
[13] Wojciechowski K.W.: Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej. Przypadek centrowanego zbioru $\mathbb{T}$, przyjęte do publikacji w ZN Pol. Śląskiej.
[14] Wojciechowski K.W.: Synteza prawa sterowania w warunkach niepewności ograniczonej. Przypadek niecentrowanego zbioru $\mathbb{T}$, złożono do publikacji w Archiwum Automatyki i Telemechaniki.

Dodatek A

1. ODWZOROWANIA I ZBIORY INFORMACYJNE

Niech będzie dany układ dynamiczny w postaci:

$$\begin{cases} x_{ok+1} = Ax_{ok} + w_k \; ; \; x_1 \\ z_{ok} = Cx_{ok} + v_k \end{cases} \tag{A.1}$$

gdzie: $x_{ok}, w_k \in R^n$, $z_{ok}, v_k \in R^p$, $A \in R^{nxm}$, $C \in R^{pxn}$ oraz istnieje A^{-1}.

Definicja A.1 Określone dla każdego $k \in \mathbb{H}$ wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\rho_{ok} : R^d \to R^d$, $d = n+nN+pN$, przyporządkowujące każdemu punktowi $(s_k, v^k) \in R^d$, gdzie $s_k = (x_1, w_N, v^{N/k})$, $r_{ok} = (x_{ok}, w^N, v^{N/k})$ nazywamy swobodnym odwzorowaniem informacyjnym.

Odzworowanie ρ_{ok} przekształca dany zbiór $\mathbb{T} \subset R^d$ w zbiór $R_{ok} = \rho_{ok}(\mathbb{T}) = \{(r_{ok}, z_o^k) : (r_{ok}, z_o^k) = \rho_{ok}(s_k, v^k) | (s_k, v_k) \in T\} \subset R^d$. Zbiór R_{ok} nazywamy zbiorem informacyjnym odpowiadającym zbiorowi $\mathbb{T}$ zgodnie z odwzorowaniem ρ_{ok}.

Twierdzenie A.1. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1), to dla każdego $k \in H$:
i) odwzorowanie ρ_{ok} jest liniowe i ma postać:

$$\begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_{ok} \end{bmatrix} = \rho_{ok}(s_k, v^k) = \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$$

gdzie $r_{ok} = (x_{ok}, w^N, v^{N \setminus k})$, $s_k = (x_1, w^N, v^{N \setminus k})$

$$G_p = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad H_p = \begin{bmatrix} P_{41} & P_{42} \end{bmatrix}$$

$P_{11} = A^{k-1}$

$$P_{12} = \begin{bmatrix} A^{k-1} & \dots & 1 & \vdots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

k – macierzy N – k macierzy

$$P_{41} = \left.\begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}\right\} \text{k wierszy macierzowych}$$

$$P_{42} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & \vdots & 0 & & 0 \\ C & & 0 & \vdots & & & \\ \cdot & & & \vdots & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \vdots & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \vdots & \cdot & & \cdot \\ CA^{k-2} & \dots & C & \vdots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

k kolumn macierzowych — N − k kolumn macierzowych

ii) odwzorowanie odwrotne ρ_{ok}^{-1} ma postać:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} = \rho_{ok}^{-1}(r_{ok}, z_o^k) = \begin{bmatrix} G_r & 0 \\ H_r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_o^k \end{bmatrix}$$

gdzie

$$G_r = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad H_r = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{42} \end{bmatrix}$$

oraz

$$D_{11} = P_{11}^{-1}$$

$$D_{12} = -P_{11}^{-1} P_{12}$$

$$D_{41} = -P_{41} P_{11}^{-1}$$

$$D_{42} = P_{41} P_{11}^{-1} P_{12} - P_{42}$$

Dowód. Prawdziwość twierdzenia wynika z zależności:

$$x_{ok} = A^{k-1}x_1 + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i}w_i$$

$$z_{oj} = C(A^{j-1}x_i + \sum_{i=1}^{j-1} A^{j-1-i} w_i) + v_j, \quad j = 1,..,k$$

zapisanych w postaci macierzowej. Te same zależności rozwikłane względem x_1 i ciągu zmiennych v^k dają postać odwzorowania odwrotnego. Związki pomiędzy macierzami D_{11}, D_{12}, D_{41}, D_{42} a P_{11}, P_{12}, P_{41}, P_{42} wynikają z tożsamości:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ P_{41} & P_{42} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ D_{41} & D_{42} & & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Definicja A.2. Niech dla każdego $k \in H$ będzie dany zbiór R_{ok} o elementach (r_{ok}, z_o^k). Zbiór $P_{ok} = \Pi_{zk}(R_{ok}) = \{(z_o^k) : (r_{ok}, z_o^k) \in R_{ok}\}$ nazywamy rzutem prostopadłym zbioru R_{ok} na przestrzeń zmiennych z_o^k. Dla ustalonego z_o^k zbiór $R_{ok} | z_o^k = \{(r_{ok}) : (r_{ok}), z_o^k) \in R_{ok}\}$ nazywamy zbiorem warunkowym zbioru R_{ok} przy warunku z_o^k. Zbiór $X_{ok} | z_o^k = \Pi_{x_{ok}}(R_{ok} | z_o^k) = \{(x_{ok}) : r_{ok} = (x_{ok}, w^N, v^{N\backslash k}) \in R_{ok} | z_o^k\}$ nazywamy warunkowym zbiorem stanów.

Definicja A.3. Niech dla każdego $k \in H$ będzie określone jednoznaczne odwzorowanie $\xi_{ok} : R^d \to R^d$, $d = n + nN + pN$, przyporządkowujące punktowi $(r_{ok}, z_o^k) = (x_{ok}, w^N, v^{N\backslash k}, z_{ok}, z_o^{k-1}) \in R_{ok} \subset R^d$ punkt

$$(r_{ok-1}, z_o^{k-1}) = (x_{ok-1}, w^N, v^{N\backslash k}, v_k, z_o^{k-1}) \in R_{ok-1} \subset R^d.$$

Odwzorowanie ξ_{ok} przekształca dany zbiór R_{ok} w zbiór

$$R_{ok-1} = \xi_{ok}(R_{ok}) = \{(r_{ok-1}, z_o^{k-1}) : (r_{ok-1}, z_o^{k-1}) = \\ = \xi_{ok}(r_{ok}, z_o^k) \,\big|\, (r_{ok}, z_o^k) \in R_{ok-1}\}.$$

Twierdzenie A.2. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1), to dla każdego $k \in H$ odwzorowanie ξ_{ok} ma następującą postać szczegółową:

$$r_{ok-1}\left\{\begin{bmatrix} x_{ok-1} \\ w^{k-2} \\ w_{k-1} \\ w^{N\backslash k-1} \\ v^{N\backslash k} \\ v_k \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1} & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ -C & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ok} \\ w^{k-1} \\ w_{k-1} \\ w^{N\backslash k-1} \\ v^{N\backslash k} \\ z_{ok} \\ z_o^{k-1} \end{bmatrix}\right\} r_{ok}$$

Dowód. Postać odwzorowania ξ_{ok} wynika bezpośrednio z zależności $x_{ok-1} = A^{-1}x_{ok} - A^{-1}w_{k-1}$, $v_k = z_{ok} - Cx_{ok}$.

Dodatek B

B.1. ZBIORY ELIPSOIDALNE

Definicja B.1. Zbiór $\{x: (x - m)' \gamma^{-1} M^{-1} (x - m) \le 1\}$, gdzie $x \in R^n$, $M > 0$, $\gamma \in (0, \infty)$ nazywamy n-wymiarowym zbiorem elipsoidalnym z parametrem γ.

Parametr m określa środek elipsoidy, pojedyncze rzeczywiste i dodatnie wartości własne macierzy γM są równe odwrotnościom długości półosi elipsoidy. Parametry m, γ, jednoznacznie określają zbiór elipsoidalny, stąd stosujemy również, oprócz postaci z def. B.1., zapisy: $E(m, \gamma M)$, lub E jeśli nie ma potrzeby jawnego wymieniania parametrów. Zmieniając wartość parametru γ przy ustalonych wartościach parametrów

m, M otrzymujemy rodzinę elipsoid podobnych. Dla $\gamma = 0$ elipsoida redukuje się do punktu, a dla $\gamma \to \infty$ jej "wielkość" dąży do nieskończoności. Elipsoida jest zbiorem wypukłym i ograniczony,.

Twierdzenie B.1. Liniowe nieosobliwe przekształcenie $y = Ax$ zbioru E (m, M) jest zbiorem E (Am, $A\gamma MA'$).

Dowód. Zbiór E (m, γ M) zgodnie z def. B.1. określony jest nierównością $(x-m)' \gamma^{-1} M^{-1} (x-m) \leq 1$. Podstawiając $x=A^{-1}y$ otrzymujemy

$$(A^{-1}y - m)'\gamma^{-1}M^{-1}(A^{-1}y - m) \leq 1$$

czyli

$$(y - Am)'A^{-1'}\gamma^{-1}M^{-1}A^{-1}(y - Am) \leq 1.$$

Definicja B.2. Funkcją podpierającą wypukłego i ograniczonego zbioru $Z \subset R^n$ nazywamy $\eta(n) = \max_{z \in Z} z' n$.

Twierdzenie B.2. [8] Funkcją podpierającą zbioru E(m, γ M) jest

$$\eta(n) = (n'\gamma Mn)^{1/2} + n'm.$$

Definicja B.3. Rzutem ortogonalnym punktu $[x', y'] \in R^n$, $\dim x = n_1$, $\dim y = n_2$, $n_1 + n_2 = n$, na podprzestrzeń zmiennych x nazywamy punkt $[x'] \in R^{n_1}$, co zapisujemy

$$\Pi_x(Z) = X = \{x : x = \Pi_x([x', y']) \wedge [x', y'] \in Z\}.$$

Twierdzenie B.3. Rzutem ortogonalnym zbioru E (m, γ M), gdzie

$$m' = [m'_x, m'_y] \qquad \gamma M = \begin{bmatrix} \gamma M_{11} & \gamma M_{12} \\ \gamma M_{21} & \gamma M_{22} \end{bmatrix} > 0$$

$m_x \in R^{n_1}$, $m_y \in R^{n_2}$, $M_{11} \in R^{n_1 x n_1}$, $M_{12} = M'_{21} \in R^{n_1 x n_2}$, $M_{22} \in R^{n_2 x n_2}$ na podprzestrzeń zmiennych x jest zbiór E(m_x, γM_{11}), co zapisujemy Π_x (E(m,γ M)) = E(m_x, γM_{11}). Podobnie Π_y (E(m,γ M)) = E(m_y, γM_{22}).

Dowód. Na podstawie tw. B.2. przy uwzględnieniu

$$m' = [m'_x, m'_y]$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M \\ M' & M_{22} \end{bmatrix}$$

funkcja podpierająca zbioru E (m,γM) ma postać:

$$\eta\left(\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \gamma M \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}\right)^{1/2} + \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix}$$

Na podstawie def. B.2., B.3. funkcja podpierająca zbioru Π_x (E (m,γM)) ma postać:

$$\eta\left(\begin{bmatrix} n_x \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} n_x \\ 0 \end{bmatrix}' \gamma M \begin{bmatrix} n_x \\ 0 \end{bmatrix}\right)^{1/2} + \begin{bmatrix} n_x \\ 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix} =$$

$$= (n'_x \gamma M_{11} n_x)^{1/2} + n'_x m_x$$

Odpowiada jej zbiór E (m_x,γM_{11}). Analogicznie funkcja podpierająca zbioru Π_y (E (m,γM)) ma postać:

$$\eta\left(\begin{bmatrix} o \\ n_y \end{bmatrix}\right) = (n'_y \gamma M_{22} n_y)^{1/2} + n'_y m_y$$

i odpowiada jej zbiór E (m_x,γM_{22}).

Twierdzenie B.4. Jeżeli macierz M z tw. B.3. jest blokowo diagonalna, $M_{12} = M'_{21} = 0$, to nierówność określającą zbiór Π_x (E (m,γM)) otrzymuje się podstawiając $m_y = 0$, $y = 0$ w nierówności (def. B.1.) określającej zbiór E (m,γM).

Podstawiając $m_x = 0$, $x = 0$, otrzymuje się nierówność określającą zbiór Π_y (E(m,γM)).

Dowód. Jeżeli $M_{12} = M'_{21} = 0$, to

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & M_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

zatem zbiór E(m,γM) określony jest nierównością

$$(x - m_x)'\gamma^{-1} M_{11}^{-1} (x - m_x) + (y - m_y)'\gamma^{-1} M'_{22} (y - m_y) \le 1$$

Podstawiając $m_y = 0$, $y = 0$ otrzymujemy

$$(x - m_x)'\gamma^{-1} M_{11}^{-1} (x - m_x) \le 1$$

Nierówność ta określa zbiór E(m_x,γM_{11}). Na podstawie tw. B.3. jest on rzutem ortogonalnym zbioru E(m,γM) na podprzestrzeń zmiennych x.

Definicja B.4. Niech będzie dany zbiór $Z \subset R^n$ o elementach [x', y']. Zbiór $Z|y = \{x: (x, y = const) \in Z\}$, gdzie $y \in \Pi_y(Z)$ nazywamy jego zbiorem warunkowym przy warunku y.

Twierdzenie B.5. Niech będzie dany zbiór $E(m, \gamma G^{-1})$, gdzie $m' = \{m'_x, m'_y]$

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} > 0$$

$m_x \in R^{n_1}$, $m_y \in R^{n_2}$, $G_{11} \in R^{n_1 x n_1}$, $G_{12} = G'_{21} \in R^{n_1 x n_2}$, $G_{22} \in R^{n_2 x n_2}$, $n_1 + n_2 = n$

Dla każdego

$$y \in \Pi_y(E(m, \gamma G^{-1}))\ (E(m, \gamma G^{-1}))\Big|y = E(\hat{m}_x, c(y, \gamma) G_{11}^{-1}),$$ gdzie:

$$\hat{m}_x = m_x - G_{11}^{-1} G_{12} (y - m_y)$$

$$c(y, \gamma) = \gamma - (y - m_y)' (G_{22} - G_{21} G_{11}^{-1} G_{12})(y - m_y)$$

oraz $0 \le c(y, \gamma) \le \gamma$.

Dowód. Odpowiednio dla założonych struktur wektora m i macierzy G nierówność określająca zbiór $E(m, \gamma G^{-1})$ może być przedstawiona w postaci:

$$(x - m_x)' \gamma^{-1} G_{11} (x - m_x) + 2(x - m_x)' \gamma^{-1} G_{12} (y - m_y) +$$
$$+ (y - m_y)' \gamma^{-1} G_{22} (y - m_y) \le 1$$

Traktując y jako ustalone otrzymujemy

$$(x - m_x + G_{11}^{-1} G_{12} (y - m_y))' \gamma^{-1} G_{11} (x - m_x + G_{11}^{-1} G_{12} (y - m_y)) \le$$
$$1 - (y - m_y)' (\gamma^{-1} G_{22} - \gamma^{-1} G_{22} G_{11}^{-1} G_{12})(y - m_y)$$

Na podstawie tw. B.3. zbiór $\Pi_y(E(m, \gamma G^{-1})) = E(m_y, \gamma M_{22})$, gdzie ze wzoru na odwrotność macierzy blokowej G mamy

$$M_{22} = (G_{22} - G_{21} G_{11}^{-1} G_{12})^{-1}$$

Nierówność określająca zbiór $E(m_y, \gamma M_{22})$ ma zatem postać:

$$(y - m_y)' \gamma^{-1} (G_{22} - G_{21} G_{11}^{-1} G_{12})(y - m_y) \leq 1$$

czyli $c(y, \gamma) \geq 0$. Równocześnie, ponieważ z założenia $G>0$, również $G^{-1} > 0$ i $(y - m_y)' \gamma (G_{22} - G_{21} G_{11}^{-1} G_{12}) (y - m_y) \geq 0$. Łącząc powyższe nierówności otrzymujemy $0 \leq c(y, \gamma) \leq \gamma$.

Recenzent: Dr hab. inż. Mirosław **Zaborowski**

Wpłynęło do Redakcji 15.05. 1992 r.

Abstract

In the case of the ellipsoidal set $\mathbb{T}$ characterizing jointly the initial state x_1, the sequence of disturbances $w_1,...,w_N$ in the state equation and the sequence of measurements errors in the output equation information sets are also ellipsoidal as well as conditional information sets and their orthogonal projection on to subspace of state. In the paper ellipsoidal sets are parameterized by their gravity center and positive definite matrix with scalar parameter γ describing the "radius" of the ellipsoid. For information sets and conditional information sets the dependency of their parameters on parameters of a priori given set T is presented. It has been shown that the gravity center of the conditional information set does not depend on the parameter γ and in consequence the optimal control law is invariant with respect to them. Assuming additionally specific block-diagonal structure of matrix T and repeating all considerations on can obtain recurrent dependencies between parameters of conditional sets of state, as well as invariability of their gravity center on parametr γ.